

# Resolução Q3 - EuPhO 2017

Alessandro da Cunha Menegon

## I. ENUNCIADO - MALHA SUPERCONDUTORA

Considere uma malha feita de uma fina placa supercondutora que apresenta uma densa grade de pequenos furos. Inicialmente a placa se encontra em um estado não supercondutor, e um dipolo magnético  $m$  é colocado a uma distância  $a$  dessa placa, apontando perpendicularmente em direção à mesma. Agora a placa é resfriada até que se torne supercondutora. Depois, o dipolo é movido para uma distância  $b$  da placa, sem alterar sua direção. **Encontre a força entre o dipolo e a placa.** O espaço entre os furos é muito menor que  $a$  e  $b$ , e as dimensões lineares da placa são muito grandes.

## II. SOLUÇÃO

### A. O que é um supercondutor?

Supercondutores são substâncias que apresentam características peculiares, entre elas estão a **inexistência de resistência elétrica** e a capacidade de **expelir todo e qualquer campo magnético**, conhecido como “efeito Meissner”.

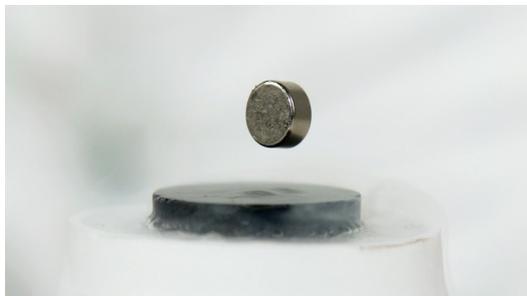


Fig. 1: Levitação de um ímã sobre um supercondutor.

Diferentemente de condutores normais, em que a resistência decai gradualmente com a temperatura até valores muito próximos de zero, os supercondutores em geral apresentam uma temperatura crítica, a partir da qual sua resistência cai abruptamente para zero. Supercondutores podem ser classificados em dois tipos, o **tipo 1** possui um campo magnético crítico para o qual toda sua supercondutividade é perdida, ou seja se um campo muito forte for aplicado nas redondezas, o material para de repelir por completo o campo magnético. O **tipo 2** apresenta dois valores críticos de campo, entre os quais permite a passagem parcial do campo por pontos determinados conhecidos como “vórtices”.

### B. Efeito “Flux Pinning”

O “**Flux Pinning**”, ou efeito de prisão do fluxo, é o que torna possível o conhecido fenômeno da levitação estável de ímãs ou do próprio material supercondutor. É no caso especial do **tipo 2** em que esse fenômeno ocorre e é o caso em que esse problema se baseia.

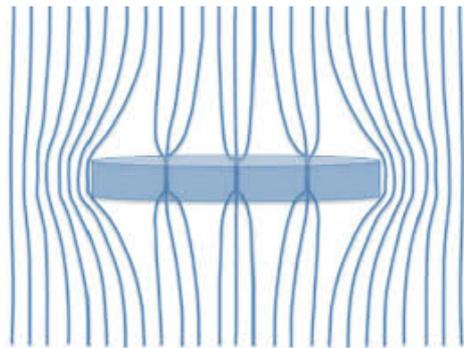
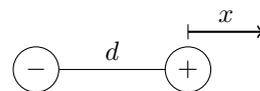


Fig. 2: Campo magnético “preso” em um supercondutor do tipo 2.

A presença dos pequenos furos no disco faz com que, uma vez resfriado além da temperatura crítica, o agora supercondutor manterá o campo magnético do dipolo moldado ao seu redor e pelos furos, criando uma forte estabilidade no sistema dipolo-placa. Desse modo fica fácil compreender o que ocorre no problema e o porquê de movimentar o dipolo para uma nova posição.

### C. Força entre dois dipolos

Para calcular a força entre dipolos magnéticos, podemos invocar uma poderosa analogia com cargas elétricas, já que seus termos diferem apenas por constantes:



Sendo  $m = q_m d$ :

$$B(x) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi x^2} - \frac{\mu_0 q_m}{4\pi (x+d)^2} \quad (1)$$

Como  $d \ll x$ , podemos utilizar uma aproximação de 1º ordem:  $(1+x)^n \approx 1+nx$ :

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q_m}{x^2} - \frac{q_m}{x^2} \left( 1 - \frac{2d}{x} \right) \right] = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3} \quad (2)$$

Considere agora a força em um dipolo colocado em um campo **B** não uniforme:

$$F(x) = -q_m B(x) + q_m B(x+d) \quad (3)$$

Aproximando para uma expansão de Taylor de **B**:

$$F \approx -q_m B(x) + q_m \left( B(x) + d \left. \frac{dB}{dx} \right|_x \right) \quad (4)$$

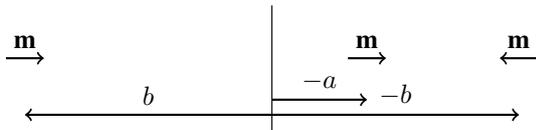
$$F(x) = q_m d \left( -\frac{3\mu_0 m}{2\pi x^4} \right) = -\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} \quad (5)$$

O sinal negativo significa uma força de atração, ou seja, dipolos orientados no **mesmo sentido se atraem** e orientados em **sentidos contrários se repelem**.

#### D. Método das imagens

Uma vez desmistificado o fenômeno e com os valores das forças entre diferentes dipolos, podemos invocar o método das imagens para concluir a solução. Famoso nos problemas de elétrica, o método das imagens prevê que um sistema complexo pode ser simplificado para outro, desde que as condições de igualdade do potencial sejam cumpridas.

Retornando ao problema, no caso inicial não existem forças magnéticas, uma vez que o campo acaba de se moldar ao supercondutor e aquela se torna a posição de equilíbrio do sistema. Quando o dipolo é movido para uma distância diferente, o fluxo resultante deve continuar o mesmo, portanto, um dipolo imagem deve cancelar esse segundo fluxo e outro deve gerar o mesmo fluxo original. Desse modo, haverá um dipolo imagem de sentido oposto na posição **-b** e outro, de mesmo sentido, na posição **-a**.



Força de repulsão entre os dipolos em **b** e em **-b**:

$$F_{bb} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(2b)^4} \quad (6)$$

Força de atração entre os dipolos em **b** e em **-a**:

$$F_{ba} = -\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(b+a)^4} \quad (7)$$

Força resultante do sistema:

$$F_r = F_{bb} + F_{ba} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{(2b)^4} - \frac{1}{(a+b)^4} \right] \quad (8)$$

É interessante analisar o caso  $b = a + \delta$ , onde  $\delta \ll a$ :

$$F_r = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi 16a^4} \left[ \left( 1 + \frac{(-4)\delta}{a} \right) - \left( 1 + \frac{(-4)\delta}{2a} \right) \right] \quad (9)$$

$$F_r = -\frac{3\mu_0 m^2}{16\pi a^5} \delta \quad (10)$$

É possível identificar que a força resultante é na verdade uma força restauradora linear em torno da posição de equilíbrio, ou seja, o equilíbrio é de fato estável.

E. O que era necessário para ganhar pontos?

A pontuação da questão foi disposta da seguinte maneira:

#### 1.5 Reconhecimento da natureza do problema

- Reconhecer o efeito de prisão do fluxo (1.0 pt)
- Reconhecer que a prisão do fluxo gera um problema de valor sobre o contorno (0.5 pt)

4.0 Reconhecer que o problema de valor sobre o contorno necessita de dois dipolos imagem

- **Primeiro dipolo imagem** que gera o campo magnético original na malha (0.5 pt)

- Localização correta (0.5 pt)

- Magnitude correta (0.5 pt)

- Orientação correta (0.5 pt)

- **Segundo dipolo imagem** que cancela o novo campo magnético (0.5 pt)

- Localização correta (0.5 pt)

- Magnitude correta (0.5 pt)

- Orientação correta (0.5 pt)

#### 2.0 Determinar a força entre dois dipolos

- Determinar o campo magnético a certa distância (1 pt)

- Determinar a força em um dipolo em um campo não uniforme (1 pt)

#### 2.5 Determinar a força entre um dipolo físico e a malha

- Magnitude e direção correta da força com o primeiro dipolo imagem (1 pt)

- Magnitude e direção correta da força com o segundo dipolo imagem (1 pt)

- Magnitude e direção da força resultante (0.5 pt)