# Solução T3 IPhO 2017 – Lucas Shoji

## A1

Considerando uma massa $m$ na borda da esfera, usando as leis de Newton:

$$m\ddot{R}(t) = -GM_S m/R^2(t)$$

onde $M_S$ é a massa dentro da esfera.

Sabemos que para forças desse tipo vale a conservação de energia:

$$-\frac{GM_s}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t)}{2} = C$$

Fazendo $M_s = 4\pi R^3(t)\rho(t)/3$ e $\dot{R} = \dot{a}R_S$, temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{2C}{R_S^2 a^2(t)}$$

Comparando, identificamos $A_1 = 8\pi G/3$.

## A2

Primeira lei da termodinâmica em um sistema adiabático:

$$dE = -pdV + dQ = -pdV \Rightarrow \dot{E} + p\dot{V} = 0$$

Para uma esfera, $\dot{V} = \dot{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)} = 4\pi R^2\dot{R} \Rightarrow \dot{V} = \frac{3\dot{a}}{a}$ e $E = \rho(t)V(t)c^2$.

Logo, $\dot{E} = \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\right)V(t)c^2 = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$

Assim, $A_2 = 3$.

## A3

Substituindo $\mathrm{p} = w\rho(t)c^2$ na expressão do item anterior:

$$\dot{\rho} + 3\rho(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow \int\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\int\frac{da}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(w+1)}$$

(i) No caso da radiação, $E_r \propto \lambda^{-1} \Rightarrow E_r \propto a^{-1}$. Também, $V \propto a^3$.

$$\rho_r = \frac{E_r}{V} \Rightarrow \rho_r \propto a^{-4} \Rightarrow -3(w_r+1) = -4 \Rightarrow w_r = 1/3$$

(ii) No caso da matéria não relativística, a energia não muda com o $a$

$$\rho_m = \frac{E_m}{V} \Rightarrow \rho_m \propto a^{-3} \Rightarrow w_r = 0$$

(iii) Quando a densidade de energia é constante, $\rho_\Lambda \propto a^0 \Rightarrow w_\Lambda = -1$

## A4

Quando $k = 0$, a equação $(1)$ se torna $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)$.

(i) Para a radiação, $\rho_r \propto a^{-4} \Rightarrow \rho_r a^4 = \rho_{r0}a_0^4 \Rightarrow \rho_r = \rho_{r0}a^{-4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a\dot{a} = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int a\,da = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}} t \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 + C = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}} t$$

Como $a(t = 0) = 0$, substituindo, $C = 0$. Assim,

$a(t) = 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a(t) = (2H_{0r})^{\frac{1}{2}}\, t^{\frac{1}{2}}$ onde $H_{0r} = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Analogamente, $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$ e $a(t) = \left(\frac{3H_{0m}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}$ onde $H_{0r} = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(iii) Como $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \Rightarrow \dot{a} = a\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{a}{a_0} = e^{H_{0\Lambda}(t-t_0)} \Rightarrow a = e^{H_{0\Lambda}(t-t_0)}$

onde $\mathrm{H}_{0\Lambda} = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda\right)^{\frac{1}{2}}$

## A5

Substituindo $A_1 = \frac{8\pi \mathrm{G}}{3} \Rightarrow \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

Como $\rho = \Omega\rho_c$ e $H = \dot{a}/a$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\Omega\rho_c - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)} \Rightarrow H^2 = H^2\Omega - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} \Rightarrow k = \left(\frac{R_0 aH}{c}\right)^2 (\Omega - 1)$$

## A6

$\left(\frac{R_0 aH}{c}\right)^2 > 1 \Rightarrow (\Omega - 1)$ decide o sinal de $k$.

$\Omega > 1 \Rightarrow k = +1$, $\Omega < 1 \Rightarrow k = -1$, $\Omega = 1 \Rightarrow k = 0$.

## B1

Como $\Omega - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2}\frac{1}{\dot{a}^2}$,

Radiação: $a \propto t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{a} \propto t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \Omega - 1 = \bar{k}t$

Matéria: $a \propto t^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \dot{a} \propto t^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \Omega - 1 = \bar{k}' t^{\frac{2}{3}}$

## B2

Nesse caso, $a = e^{Ht} \Rightarrow \dot{a} = He^{Ht}$.

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2}\frac{1}{\dot{a}^2} \Rightarrow \Omega - 1 = \frac{k'}{H^2} t^{-2Ht}$$

## B3

Na fase de expansão,

$$\rho \propto a^0 \Rightarrow w = -1 \Rightarrow p = w\rho c^2 < 0$$

$$\dot{a} = He^{Ht} \Rightarrow \ddot{a} = H^2 e^{Ht} > 0$$

$$\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt} = \frac{d(Ha)}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0$$

B4

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2H^2} = \frac{1}{a}(\epsilon - 1) < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$$

C1

Diferenciando a equação (4) e usando a equação (3):

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\dot{\phi}\right] = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[-3H\dot{\phi}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{H} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{M_{pl}^2} \Rightarrow \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2H^2}$$

Equação 4 e assumindo $\dot{\phi}^2 \ll V$: $H^2 \approx \frac{V}{3M_{pl}}$.

Aproximação slow-roll: $3H\dot{\phi} \approx -V'$.

Com isso, $\epsilon \approx \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2$.

Diferenciando a equação (4): $3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}$ e usando $3H^2 \approx V/M_{pl}^2$:

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V''}{3H^2} - \epsilon \Rightarrow \eta_V = \delta + \epsilon \approx M_{pl}^2\frac{V''}{V}$$

$$dN = Hdt = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)d\phi \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right)d\phi \Rightarrow \frac{dN}{d\phi} \approx= \frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right)$$

D1

A inflação termina quando $\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = 1$.

Substituindo $V$ e $V'$:

$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left[\frac{n}{\phi_{final}}\right]^2 = 1 \Rightarrow \phi_{end} = \frac{n}{\sqrt{2}}M_{pl}$

$$\frac{dN}{d\phi} = -\frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right) \Rightarrow N = -\left[\frac{\phi}{M_{pl}}\right]^2\frac{1}{2n} + \mathrm{C}$$

$$N(\phi = \phi_{final}) = 0 \Rightarrow C = \frac{n}{4} \Rightarrow N = -\left[\frac{\phi}{M_{pl}}\right]^2\frac{1}{2n} + \frac{n}{4} \Rightarrow \left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{n^2}{2} - 2Nn$$

$$\eta_V = M_{pl}^2\frac{V''}{V} = n(n-1)\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{2(n-1)}{n-4N}$$

$$\epsilon = \frac{n^2}{2}\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{n}{n-4N} \Rightarrow r = 16\epsilon = \frac{16n}{n-4N}$$

$$n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon = 1 - \frac{2(n+2)}{n-4N}$$

Verificando a condição $n_s = 0.968$, chegamos em $n = -5.93$, o que substituído na equação de $r$ dá $r > 0.12$. Logo, não há número inteiro $n$ próximo que respeitem as observações.