Ex. 3 - EuPhO 2019

Ian Seo Takose

Water Hose (Ex. 3 - EuPhO 2019)

Um jato d'água sai do bico de uma mangueira com velocidade constante v_0. Uma criança brinca com a mangueira, balançando-a aleatoriamente em uma vertical fixada no plano x-y. O bico é mantido em $x = y = 0$m, e o ângulo entre o seu eixo e a horizontal nunca é menor que 45°. A cada instante, o jato possui um formato irregular. A curva em um instante qualquer é mostrado abaixo.
Usando a imagem, determine v_0 dado que a aceleração da gravidade vale g=9,8m/s^2

Water Hose (Ex. 3 - EuPhO 2019)

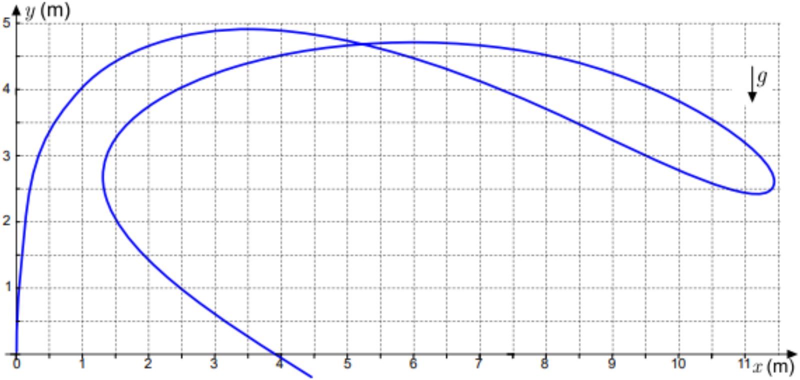

Figura 1: Formato do jato d'água em um instante qualquer.

Região Alcançável

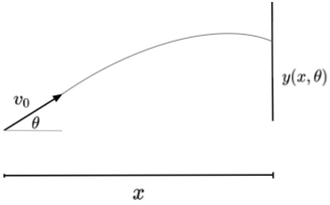

Figura 2: Altura máxima atingida na parede para x e v_0

Decompondo a velocidade:

$$v_x = v_0 cos\theta \quad v_{0y} = v_0 sen\theta$$

O tempo para chegar até a parede será dado por:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta} \quad (1)$$

Sabemos que y(t) é:

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

Substituindo (1):

$$y(x,\theta) = xtg\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\theta} \quad (2)$$

Região Alcançável

Agora, fixando a parede em x, podemos derivar em relação à θ e igualar a 0, para encontrarmos o seu máximo.

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{x}{cos^2\theta} - \frac{gx^2 tg\theta}{v_0^2 cos^2\theta} = 0$$

O que nos dá:

$$tg\theta = \frac{v_0^2}{gx} \quad (3)$$

Por fim, trocando em (2):

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

Propriedades de Parábolas

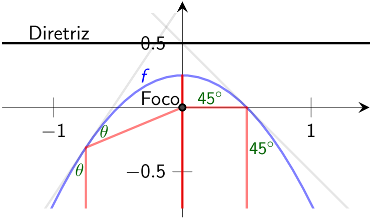

Figura 3: Reflexão de raios verticais.

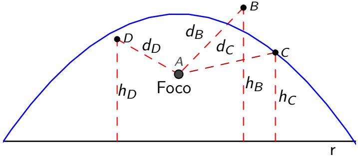

Figura 4: Posição de um ponto em relação à parábola.

i. Raios verticais são refletidos para o foco (Figura 3)
ii. Parábolas são o conjunto de pontos que equidistam uma reta (**diretriz**) e um ponto (**foco**)
iii. Vale a relação $d_D + h_D < d_C + h_C < d_B + h_B$, para qualquer reta horizontal r abaixo do foco (Figura 4)

Voltando ao exercício...

- Pela equação (3), podemos afirmar que todo lançamento irá tangenciar a parábola de segurança a uma distância $x = \frac{v_0^2}{g tg\theta}$, que, para θ<45°, é fácil de verificar que ocorre em y<0
- Existe somente um ponto P do jato d'água tocando a parábola de segurança.
- P possui a maior soma $y + \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x_P = 10,8m$ e $y_P = 3,3m$
- $2H_{max} = y_P + \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \approx 14,6m$
- Por fim,

$$v_0 = \sqrt{2H_{max}g} \approx 12m/s$$