# A Lei de Hubble e a Homogeneidade do Universo

(The Hubble law and the homogeneity of the Universe)

Fernando Kokubun
*Departamento de Física, Universidade do Rio Grande*
*Caixa Postal 474, Rio Grande, RS, CEP 96201-900, Brazil*
*e-mail: kokubun@calvin.ocfis.furg.br*

Recebido em 16 de junho, 1998

Nesse texto apresentamos uma simples demonstração de que se as galáxias estão afastando da Via Láctea de acordo com a lei de Hubble, então o Universo deve ser homogêneo e isotrópico para qualquer observador. Para isso utilizamos apenas álgebra de vetores, de maneira que pode ser aplicada facilmente a um curso introdutório de cosmologia em cursos de graduação.

In this work we present a simple proof that once the Hubble law is valid, the Universe is isotropic and homogeneous. For this purpose we use only simple vector algebra, such that it is adequated to undegraduated courses.

## I Introdução

Ao apresentarmos um curso introdutório de cosmologia para alunos de graduação, uma das principais dificuldades é a de discutir de maneira concisa os modelos de Friedmann. A principal dificuldade decorre da formulação matemática da Relatividade Geral. Para evitar a utilização de todo aparato matemático de tensores, usualmente recorremos a uma formulação newtoniana [2], discutimos alguns dados observacionais[1] e comparamos com as previsões teóricas dos modelos de Friedmann. Apesar das vantagens pedagógicas desse tipo de aproximação, muitos pontos se mantém obscuros. Em particular dúvidas relativas a homogeneidade e isotropia do Universo são frequentes. Por exemplo, a validade da lei de Hubble como uma prova da expansão do Universo do ponto de vista de um observador na Via Láctea é aceita sem muita dificuldade. No entanto, que essa expansão é isotrópica para qualquer observador é muito mais difícil de ser aceita. Normalmente assumimos que uma discusão completa desse tipo de problema requer uma boa compreensão da Relatividade Geral, o que em geral causa uma certa decepção nos estudantes. E sem o conhecimento de Relatividade Geral, não fica claro ao estudante de que a lei de Hubble é uma consequência das propriedades do espaço-tempo, tal como estabelecido no Princípio Cosmológico: de que o Universo em grande escala e homogêneo e isotrópico. Demostrações como as apresentadas em [4] ou em [5] requerem um aparato matemático muito além do que é ensinado nos cursos de graduação. No entanto, em escalas de galáxias e aglomerados de galáxias utilizamos a cosmologia newtoniana sem grandes problemas [3], e a lei de Hubble é testada essencialmente nessas escalas (veja por exemplo alguns artigos reimpressos em [1]). Dessa forma esperamos que possamos utilizar a cosmologia newtoniana para apresentar uma prova simples de que sendo a lei de Hubble válida, o Universo deve ser homogêneo e isotrtópico para todos os observadores. E de fato podemos efetuar isso, utilizando apenas rudimentos de álgebra de vetores. É o que será feito a seguir.

## II A lei de Hubble e a expansão do Universo

Para o nosso trabalho assumiremos apenas que:

1 as galáxias estão se afastando da Via Láctea;

2 a velocidade de afastamento sendo linear com a velocidade[1].

No entanto não assumiremos a priori que a expansão é isotrópica.

Dessa forma, vamos considerar uma forma generalizada da lei de Hubble

$$\vec{v}_i = \Sigma_i(\vec{d}_i + \vec{\lambda}_i) \tag{1}$$

onde o subscrito $i$ indica uma galáxia arbitrária, $\vec{v}_i$ a sua velocidade de recessão, $\vec{d}_i$ a sua distância à Via Láctes,

[1] A hipótese de lineriadade não é crucial, no entanto devido a sua simplicidade torna a demosntração mais transparente.

$\vec{\lambda}_i$ um vetor e $\Sigma_i$ uma constante a serem determinadas. Utilizando essa lei de Hubble generalizada, a expansão pode ser diferente para distintas galáxias essa posível anisotropia sendo representada pelo vetor $\vec{\lambda}_i$.

O módulo da equação 1 é dado por

$$\begin{aligned} v_i &= \Sigma_i \left[ d_i^2 + \lambda_i^2 + 2\vec{d}_i \cdot \vec{\lambda}_i \right]^{1/2} && (2) \\ &= \Sigma_i \left[ 1 + \frac{\lambda_i^2}{d_i^2} + 2\frac{\vec{d}_i \cdot \vec{\lambda}_i}{d_i^2} \right]^{1/2} d_i && (3) \\ &\equiv H_i d_i. && (4) \end{aligned}$$

Dessa forma qualquer dependência angular e de posição fica contida na função $H_i$.

Consideremos agora duas galáxias arbitrárias $i, j$, respectivametne com velocidades de recessão $v_i, v_j$. Utilizando simples álgebra vetorial temos que

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i. \tag{5}$$

(Nós estamos assumindo uma geometria Euclidiana, que é uma boa aproximação em várias situações astrofísicas). Assim

$$v_{ij}^2 = v_i^2 + v_j^2 - 2v_i v_j \cos\phi_{ij} \tag{6}$$

onde $\phi_{ij}$ é o ângulo entre $v_i$ e $v_j$. Utilizando a equação 4 para $v_i$ e $v_j$ obtemos que

$$v_{ij}^2 = H_i^2 d_i^2 + H_j^2 d_j^2 - 2H_i H_j d_i d_j \cos\phi_{ij}. \tag{7}$$

Dessa equação temos de imediato que em geral $v_{ij}$ não é proporcional a distância $d_{ij}$ entre as galáxias $i$ e $j$. Sendo que módulo de $\vec{d}_{ij}$ é dado por

$$d_{ij}^2 = d_i^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos\xi_{ij}, \tag{8}$$

onde $\xi_{ij}$ é o ângulo entre os vetores $\vec{d}_i$ e $\vec{d}_j$

Para estabelecermos qual a condição necessária para que a velocidade de recesão $v_{ij}$ seja proporcional à distância, vamos mudar a origem do sistema de coordenadas da Via Láctea para uma outra galáxia, por exemplo a galáxia $i$. Nesse novo sistema de coordenadas, a Via Láctea possue uma velocidade $v_{\rm MW} = v_i = H_i d_i$. Qualquer outra galáxia $j$ que está se afastando da Via Láctea com velocidade $v_j = H_j d_j$, será então vista pelo observador $i$ com uma velocidade $\vec{v}_{ij}$. Notemos que a princípio não existe nenhuma razão para assumirmos que essa velocidade tenha a mesma forma funcional que a equação (1).

Sem perda de generalidade podemos escrever

$$\vec{v}_{ij} = g(\vec{d}_{ij}, q_{ij}) d_{ij} \vec{m}, \tag{9}$$

onde $\vec{m} = \vec{v}_{ij}/v_{ij}$ e $\vec{d}_{ij}$ é a distância entre as galáxias $i, j$ e $q_{ij}$ representa um conjunto genérico de parâmetros, que pode representar possíveis anisotropias na expansão e $g(\vec{d}_{ij}, q_{ij})$ é uma função arbitrária a ser determinada.

Dessa forma da equação 9 obtemos

$$v_{ij} = [g(\vec{d}_{ij}, q_{ij}] d_{ij} \equiv H_{ij} d_{ij}. \tag{10}$$

Na equação acima o fator $H_{ij}$ é uma função da distância e da orientação relativa das galáxias $i$ e $j$ e possíveis outros parâmetros[2].

Dessa forma a equação 7 se reduz para

$$H_{ij}^2 (d_i^2 + d_j^2 - 2d_i d_j \cos\xi_{ij}) = H_i^2 d_i^2 + H_j^2 d_j^2 - 2H_i H_j d_i d_j \cos\phi_{ij}. \tag{11}$$

Se a relação acima é válida para quaisquer pares de pontos então necessariamente obtemos que

$$\begin{aligned} H_i^2 &= H_{ij}^2 && (12) \\ H_j^2 &= H_{ij}^2 && (13) \\ H_i H_j \cos\phi_{ij} &= H_{ij}^2 \cos\xi_{ij}. && (14) \end{aligned}$$

Dessa forma $H_i^2 = H_j^2 = H_{ij}^2$ e

$$\frac{H_i}{H_j} = \frac{\cos\xi_{ij}}{\cos\phi_{ij}} = \pm 1. \tag{15}$$

Mas sabemos pelos dados observacionais que o Universo está se expandindo tal como visto pela Via Láctea, logo $H_i > 0$ para qualquer $i$ , assim $H_i = H_j > 0$ e $\xi_{ij} = \phi_{ij}$. Mas

$$H_i = \Sigma_i \left[ 1 + \frac{\lambda_i^2}{d_i^2} + 2\frac{\vec{d}_i \cdot \vec{\lambda}_i}{d_i^2} \right]^{1/2}, \tag{16}$$

deve ser independente da posição e orientação da galáxia. Isso somente será possível se $H_i$ for independente da distância. Isso so será obtido se $\vec{\lambda}_i = 0$ para qualquer $i$. Nesse caso obtemos que visto da Via Láctea, a expansão deve ser isotrópica.

Entretanto não temos nenhuma informação a respeito de $H_{ij}$. Sem essa informação, sabemos apenas que a expansão do Universo como visto da Via Láctea deve ser isotrópica, porque $H_i = H_j$. Portanto é importante obtermos alguma informação mais detalhada a respeito do sinal de $H_{ij}$. Se $H_{ij}$ é positivo para todo

[2] Note que $H_{ij}$ é uma função arbitrária, portanto $v_{ij}$ não é necessariamente proporcional a distância $d_{ij}$.

par $i, j$ então a expansão do Universo será homogênea enquanto a expansão será não homogenea se $H_{ij} < 0$ pelo menos para um par $i, j$.

Vamos considerar a velocidade relativa entre duas galáxias arbitrárias $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i$. Até o momento obtivemos que $\vec{v} = H\vec{r}$ para qualquer galáxia em relação à Via Láctea. O que precisamos mostrar agora é a igualdade $\vec{v}_{ij} = H\vec{d}_{ij}$. Para isso vamos considerar o produto

$$\vec{v}_j \cdot \vec{d}_{ij} = \vec{v}_j \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i). \tag{17}$$

O lado esquerdo da equação (17) pode ser reescrito como $\vec{v}_j \cdot \vec{d}_{ij} = (\vec{v}_{ij} + \vec{v}_i) \cdot \vec{d}_{ij}$ e o lado direito como $\vec{v}_j \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i) = H(d_j^2 - \vec{d}_j \cdot \vec{d}_i)$. Logo, obtemos que

$$\vec{v}_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} = H(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i) \tag{18}$$

logo $\vec{v}_{ij} = H\vec{d}_{ij}$, o que finaliza a nossa demonstração.

Com isso obtemos que se o Universo é isotrópico visto da Via Láctea e que a taxa de expansão é apenas função da distância o Universo deve ser isotrópico em todos os pontos, isto é, deve ser homogêneo.

# III Comentários Finais.

O ponto crucial da demonstração apresentada está na hipótese de que a equação 11 deve valer para qualquer distância $d_i$. Ao assumirmos que todos os pontos no espaço são equivalentes, já estamos estabelecendo que o espaço é homogêneo e isotrópico (Esse ponto é exatamente o que é estabelecido pelo Princípio Cosmológico.) É a partir dessa hipótese que obtemos as relações 12 a 14. Notemos que em nenhum momento foi necessário considerar qualquer lei de gravitação (apesar de termos assumido desde o começo que estamos trabalhando com uma cosmologia baseada na lei de gravitação Universal de Newton). Isso é um indício de que a lei de Hubble deve ser uma consequência direta das propriedades do espaço-tempo. De fato, podemos obter a lei de Hubble apenas com as propriedades da métrica do espaço-tempo (como é feito por exemplo em [5]). Portanto a lei de Hubble não depende por exemplo da validade da Teoria da Relatividade Geral ou da Gravitação Universal de Newton.

Esse trabalho foi parcialmente financiado pela FAPERGS (Fundação de Amparo a Pesquisa do Rio Grande do Sul).

# References

[1] Kolb, E.M e Turner, M.S. *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley, 1988.

[2] Lazyer, D. 1954, *Astron.J.* **59** (1954) 268; veja também Bondi, H., *Cosmology*, Cambridge University Press, 1952.

[3] Peebles, P.J., *Large-Scale Structure of The Universe* , Princeton University Press, 1980.

[4] Wald, R. *General Relativity*, Chicago University, 1984.

[5] Weinberg,S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, 1972.