

Segunda Prova Seletiva Olimpíadas Internacionais de Física

Sociedade Brasileira de Física

14/12/2019

Caderno de Questões - Teoria

Instruções:

1. Este caderno de questões contém QUATRO folhas, incluindo esta com as instruções. Confira antes de começar a resolver a prova.
2. A prova é composta por TRÊS questões. Cada questão tem o valor indicado no seu início. A prova tem valor total de 100 pontos.
3. Use as Folhas de Resposta fornecidas para as resoluções. Em cada página, identifique o número da questão que está sendo respondida na posição indicada no cabeçalho da página. Use somente a parte da frente das folhas de resposta na resolução, o verso poderá ser utilizado para rascunhos. item A limpeza e a clareza das respostas serão levadas em consideração.
4. As Páginas de Rascunho devem ser identificadas como tal e não serão levadas em consideração.
5. É permitido apenas o uso de calculadora não programável, Casio fx-82MS, HP10s + ou similar.
6. Este caderno deve ser devolvido ao final da prova juntamente com as folhas de respostas e de rascunhos dentro do envelope disponível sobre sua mesa.
7. O estudante deverá permanecer na sala, no mínimo, 90 minutos.
8. A prova tem duração de QUATRO HORAS.

QUESTÕES

Questão 1: No modelo de Van der Waals para um gás não ideal a equação de estado é dada por

$$\left(P - \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (1)$$

onde P é a pressão do gás, V é o volume total do gás, T é a temperatura, e a e b são constantes. A constante b está relacionada ao fato de que, no gás não ideal, as moléculas tem um volume não desprezível, e o volume ocupado por elas deve ser subtraído do volume total disponível. O diagrama P vs V mostrado na figura ilustra a forma geral da curva representada por uma isoterma. Fisicamente, porém, Maxwell mostrou que a isoterma real para $T < T_c$, sendo T_c uma temperatura crítica, é obtida substituindo-se por uma linha reta a pressão constante a região em que aparecem os extremos locais nessa curva. A pressão correspondente é tal que as áreas acima e abaixo da reta são iguais. À medida em que a temperatura aumenta, o intervalo de volume em que o sistema se encontra à mesma pressão para uma dada isoterma diminui, e para $T = T_c$ o intervalo se reduz a apenas um ponto, chamado ponto crítico.

- Determine as constantes a e b em termos de T_c e P_c .
- Sabendo que para a água $T_c = 647$ K e $P_c = 2.2 \times 10^7$ Pa, e considerando que o gás tem N_A moléculas, sendo N_A o número de Avogadro, e que o diâmetro de cada molécula é d . determine o diâmetro da molécula de água.

Solução: Da equação de estado temos $PV^3 - (bP + RT)V^2 - aV + ab = 0$. O ponto crítico se dá quando a solução dessa equação é uma raiz tripla, isto é $P_c(V - V_c)^3 = 0$. Expandindo-se esta expressão e comparando-se as duas equações para $P = P_c$, segue que

$$\begin{cases} a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c} \\ b = \frac{RT_c}{8P_c} \end{cases} \quad (2)$$

Sendo $b = (4\pi/3)(d/2)^3$, segue que

$$d = \left[\frac{3RT_c}{4\pi P_c}\right]^{1/3} = 4 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (3)$$

Questão 2: Estrelas de nêutron são objetos do universo que são muito massivos e podem apresentar elevadas velocidades de rotação, e por isso assumem uma forma ligeiramente oblata (achatada nos polos), caracterizada pela excentricidade, ϵ , definida por

$$\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (4)$$

onde R_e e R_p são, respectivamente, os raios da estrela nos pólos e no equador. Sendo T o período de rotação da estrela, M a sua massa e a o seu raio médio, determine a excentricidade.

Solução: Para um volume de massa m na superfície da estrela, temos que a energia potencial é

$$U_P = \frac{GMm}{r} \quad (5)$$

e a energia cinética é

$$U_C = (1/2)m\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (6)$$

Na superfície da estrela devemos ter $U_P - U_C$ constante. Sendo $\varphi = 0$ no equador e $\varphi = \pi/2$ no polo, temos

$$\frac{GMm}{r_p} = \frac{GMm}{r_e} + (1/2)m\omega^2 r_e^2, \quad (7)$$

de onde segue que

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}. \quad (8)$$

Substituindo este resultado na equação da excentricidade, temos

$$\epsilon = \frac{1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM} - 1}{1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}}. \quad (9)$$

Como a massa das estrelas de nêutrons é muito grande e seu raio é de apenas algumas dezenas de quilômetros, a excentricidade pode ser aproximada para

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}. \quad (10)$$

Questão 3: Os elétrons de um átomo se distribuem em torno do núcleo de modo que a densidade linear de carga é $\rho(\mathbf{r}) = \sigma_o r^2 e^{-r/R}$, sendo σ_o e R constantes características do átomo. Determine:

- O potencial elétrico correspondente à nuvem eletrônica em todo o espaço.
- O campo elétrico devido à carga negativa em todo o espaço.
- A energia total associada ao campo eletrônico.

Considere que ϵ_o é a impermeabilidade elétrica do vácuo, que

$$\int x^2 e^{-x} dx = -(2 + 2x + x^2)e^{-x}, \quad (11)$$

e que o gradiente em coordenadas esféricas é

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{\varphi}. \quad (12)$$

Solução: Aplicando a Lei de Gauss numa superfície esférica imaginária S_r de raio r , temos

$$\int_{S_r} R_r dS_r = 4\pi r^2 E_r = Q(r)/\epsilon_o, \quad (13)$$

e portanto

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_o}{4\pi\epsilon_o} e^{-r/R} \hat{\mathbf{r}}. \quad (14)$$

Usando o gradiente em coordenadas esféricas, temos $\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} = -E_r$, e portanto

$$\varphi(r) = -\frac{\sigma_o R}{4\pi\epsilon_o} e^{-r/R}. \quad (15)$$

Usando (do formulário) $\rho_E = (\epsilon_o/2)E^2$ temos

$$E_T = \frac{\epsilon_o}{2} \int dr \left(\frac{\sigma_o R}{4\pi\epsilon_o} \right)^2. \quad (16)$$

Usando a fórmula dada $\int x^2 e^{-x} dx = -(2 + 2x + x^2)e^{-x}$, segue

$$E_T = \frac{\sigma_o^2 R^3}{32\pi\epsilon_o}. \quad (17)$$

Questão 4: Uma mangueira emite um jato de água a velocidade de escape v_o . O bico da mangueira, de tamanho desprezível comparado com as distâncias relevantes neste problema, é fixado na origem do sistema de coordenadas, e pode se movimentar apenas num plano vertical mudando o ângulo de inclinação com a horizontal, θ . No instante $t = 0$ a torneira é ligada e a água começa a sair do bico da mangueira. Sabe-se que em algum momento enquanto lança água a mangueira passa pela posição $\theta = \pi/4$. Decorrido um tempo $t = t_f$ a primeira porção de água lançada pela mangueira toca o solo, e nesse instante uma fotografia do jato de água mostra sua disposição como mostrado na figura. O trecho AB é uma parábola, e o trecho OA é uma reta vertical. (a) Qual a posição inicial, θ_o , do bico da mangueira? (b) Qual a sua posição final? (c) Qual o instante t_f em que a fotografia é feita? (d) Qual a equação que descreve a velocidade angular $\dot{\theta}$ do movimento realizado nesse intervalo de tempo pelo bico da mangueira, em função de v_o e g ?

Solução: O problema pode ser resolvido reconhecendo que no instante t em que a primeira porção de água atinge o solo, como foi emitido a um ângulo $\theta - \pi/4$ este corresponde a um ponto da parábola de segurança. Por outro lado, quanto a parábola BC atinge o eixo vertical, este também corresponde ao ponto de alcance máximo, já que não há água em pontos superiores àquele na figura. Assim, a parábola de segurança corresponde à parábola BC .

A equação da parábola de segurança pode ser obtido a partir da equação geral do movimento balístico,

$$y(x, \theta) = xt g \theta - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \theta}, \quad (18)$$

e maximizando a altura y para um valor arbitrário x , de modo que

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = x \sec^2 \theta - \frac{g x^2}{v_o^2} \operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta = 0, \quad (19)$$

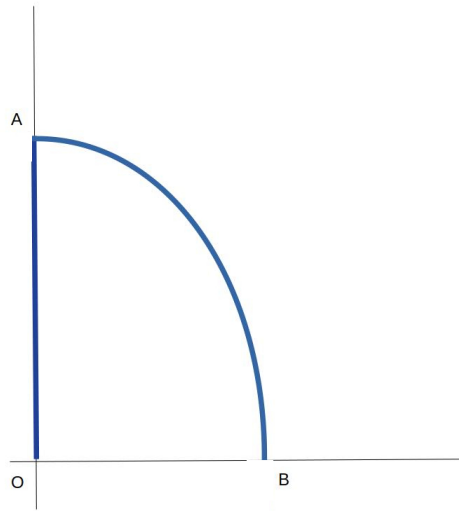


Figura 1: Problema 4: Aspecto do jato de água lançado por uma mangueira como fotografado no instant t .

de onde segue que o ângulo de lançamento para que se atinja o ponto da parábola de segurança na coordenada x é

$$xtg\theta = \frac{v_o^2}{g}. \quad (20)$$

Com esta condição sendo usada na equação geral da trajetória, obtemos a equação da parábola de segurança,

$$y_s(x) = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{g}{2v_o^2}x_s^2. \quad (21)$$

O instante t pode ser obtido calculando o tempo necessário para que a porção de água lançada a $\theta = \pi/2$ demora para atingir novamente o solo, e resulta $t = 2v_o/g$. A posição final da mangueira é a vertical, e o tempo em que ela permanece nessa posição, até o momento da figura, é $t' = v_o/g$, que corresponde ao tempo gasto pela primeira porção de água lançada verticalmente atingir o ponto máximo.

A parábola AB na figura é formada por porções de água lançadas em instantes τ diferentes, e o tempo de percurso dessas porções de água é $t - \tau$, e foram lançadas a ângulos θ_τ diferentes. As equações horárias das coordenadas x e y ficam

$$\begin{cases} x(t - \tau) = v_o \cos \theta_\tau (t - \tau) \\ y(t - \tau) = v_o \sin \theta_\tau (t - \tau) - (g/2)(t - \tau)^2, \end{cases} \quad (22)$$

e portanto a equação da trajetória do jato pode ser escrita na forma

$$y(x) = xt g \theta_\tau - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \theta_\tau}. \quad (23)$$

Como $\cos^{-2} \theta_\tau = 1 + tg^2 \theta_\tau$, temos

$$y(x) = xt g \theta_\tau - \frac{g}{2v_o^2} [x^2 + (xt g \theta_\tau)^2], \quad (24)$$

de onde segue que

$$y(x) = [xt g \theta_\tau - \frac{g}{2v_o^2} (xt g \theta_\tau)^2] - \frac{gx^2}{2v_o^2}. \quad (25)$$

Comparando esta equação com a equação da parábola de segurança, temos

$$xt g \theta_\tau = \frac{v_o^2}{g}, \quad (26)$$

e como $x = v_o \cos \theta_\tau (t - \tau)$, segue que

$$\text{sen} \theta_\tau = \frac{v_o}{g(t - \tau)}, \quad (27)$$

expressão que descreve como deve variar o ângulo de lançamento da água em função do tempo, τ .

Como o intervalo de tempo para uma porção de água emitida no ângulo $\pi/4$ atingir o ponto correspondente na parábola de segurança é $\delta t = \sqrt{2}(v_o/g)$, e como o correspondente intervalo de tempo para aporção de água emitida no ângulo $\pi/2$ é $\delta t = v_o/g$, o ângulo inicial de lançamento deve ser $\pi/4$, e portanto o instante t em que a fotografia é registrada deve ser $t = \sqrt{2}(v_o/g)$. Assim, temos

$$\text{sen} \theta_\tau = \frac{v_o}{g[\sqrt{2}(v_o/g) - \tau]}. \quad (28)$$

O instante em que o bico da mangueira atinge a posição vertical é quando

$$\text{sen} \theta_\tau = 1 = \frac{v_o}{g[\sqrt{2}(v_o/g) - \tau]}, \quad (29)$$

de onde resulta que

$$\tau_{\pi/2} = \frac{v_o}{g} (\sqrt{2} - 1). \quad (30)$$

Daqui se vê que à medida que τ aumenta o denominador diminui e temos maiores valores de $\text{sen} \theta_\tau$. Assim, a posição inicial da mangueira, em $\tau = 0$, deve ser $\theta_o = \pi/4$ e a posição final em $\theta_f = \pi/2$. Como a fotografia é obtida quando a porção de água lançada a $\pi/4$ toca o solo, temos $t_f = \sqrt{2}v_o/g$, e a mangueira atinge a vertical em $\tau = \sqrt{2}v_o/g - v_o/g$.

Questão 5: Isaac Newton já observava anéis de interferência ao encostar uma lente de pouca curvatura contra um vidro plano. No reflexo, uma sequência de cores aparecia e no centro, apenas uma franja escura. Em uma lâmina de sabão vemos as mesmas sequências de cores, mas com luz refletida em vidros, não. Um interferômetro é feito separando em duas partes a luz de uma mesma fonte, geralmente por meio da reflexão na face de uma lâmina, desconsiderando a outra (divisão de feixe por amplitude da onda). Elas são recombinadas depois e, dependendo da diferença de caminho percorrido, obtém-se as franjas. Mas, com luz branca, um interfereômetro como o de Michelson somente consegue gerar franjas quando o caminho ao longo de um braço difere somente uns sete micrômetros do caminho ao longo do outro braço. Com lâmpadas de gás de sódio ou de mercúrio de pressão mais baixa que as de iluminação de rua se consegue obter interferência em caminhos pouco menores que 1m. Nesses casos a luz sai com cor amarela ou verde, respectivamente. Com alguns lasers se consegue interferência com diferenças de caminho de muitos metros. Isto depende da largura de banda, ou seja, a diferença entre os valores extremos dos comprimentos de onda. (c.d.o.).

Modelando uma radiação luminosa de banda larga a um caso simplificado onde a consideramos como composta de somente dois valores extremos de c.d.o., encontre qual é a diferença de caminho máxima que pode-se ter em um interferômetro em que possam se ver franjas?

Resposta: Na diferença de caminho L entra um certo número N de c.d.o. do valor menor, λ_1 , suponhamos ele inteiro, temos então:

$$N = \frac{L}{\lambda_1}, \quad (31)$$

ou seja, que essa onda interferirá construtivamente. A diferença do número de c.d.o. que entra para o c.d.o. máximo, o λ_2 , sendo um valor próximo da metade dele, vai resultar em um encontro de uma parte da onda defasada a respeito da outra. Sendo essa diferença meio comprimento de onda, elas vão se anular em interferência destrutiva. Assim, vendo a situação simultânea para um e outro c.d.o. percorrendo o mesmo caminho, temos:

$$N\lambda_1 = N\lambda_2 - \lambda_2/2, \quad (32)$$

ou seja, quando uma brilha, a outra escurece. Ir mudando o caminho, só vai mudar quem brilha e quem não, mas, em média, a intensidade não vai passar por máximos e mínimos. Resulta assim de (32):

$$N(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{2} \quad (33)$$

então

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{2N}. \quad (34)$$

Então $L = \lambda_1\lambda_2/(2\Delta\lambda)$, onde $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ é um valor limite do caminho que pode ser percorrido pelas duas radiações gerando interferência. Como os comprimentos de onda são próximos, se nos referirmos a um valor médio, seria: $L = (\lambda_2/2\Delta\lambda)$ Nos textos temos um valor duas vezes maior, mas trata-se de uma largura de banda

contínua e de um critério para indicar quando o contraste das franjas diminui significativamente. Dando alguns valores, veríamos exemplos práticos de luz podendo ser usada em casos de interferência.

Questão 6: Um anel supercondutor fino (resistência zero) é segurado acima de uma barra cilíndrica magnética, como mostrado na figura abaixo. O eixo da simetria do anel é o mesmo daquele da barra. O campo magnético simetricamente cilíndrico em torno do anel pode ser descrito aproximadamente em termos das componentes do vetor campo magnético como $B_z = B_o(1-\alpha z)$ e $B_r = B_o\beta r$, onde B_o , α e β são constantes, e z e r são as coordenadas de posições verticais e radiais, respectivamente.

Inicialmente, o anel não tem corrente fluindo nele. Quando é solto, ele começa a se mover para baixo com seu eixo ainda na vertical. A partir dos dados abaixo, determine: (a) Como o anel se move nos momentos subsequentes? (b) Que corrente flui no anel?

Dados:

- Propriedades do anel: massa $m = 50\text{ mg}$, Raio $r_o = 0,5\text{ cm}$, Indutância $L = 1.3 \times 10^{-8}\text{ H}$.
- Coordenadas iniciais do centro do anel: $z_o = 0$ e $r = 0$.
- Constantes do campo magnético: $B_o = 0.01\text{ T}$, $A = 2\text{ m}^{-1}$ e $B = 32\text{ m}^{-1}$.

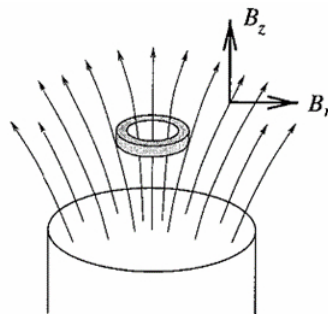


Figura 2: Campo magnético atravessando anel condutor.

Solução: O fluxo magnético total na posição do anel é devido a duas partes: o campo magnético externo e aos efeitos da auto-indução,

$$\Phi = B_z \pi r_o^2 + LI. \tag{35}$$

Qualquer mudança no fluxo magnético induz uma corrente no anel de acordo com

$$RI = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{36}$$

Entretanto, isto deve ser igual a zero já que a resistência ôhmica de um anel supercondutor é nula. De acordo, o fluxo magnético através do anel deve ser constante, i.e.

$$\Phi = B_o(1 - \alpha z)\pi r_o^2 + LI = const. \tag{37}$$

A partir das condições iniciais ($z = 0, I = 0$), o valor da constante é $\Phi = B_o \pi r_o^2$. A corrente no anel pode ser determinada usando as equações acima o que fornece

$$I = \frac{B_o}{L} \alpha \pi r_o^2 z. \quad (38)$$

A força de Lorentz agindo no anel (a qual só pode ser vertical, devido a simetria do sistema) pode ser expressa como

$$F_z = -B_r I(z) 2\pi r_o = -\frac{B_o \beta 2\pi^2 r_o^3}{L} z = -kz. \quad (39)$$

A força de Lorentz é portanto diretamente proporcional ao deslocamento vertical do anel com o coeficiente de proporcionalidade calculável a partir dos dados fornecidos. (Este resultado é válido somente para pequenos deslocamentos, já que a indução magnética não é adequadamente descrita pelas formulas dadas para os deslocamentos grandes).

A equação do movimento do anel é

$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg. \quad (40)$$

Isto significa que o anel realiza oscilações harmônicas em torno da posição de equilíbrio $z_o = -mg/k$ com

$$z(t) - z_o = A \cos \omega t, \quad (41)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

(a) A partir das condições iniciais, $A = z_o$ e portanto

$$z(t) - z_o = \frac{gz_o}{\omega^2} (\cos \omega t - 1). \quad (42)$$

(b) A coordenada vertical não é nunca positiva, e segue-se que a força de Lorentz está sempre orientada para cima, sendo zero no ponto mais alto da oscilação. A corrente flui sempre na mesma direção em torno do anel. Substituindo os dados numéricos fornecidos dá $\omega = 31.2 \text{ s}^{-1}$ e $A = 1 \text{ cm}$. A dependência do tempo da corrente fluindo no anel pode ser expressa em termos de $z(t)$ como

$$I(t) = \frac{B_o \alpha \pi r_o^2 A}{L} [\cos(\omega t) - 1]. \quad (43)$$

O valor máximo da corrente, que flui no ponto mais baixo da oscilação, é $I_{max} = 39 \text{ A}$.

Questão 7: Uma pequena conta (bead) carregada pode deslizar num fio isolante circular, sem fricção. Um dipolo elétrico pontual é fixo no centro de um círculo com o eixo do dipolo fixo no plano do círculo. Inicialmente a conta está no plano de simetria do dipolo, como mostrado na figura. Ignore o efeito da gravidade, assumindo que as forças elétricas são muito maiores que a força gravitacional.

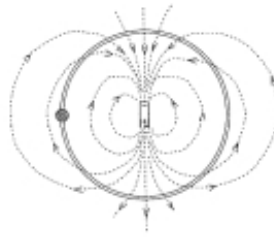


Figura 3: Figura mostrando uma conta ligada a um fio na presença de campo magnético.

- Como a conta se move após ela ser solta?
- Onde irá parar a conta pela primeira vez após ser solta?
- Como irá a conta se mover na ausência do fio?

Solução: Vamos aplicar a lei da conservação de energia para uma partícula de massa m e carga Q :

Podemos expressar a velocidade da conta com ângulo θ como

$$v = \sqrt{-2 \frac{QK}{mr^2} \cos\theta}, \quad (44)$$

para $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

O movimento circular requer uma força radial com a componente mv^2/r . A componente radial da força em uma carga unitária devido ao dipolo (isto é, o efeito da componente radial do campo elétrico) pode ser calculado como menos a derivada de um potencial elétrico com respeito a r ,

Usando a expressão anterior para velocidade, notamos que QEr é justamente igual a $-mv^2/r$, a força centrípeta requerida.

- A conta se move em círculo com velocidade v acima.
- Então o fio não precisa exercer qualquer força sobre a conta para sustentar o movimento circular. Se o fio não estivesse lá, a conta se moveria ao longo do passo circular até ela atingir o ponto oposto a posição de partida.
- A conta pararia naquele ponto, e então traçar o passo repetidamente, executando um movimento periódico.

Nota: A dependência temporal deste movimento é justamente o mesmo daquele de um pêndulo simples sujeito a gravidade após ser solto de um deslocamento de $\pi/2$.