Resolução - T3 IPhO 2013

Maria Eduarda Gonçalves Freitas

A Camada de Gelo da Groenlândia

3.1

Desprezando P_{atm} e assumindo válida pressão hidrostática:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{gelo} g$$

$$\int_{p(x,H(x))}^{p(x,z)} dp = -\rho_{gelo} g \int_{H(x)}^{z}$$

Onde, como $p(x, H(x)) = 0$, temos:

$$\boxed{p(x,z) = \rho_{gelo}\ g\ (H(x) - z)}$$

3.2

3.2a

Calculemos $F(x)$:

$$F(x) = \iint p(x,z)\ dydz$$

$$= \iint \rho_{gelo}\ g\ (H(x) - z) dydz$$

Como $H(x)$ não depende de y, podemos resumir a:

$$F(x) = \rho_{gelo}\ g\ \Delta y \left[\int_0^{H(x)} H(x) dz - \int_0^{H(x)} z\ dz \right]$$

$$= \frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ \Delta y H(x)^2$$

Como $H(x)$ diminui com x, a força na face vertical esquerda será maior do que na direita, e a força de atrito ΔF (que equilibrará essa diferença de forças) estará em $-\hat{x}$.

$$\Delta \vec{F} = -[\vec{F}(x + \Delta x) + \vec{F}(x)]$$

ou

$$\Delta F = -[F(x + \Delta x) - F(x)]$$

$$S_b \Delta x \Delta y = -\frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ \Delta y (H(x + \Delta x)^2 - H(x)^2)$$

$$S_b = -\frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ (H(x + \Delta x) + H(x))\ \frac{(H(x + \Delta x) - H(x))}{\Delta x}$$

No limite $\Delta x \to 0$:

$$S_b = -\frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ 2H(x)\ \frac{dH}{dx}$$

$$\boxed{S_b = -\ \rho_{gelo}\ g\ H(x)\ \frac{dH}{dx}}$$

Ou seja, se temos $S_b = kH\frac{dH}{dx}$, então:

$$\boxed{k = -\rho_{gelo} g}$$

3.2b

De **(3.2a)**:

$$S_b = -\ \rho_{gelo}\ g\ H(x)\ \frac{dH}{dx}$$

Seja $u = H(x)^2$. Segue que $\frac{du}{dx} = 2H(x)\frac{dH}{dx}$. Substituindo:

$$S_b = -\frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ \frac{du}{dx}$$

$$S_b \int_x^L dx = -\frac{1}{2}\ \rho_{gelo}\ g\ \int_{H(x)^2}^0 du$$

$$S_b(L-x) = \frac{1}{2}\rho_{gelo}\ g\ H(x)^2$$

$$\boxed{H(x) = \sqrt{\frac{2S_b(L-x)}{\rho_{gelo}\ g}}}$$

O que, como previsto, leva a $H_m \propto L^{\frac{1}{2}}$:

$$H_m = H(0) = \sqrt{\frac{2S_bL}{\rho_{gelo}\ g}}$$

3.2c

O volume da geleira será dado por:

$$V = 5L\int_{-L}^{L} H(x)dx$$

$$V = 5L \cdot 2\int_0^L \sqrt{\frac{2S_b(L-x)}{\rho_{gelo}\ g}}\ dx$$

Observemos que, no entanto, nos foi fornecido o resultado $\int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{3}$. Definamos $w = \frac{x}{L}$, de modo que $dx = L\ dw$ e

$$V = 10L\sqrt{\frac{2S_bL}{\rho_{gelo}\ g}}\int_0^1 \sqrt{1-w}\ L\ dw$$

$$V = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{2S_bL}{\rho_{gelo}\ g}}\ L^2$$

Temos $V \propto L^{\frac{5}{2}}$, e $A = 10L^2$ $(L \propto A^{\frac{1}{2}})$, logo:

$$\boxed{V \propto (A^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}} = A^{\frac{5}{4}} \implies \gamma = \frac{5}{4}}$$

3.3

Como a densidade do gelo é constante, conservar massa $\implies$ conservar fluxo:

$$\Phi_{sai} = \Phi_{entra}$$

$$c \cdot \Delta y \cdot x = v_x \cdot H_m \cdot \Delta y$$

E obtemos...

$$\boxed{v_x(x) = \frac{cx}{H_m}}$$

3.4

Da restrição que relaciona as componentes das velocidades de escoamento:

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx}$$

E de acordo com a equação para v_x em **(3.3)**, $\frac{dv_x}{dx} = \frac{c}{H_m}$:

$$\int_0^{v_z} dv_z = -\frac{c}{H_m} \int_0^z dz$$

$$\boxed{v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}}$$

3.5

Das expressões para v_x e v_y, e das condições de contorno:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{cx}{H_m} \implies \int_{x_i}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{c}{H_m} \int_0^t dt \implies \ln\frac{x}{x_i} = \frac{ct}{H_m}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \implies \int_{H_i}^{z} \frac{dz}{z} = -\frac{c}{H_m} \int_0^t dt \implies \ln\frac{z}{H_m} = -\frac{ct}{H_m}$$

Dividindo as equações:

$$\ln\frac{x}{x_i} = \ln\frac{H_m}{z}$$

$$\boxed{z = H_m \; x_i \frac{1}{x}}$$

3.6

Novamente, do obtido em **(3.4)**:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \implies ln\frac{z}{H_m} = -\frac{c}{H_m}\ \tau$$

$$\boxed{\tau(z) = \frac{H_m}{c} \cdot \ln\frac{H_m}{z}}$$

3.7

3.7a

Da relação em **(3.6)**, calculemos c_{ia} e c_{ig} a partir dos dados:

$$\tau(z) = \frac{H_m}{c} \cdot \ln\frac{H_m}{z}$$

$$c = \frac{H_m}{\tau} \cdot \ln\frac{H_m}{z}$$

Em que $H_m = 3060$ m, $z_{ia} = 3060 - 3040$ m, $z_{ig} = 3060 - 1492$ m, $\tau_{ia} = 120.000$ anos e $\tau_{ig} = 11.700$ anos.

$$c_{ia} = \frac{3060}{120.000} \cdot \ln\frac{3060}{3060-3040} \approx 0,128\frac{\text{m}}{\text{ano}}$$

$$c_{ig} = \frac{3060}{11.700} \cdot \ln\frac{3060}{3060-1492} \approx 0,175\frac{\text{m}}{\text{ano}}$$

$$\boxed{c_{ia} \approx 0,128\frac{\text{m}}{\text{ano}}}\ \boxed{c_{ig} \approx 0,175\frac{\text{m}}{\text{ano}}}$$

3.7b

Da figura **3.2(a)**, pode-se obter que $\Delta\delta \approx \frac{2}{3}\Delta T$ (coeficiente angular).

Em **3.2(b)**, $\Delta\delta \approx 8$, de forma que:

$$\Delta T = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12°C$$

$$\boxed{\Delta T = 12°C}$$

3.8

Do obtido em **(3.2c)**:

$$V = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{gelo}\ g}}\ \left[\frac{A_G}{10}\right]^{\frac{5}{4}}$$

Conservando a massa:

$$\rho_{gelo}\ V = \rho_{agua}\ A_O\ \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{20}{3\ A_O\ \rho_{agua}}\sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{gelo}\ g}}\ \left[\frac{A_G}{10}\right]^{\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{\Delta h \approx 8,79\ \text{m}}$$

3.9

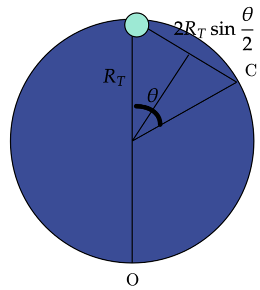

Figura 1: Esquema ilustrativo

Potencial sobre massa (U) num ponto a ângulo θ da Groenlândia:

$$U = -\frac{GM_T}{R_T + h} - \frac{GM_{gelo}}{2R_T \sin\frac{\theta}{2}}$$

Substituamos $G = \frac{gR_T^2}{M_T}$, e utilizemos que $h << R$:

$$U = -g\ R_T - gh - \frac{g\ R_T}{M_T}\frac{M_{gelo}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

U é constante em toda a superfície da água, permitindo isolar h:

$$h = \left[\frac{U}{g} + R_T\right] + \frac{R_T\ M_{gelo}}{2M_T \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Delta h' = \frac{R_T\ M_{gelo}}{2M_T}\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta_1}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{\theta_2}{2}}\right)$$

Calculando M_{gelo}, obtemos $3,168 \cdot 10^{18}$ kg, $R_T = \sqrt{\frac{A_E}{4\pi}}$ e $\theta_1 = \frac{3500\text{km}}{R_T} \approx 0.548$ rad (Copenhaga); por fim:

$$\Delta h' = h_{CPH} - h_{OPP} \approx 4,55 \text{ m}$$

$$\boxed{h_{CPH} - h_{OPP} \approx 4,55 \text{ m}}$$