

**Caderno de Questões – Teoria**

**Instruções**

1. Este caderno de questões contém **QUATRO** folhas, incluindo esta com as instruções. Confira antes de começar a resolver a prova.
2. A prova é composta por **QUATRO** questões. Cada questão tem o valor indicado no seu início. A prova tem valor total de **100 pontos**.
3. Use as **Folhas de Resposta** fornecidas para as resoluções, e coloquem **número das páginas** com identificação da questão. Use somente a parte da frente das folhas de resposta na resolução, o verso poderá ser utilizado para rascunhos.
4. As **Páginas de Rascunho** devem ser identificadas como tal e não serão levadas em consideração.
5. É permitido apenas o uso de calculadora não programável, Casio fx-82MS, ou similar.
6. Este caderno deve ser **devolvido** ao final da prova juntamente com as folhas de respostas e de rascunhos dentro do envelope disponível sobre sua mesa.
7. O estudante deverá permanecer na sala, **no mínimo**, 90 minutos.
8. A prova tem duração de **QUATRO HORAS**

Nome:	Série:
Nº e tipo de documento de identificação apresentado:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
e-mail:	
Assinatura	

**Questão 1 (25 pontos).** Um próton com carga  $+e$  em alta velocidade se move com velocidade constante  $v_0$  numa linha reta passando por um elétron de massa  $m$  e carga  $-e$ , inicialmente em repouso. O elétron está a uma distância  $a$  do caminho do próton. Assuma que o próton passa tão rapidamente que o elétron não tem tempo de se mover apreciavelmente da sua posição inicial até que o próton esteja bem longe.

- Determine a componente da força na direção perpendicular e na direção paralela a linha ao longo do qual o próton se move considerando somente os efeitos eletrostáticos (10 pontos).
- Calcule o impulso fornecido pela força na direção perpendicular (5 pontos).
- Usando estes resultados, calcule o momento final e energia cinética final do elétron na direção perpendicular (10 pontos).

Dado: 
$$\int \frac{dx}{(Ax^2+Bx+C)^{3/2}} = \frac{2(2Ax+B)}{(4AC-B^2)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

**Questão 2 (25 pontos).** De acordo com a Mecânica Estatística de Boltzmann, a entropia,  $S$ , é definida por  $S = k \ln W$ . Onde  $W$  é o número de estados ou configurações possíveis do sistema. Com isso pode-se obter todas as equações termodinâmicas relevantes para o sistema. Algumas décadas depois Shannon propôs uma generalização dessa entropia definindo,

$$S = -k \sum_i p_i \cdot \ln p_i$$

Sendo  $p_i$  a probabilidade de o sistema estar no estado  $I$ .

- Mostre que para  $p_i = p$  (constante) qualquer que seja  $I$ , a entropia de Shannon se reduz à entropia de Boltzmann. (2 pontos)

No caso de um gás ideal monoatômico, as partículas (moléculas) se movem livremente num recipiente de volume  $V$ . De acordo com a termodinâmica, a energia do sistema está relacionada à entropia e ao volume por:

$$dU = T \cdot dS - P \cdot dV$$

onde  $P$  é a pressão,  $T$  é a temperatura e  $d$  indica uma variação infinitesimal da grandeza correspondente.

- Considerando que o volume do recipiente não varia, mostre que a probabilidade de o sistema estar numa energia entre  $U$  e  $U+dU$  é

$$P(U) dU = A \exp(-U/kT) d\Gamma$$

onde  $d\Gamma$  representa um volume elementar do espaço de fase, isto é, o volume da região do espaço de coordenada e momento compatível com a energia total entre  $U$  e  $U + dU$ , e  $A$  é uma constante de normalização. Considere que o gás é feito de uma única molécula que se move livremente dentro do recipiente, sofrendo somente colisões elásticas com as paredes do mesmo. O elemento de volume do espaço de fase é dado por  $d\Gamma = d^3x \cdot d^3p$ , onde  $x$  é uma das coordenadas de posição e  $p$  uma das coordenadas do momento. (3 pontos).

c) Usando o resultado anterior, mostre que (5 pontos)

$$P(U)dU = A V \exp\left\{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2 k m T}\right\}$$

d) Considere  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ , mostre que (5 pontos)

$$P(p)dp = 4 \pi A V \exp\left\{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2 k m T}\right\}$$

e) Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

Mostre que, sendo  $v$  a velocidade da molécula (5 pontos)

$$P(v)dv = (2m\pi kT)^{-3/2} \exp\left\{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT\right\} dv$$

f) Para  $v_y$  e  $v_z$  fixos, faça um esboço do gráfico de  $P(v_x)$  em função de  $v_x$ . (5 pontos).

**Questão 3 (25 pontos).** Considere um sistema massa-mola com constante elástica  $k$  sujeito a uma força dissipativa,  $F_d = -\rho v$ , onde  $v$  é a velocidade da massa  $m$  e  $\rho$  uma constante. Suponha que o sistema esteja sujeito a uma força externa  $F = F_0 \cos(\omega t)$

a) Mostre esquematicamente as forças que atuam sobre o sistema. (2 pontos)

b) Usando a segunda Lei de Newton mostre que o sistema é descrito por uma equação do tipo (3 pontos)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

A solução dessa equação é obtida mais facilmente supondo que  $x(t)$  seja a parte real de uma função complexa  $z(t)$ , isto é,  $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ . Mostre que dessa forma a equação (1) pode ser escrita como

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = F_0 \exp(i \omega t) \quad (2)$$

sendo  $\gamma = \rho/m$  e  $\omega_0^2 = k/m$ .

c) Mostre que se o sistema massa-mola estivesse livre das forças externa e dissipativa a equação do movimento seria (3 pontos)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (3)$$

d) Mostre que a função  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$  é uma solução da equação (3). (3 pontos)

e) Mostre que  $z(t) = z_0 \exp(i \omega t)$  é solução da equação (2) se: (3 pontos)

$$z_0 = (F_0/m) / [\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega]$$

f) Qualquer número complexo pode ser escrito na forma  $z_0 = A \exp(i \varphi)$  com  $A$  e  $\varphi$  reais. Mostre a partir de  $z_0$  obtido acima que: (3 pontos)

$$A^2(\omega) = (F_0/m)^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2]$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg[\gamma \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)]$$

g) Esboce o gráfico  $A^2(\omega)$  vs  $\omega$ . (3 pontos)

h) Suponha que se tenha  $\omega_0 = 36 \text{ rad/s}$  e  $\gamma = 9 \text{ s}^{-1}$ . Qual deve ser o espaçamento das ondulações de um redutor de velocidade numa via em que a velocidade deve ser inferior a 50 km/h? (5 pontos)

**Questão 4 (25 pontos).** Uma fonte de luz emite luz de uma fonte de frequência  $f$  é transmitida através de um sistema como mostrado na figura abaixo. No condutor superior tem um líquido de índice de refração  $n$  movendo-se com uma velocidade  $u$ , e o condutor inferior contém o mesmo líquido mas em repouso. A velocidade da luz é dependente do meio onde se propaga, isto é, do índice de refração do meio  $n$ . Como estamos lidando com mudança da velocidade da luz no meio, e a velocidade do líquido, as relações relativísticas devem ser utilizadas. A composição de velocidade no caso relativístico se torna:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}} \sim \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Onde  $v$  é a velocidade resultante,  $v'$  é a velocidade da luz no meio líquido, e  $u$  a velocidade do líquido. Como a velocidade da luz no tubo superior é diferente no tubo inferior, existirá uma diferença de fase entre os caminhos percorridos.

- Escrever a equação que relaciona a velocidade da luz dependente do meio onde se propaga, isto é, do índice de refração do meio  $n$ . (5 pontos)
- Qual o valor mínimo de  $u$  que causaria uma interferência destrutiva no ponto  $P'$ . (20 pontos)

