MESTRES BRASILEIROS DA FÍSICA

1 a 6 de Março de 2020

Prova Teórica

INSTRUÇÕES

1. Você está recebendo um caderno de questões e um de respostas, ambos devem ser devolvidos ao final da prova.
2. Este é o caderno de questões. A prova é composta por duas questões. Confira seu caderno. Ele deve conter um **total de 8 páginas**, identificadas de 1 a 8. Em caso contrário, peça sua substituição.
3. A duração da prova é de **quatro horas**, devendo o aluno permanecer na sala por **no mínimo 120 minutos.**
4. Leia atentamenta as demais instruções no caderno de respostas.

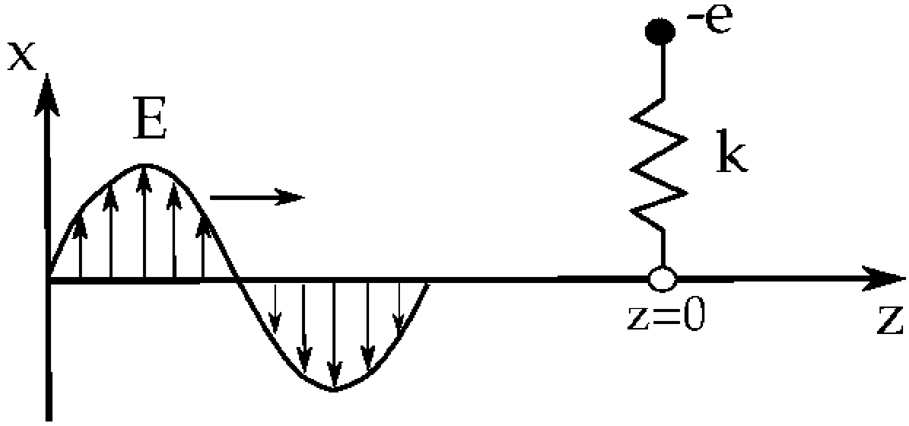
Questão 1 **(valor: 30 pontos)**

Discutiremos neste problema um modelo microscópico clássico capaz de descrever a dependência da função dielétrica de um gás com respeito à variação do comprimento de onda λ da luz. Esse fenômeno possibilita, entre outros efeitos, a formação de arco-íris. Ele também é o fundamento físico através do qual um prisma óptico é capaz decompor a luz branca em diferentes cores.

Considere um gás, de densidade volumétrica de partículas N, em uma região atravessada por uma onda eletromagnética plana e monocromática

$$\vec{E}(z,t) \;=\; E_0 \cos(Kz - \omega t)\hat{x}\,,$$

em que $\hat{z}$ é a direção de propagação da onda, e o campo elétrico, $\vec{E}(z,t)$ tem a direção do eixo $\hat{x}$. A interação atrativa entre a molécula do gás e um de seus elétrons pode ser modelada, em primeira aproximação, por uma mola de constante elástica $k = m\omega_0^2$, em que m representa a massa do elétron e ω_0 uma frequência angular característica elevada. Veja a figura a seguir.



Em algum momento a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $|x| \ll 1$, poderá ser utilizada.

Parte I. O campo elétrico exerce uma força que polariza a molécula tirando o elétron da posição de equilíbrio $x = 0$. Despreze mecanismos de perdas e a componente magnética da força de Lorentz. Considere $\omega < \omega_0$ e a carga elétrica do elétron representada por $-e$. Faça o que se pede nos itens a seguir.

4 pts (a) Determine a força elétrica $\vec{F}_e(t)$ sobre o elétron na posição $z = 0$.

Solução: Campo elétrico em $z = 0$:

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\hat{x}. \tag{1}$$

Força elétrica sobre a carga

$$\vec{F}_e = -e\vec{E} = -eE_0 \cos(\omega t)\hat{x}. \tag{2}$$

4 pts (b) Escreva a equação de movimento desse elétron.

Solução: Força resultante

$$F_{res} = F_{elastica} + F_{eletrica} \tag{3}$$

$$mx'' = -kx - eE_0 \cos(\omega t). \tag{4}$$

Equação de movimento

$$x'' + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t). \tag{5}$$

3 pts (c) Considere que, em regime estacionário, a função horária da posição do elétron pode ser escrita como $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, determine A e ϕ.

Solução: Substituindo a solução fornecida na Eq. 5, segue que

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos(\omega t - \phi) = -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t). \tag{6}$$

De onde obtém-se que

$$\phi = \pi \tag{7}$$

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{8}$$

continua . . .

Parte II. Ao deslocar o elétron, o campo elétrico polariza a molécula, induzindo um momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ proporcional ao deslocamento do elétron e sua carga. No cenário macroscópico, um vetor polarização $\vec{P}$, definido como o momento de dipolo elétrico por volume, é observado.

5 pts (d) Determine o vetor de polarização instantânea $\vec{P}(t)$.

Solução: Momento de dipolo induzido em uma molécula

$$p(t) = -ex(t) = -\frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \pi) = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \tag{9}$$

Vetor de polarização macroscópico

$$P(t) = Np(t) = \frac{Ne^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \tag{10}$$

5 pts (e) Determine a susceptibilidade elétrica do gás χ_e.

Solução: A susceptibilidade elétrica do gás é definida como

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi_e E(t) \tag{11}$$

Daí

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{12}$$

5 pts (f) Considerando o gás fracamente dispersivo e não-magnético ($\mu \approx \mu_0$), determine seu índice de refração n.

Solução: A constante dielétrica ϵ_r é dada por

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{13}$$

Utilizando a relação de Maxwell, segue que

$$n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \tag{14}$$

4 pts (g) No caso limite de frequências ω_0 muito elevadas, demonstre que o índice de refração do gás considerado obedece à fórmula de Cauchy

$$n = 1 + A\left(1 + B\omega^2\right)$$

e determine as constantes A e B.

 continua ...

Solução: Para $\omega_0 >> \omega$, segue que

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{15}$$

Para reescrever a expressão anterior na forma da fórmula de Cauchy,

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{16}$$

Segue, portanto, que

$$A = \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2} \tag{17}$$

$$B = \frac{1}{\omega_0^2}. \tag{18}$$

Questão 2 **(valor: 30 pontos)**

O teorema virial estabelece uma relação entre o valor médio da energia cinética e dos trabalhos realizados pelas forças internas do sistema. Este teorema tem várias aplicações importantes na Física, e aqui vamos estudar como ele foi aplicado em Cosmologia para permitir antecipar a descoberta da matéria escura.

Parte I. Considere um sistema com N corpos de massas iguais, m, sujeitos a um potencial central $V(r)$, e com vetores posição, $\mathbf{r}_i$, e momento linear $\mathbf{p}_i$, sendo i o índice que identifica o i-ésimo corpo do sistema. Definimos uma grandeza

$$\lambda = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \,, \tag{19}$$

onde a soma é feita sobre todas as partículas que compõem o sistema.

3 pts (a) Determine $d\lambda/dt$ em termos da energia cinética média $\langle T \rangle$ dos corpos que compõem o sistema e das forças resultantes sobre as galáxias $\mathbf{F}_i$ e seus vetores posições $\mathbf{r}_i$.

Solução: Considere a quantidade

$$\lambda = \sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{r}_i \,, \tag{20}$$

onde a soma é feita sobre todas as partículas que compõem o sistema. A derivada temporal de λ é

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i \,. \tag{21}$$

O primeiro termo do lado direito na equação acima pode ser escrito como

$$\sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = 2T \,. \tag{22}$$

O segundo termo do lado direito resulta

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \,. \tag{23}$$

Substituindo estes resultados na equação (21), temos

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \,. \tag{24}$$

4 pts (b) Considerando que o sistema se encontra em equilíbrio estacionário (valores médios temporais não variam), determine a relação entre os termos envolvendo a energia cinética média a energia potencial média.

Solução: A média temporal de $d\lambda/dt$ tomada num intervalo de tempo τ é

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d\lambda}{dt} dt = \langle 2T \rangle + \langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \rangle \,, \tag{25}$$

 continua ...

e portanto

$$\frac{1}{\tau}[\lambda(\tau) - \lambda(0)] = \langle 2T \rangle + \langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \rangle \ . \tag{26}$$

Considerando que o numerador é finito e τ pode ser infinito segue que

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \rangle \ , \tag{27}$$

resultado conhecido como virial de Clausius.

3 pts

(c) Considerando que o sistema está sujeito a um potencial central $V(r) = cr^{n+1}$, e usando o resultado anterior, determine $d\lambda/dt$ em termos da energia cinética média e do potencial médio dos corpos do sistema.

Solução: Neste caso temos

$$-\frac{1}{2} \langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \rangle = \langle T \rangle = +\frac{1}{2} \langle \sum_i \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}_i \mathbf{r}_i \rangle \tag{28}$$

e a equação (27) resulta em

$$\langle T \rangle = -\frac{n+1}{2} \langle cr^{n+1} \rangle \tag{29}$$

e portanto, usando novamente a expressão da energia potencial, obtemos que

$$\langle T \rangle = -\frac{n+1}{2} \langle V \rangle \ . \tag{30}$$

Observe que no caso de forças centrais que variam com o inverso do quadrado da distância, o teorema virial leva ao resultado

$$2 \langle T \rangle + \langle V \rangle = 0 \, . \tag{31}$$

Este resultado é conhecido como identidade de Lagrange para sistemas gravitacionais.

Parte II. O resultado obtido acima é o Teorema Virial para um potencial central. Vamos aplicá-lo ao estudo de um aglomerado de galáxias. Astrônomos podem medir a velocidade radial de cada estrela, e com isso determinar a velocidade do aglomerado em relação ao Sol e também a velocidade relativa das estrelas, chamada velocidade de dispersão do aglomerado.

Suponha que um aglomerado estelar de forma globular é formado por N estrelas, cada uma tendo a mesma massa m. São medidas a velocidade radial (em km/h) e as posições observadas (em segundos de arco), como mostrados na tabela abaixo. O aglomerado se encontra a 100 Mpc de distância da Terra, e tem luminosidade equivalente a 8×10^7 sóis. Considere que 1 pc $= 3 \times 10^{13}$ km, que a constante gravitacional é $G = 6{,}7 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$, e a massa do Sol $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg.

3 pts

(d) A Tabela 1 mostra as medidas realizadas na região coberta pelo campo visual do aglomerado. Isso inclui a observação de galáxias que se encontram na mesma região angular, mas ainda assim muito distantes do aglomerado. Quais os dados observados devem ser descartados? Justifique.

Solução: A velocidade das galáxias em relação à Terra varia com a distância entre o planeta e a galáxia. com base nas velocidades radiais medidas, é fácil identificar 8 (ou 9) galáxias que devem ser excluídas, e que são identificadas pelos números: 7, 12, (ou 13) 15, 16, 19, 26, 27 e 30.

6 pts (e) Considerando que no referencial do centro de massa do aglomerado a distribuição de velocidades das galáxias é isotrópica, determine a velocidade quadrática média das galáxias em relação a esse referencial. Se necessário use $\langle x^2\rangle = \langle x\rangle^2 + \sigma^2$, sendo σ^2 a variância de x. Use o sistema internacional.

Solução: A velocidade relativa quadrática média é calculada em relação ao centro de massa do aglomerado, e resulta

$$\langle v^2\rangle = 3\langle v_r^2\rangle\,. \tag{32}$$

e resulta ser $\langle v^2\rangle = 3{,}5\times 10^{12}$ (m/s)^2. A energia cinética média é $\langle T\rangle = (m/2)\langle v^2\rangle$.

4 pts (f) Usando as posições angulares da Tabela 1, determine a distância típica entre as estrelas e o centro de massa do aglomerado.

Solução: A distância média é $\langle d\rangle = \sqrt{3\langle d_r\rangle}$, e resulta $\langle d\rangle = 8{,}1\times 10^{21}$ m.

4 pts (g) Assumindo que $\langle 1/d\rangle \approx 1/\sqrt{\langle d^2\rangle}$, e usando o teorema virial, determine a massa total do aglomerado em unidades de massa solar.

Solução: Usando o teorema virial temos $\langle T\rangle\langle V\rangle$ então $M = 2\langle T\rangle/(G\langle 1/d\rangle) = 2{,}13\times 10^{14}$.

3 pts (h) Determine a razão entre a massa do aglomerado calculada pelo Teorema Virial e a massa do aglomerado esperada em termos de luminosidade.

Solução: $\gamma = M_v/M_l = 2{,}7\times 10^6$

Com base nesses dados, e observando a discrepância entre as massas de aglomerados de galáxias obtidas pelos diferentes métodos, o físico F. Zwicky, em 1933, formulou 4 possíveis explicações para essa discrepância, sendo uma delas a presença de uma massa invisível que interage apenas pela força gravitacional, e que hoje é conhecida por *matéria escura*.

 continua ...

Galáxia	Pos. Ang. (arcsec)	Vel. Radial Km/s
1	1310	7452
2	1322	5749
3	1380	7606
4	1393	7653
5	1451	4915
6	1451	5186
7	1470	20220
8	1478	4915
9	1525	7335
10	1594	8318
11	1624	7226
12	1665	49310
13	1721	1721
14	1724	7304
15	1740	-154
16	1758	19865
17	1762	6055
18	1791	7694
19	1797	38272
20	1855	5504
21	1867	4811
22	1877	7442
23	1887	5709
24	1896	8203
25	1913	6819
26	1950	-101
27	1980	-354
28	2060	6205
29	2076	7323
30	2085	-202
31	2141	8122
32	2182	7012
33	2434	7545
34	2454	7310

Tabela 1: Dados sobre um aglomerado globular de galáxias.