SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA 2017
3ª FASE – 7 OUTUBRO DE 2017
PROVA EXPERIMENTAL

NÍVEL I
Ensino Fundamental
9° ano.

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES A SEGUIR:

01 – Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos da **9° ano do Ensino Fundamental**.
02 – O **Caderno de Resoluções** possui instruções que devem ser lidas cuidadosamente antes do início da prova. As resoluções devem ser transcritas no local indicado no caderno de resoluções. Respostas fora do local indicado não serão consideradas.
03 – Leia com atenção os ANEXOS A e B, que encontram-se logo depois das questões da prova.
04 – Todos os resultados numéricos de medidas e cálculos devem ser expressos de acordo com as instruções específicas. É permitido o uso de calculadoras não programáveis.
05 – A duração desta prova é de **três horas**, devendo o aluno permanecer na sala por no mínimo **noventa minutos**.

EXPERIMENTOS COM A LEI DE HOOKE (100 pontos)

Considere a Lei de Hooke. Um experimentador tem à sua disposição os seguintes materiais, que podem ser visualizados na Figura A-1 do ANEXO A:

- duas molas idênticas com constante elástica k;
- dez arruelas (massas) idênticas, cada uma com massa $m = (5,78 \pm 0,14)$ g;
- um gancho para pendurar as massas na(s) mola(s);
- uma haste;
- uma base vertical de madeira equipada com um suporte para molas e escala milimetrada com precisão de ± 1mm.

Para o caso em que se quer determinar experimentalmente a constante elástica k de **uma única mola** através da relação entre sua elongação **em função do número de arruelas** N, com massas idênticas e conhecidas, anexadas a ela:

1.a – Escreva a equação da elongação da mola em função do número de arruelas presas a ela. (3 pontos)

1.b – Como pode-se obter experimentalmente o valor de k em função do número de arruelas presas à mola? (4 pontos)

1.c – Como é escolhido o valor da posição inicial das medidas (ponto de referência) com a mola presa ao suporte da base, sem nenhuma arruela presa a ela? (3 pontos)

1.d – Como a elongação da mola é medida no experimento? (3 pontos)

1.e – Como é determinada a incerteza nas medições da posição inicial das medidas e da elongação da mola? (2 pontos)

Tabela 1

Número de arruelas	Elongação (±0,1 cm)
1	1,8
2	4,8
3	8,4
4	11,9
5	15,5
6	18,7
7	22,1

Tabela 2

Número de arruelas	Elongação (±0,1 cm)
1	0,5
2	2,2
3	4,0
4	5,6
5	7,4
6	9,2
7	11,0
8	12,8
9	14,3
10	16,1

Tabela 3

Número de arruelas	Elongação (±0,1 cm)
1	0,1
2	0,4
3	1,2
4	2,1
5	2,9
6	3,8
7	4,7
8	5,7
9	6,6
10	7,4

Sabe-se que ao serem realizadas associações de molas, mesmo que com constantes elásticas distintas, pode-se interpretar o conjunto de molas como uma única mola com constante elástica equivalente k_e.

Considere as tabelas 1, 2 e 3, que contém dados de elongação de molas em função do número de arruelas anexadas. Uma das tabelas corresponde a dados obtidos com apenas uma mola. Em outra os dados são para **duas molas idênticas** associadas em paralelo e outra com dados para **duas molas idênticas** associadas em série.

Escreva as equações da elongação das associações de molas **em função apenas do número de arruelas *N* e dos parâmetros *k*, *m* e *g*** para:
2.a – a associação em série. (4 pontos)
2.b – a associação em paralelo. (4 pontos)

3. Em um mesmo gráfico, coloque os dados das tabelas 1, 2 e 3, com as respectivas barras de erro. (7 pontos)

4. Trace uma reta equivalente para cada uma das curvas, explicando em detalhes o método utilizado e com os valores numéricos correspondentes. (5 pontos)

5. Identifique no gráfico as curvas correspondentes a cada associação de molas (uma mola, duas molas em série e duas molas em paralelo). (5 pontos)

Obtenha o valor da constante elástica equivalente k_e com suas respectivas incertezas, ou seja, calcule $k_e \pm \Delta k_e$, para:
6.a – o caso de uma única mola. (7 pontos)
6.b – o caso de duas molas em série. (7 pontos)
6.c – o caso de duas molas em paralelo. (7 pontos)

Considere que o valor médio da aceleração da gravidade g na terra seja (9,81 ± 0,02) m/s².

7.a – Qual(is) o(s) motivo(s) de as curvas terem inclinações (coeficiente angular) diferentes. (5 pontos)
7.b – Qual(is) o(s) motivo(s) de as curvas terem coeficientes lineares diferentes. (5 pontos)
7.c – Qual o significado de coeficientes lineares diferentes de zero em experimentos com a Lei de Hooke? (5 pontos)

Uma vez que você tenha obtido o valor da constante elástica k **para o caso de uma única mola**, considere que este seja o valor padrão para a constante k da mola.

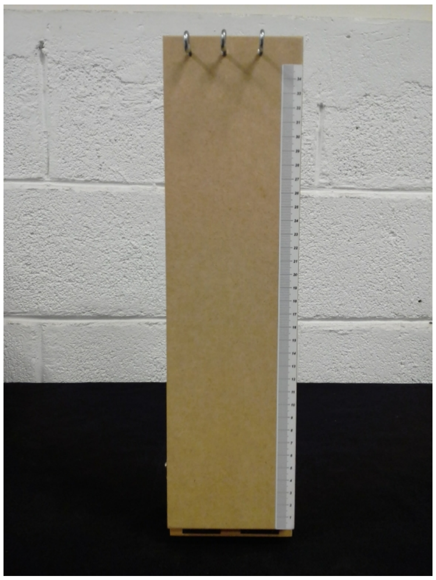
Com base no valor padrão de k, calcule o valor esperado da constante elástica equivalente k_e para:
8.a – a associação em paralelo. (5 pontos)
8.b – a associação em série. (5 pontos)

Compare os valores esperados com os obtidos experimentalmente, dizendo quanto os valores experimentais estão de acordo com os esperados para:
9.a – a associação em paralelo. (5 pontos)
9.b – a associação em série. (5 pontos)

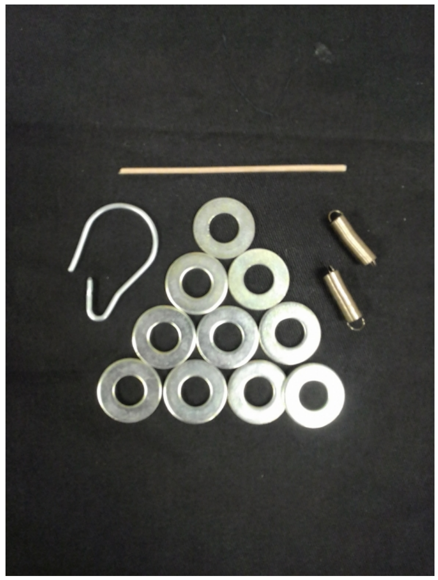
10. Os resultados que você obteve nos experimentos confirmam ou contradizem a Lei de Hooke? Por quê? (4 pontos)

ANEXO A – MATERIAIS DISPONÍVEIS E EXEMPLOS DE MONTAGENS PARA EXPERIMENTOS COM A LEI DE HOOKE

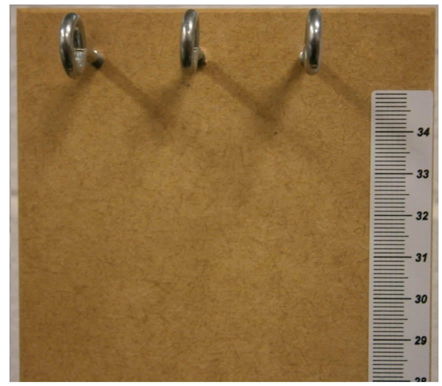
A.1. Materiais e montagens



Base vertical



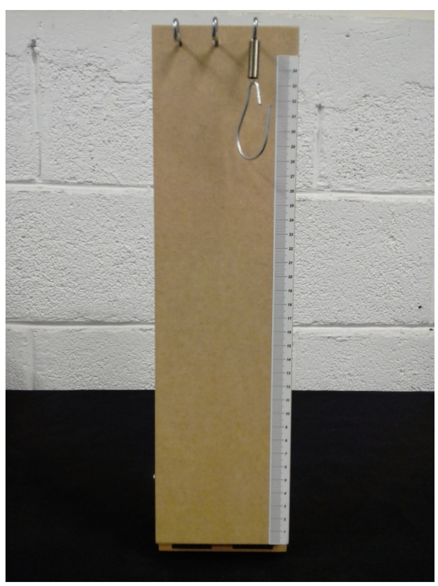
Molas, arruelas, gancho e haste



Detalhe do suporte para molas

Figura A-1: Materiais à disposição para realização do experimento sobre a lei de Hooke.

Mola simples



Mola simples e gancho

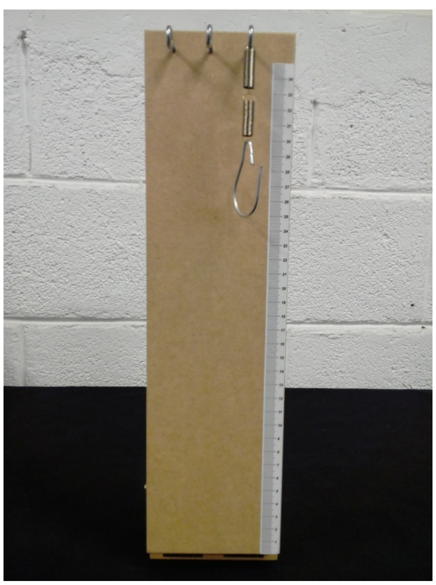
Detalhe da mola e gancho

Figura A-2: Montagem inicial para experimento com mola simples.


Mola simples sujeita à ação do peso de uma arruela


Mola simples sujeita à ação do peso de quatro arruelas

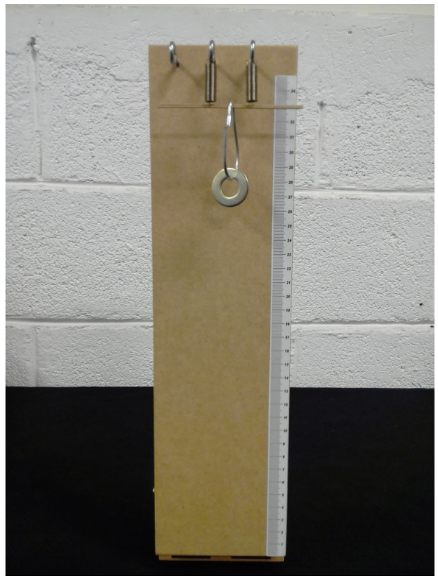
Figura A-3: Exemplos de uso da montagem com mola simples.


Molas em série


Molas em série sob ação do peso de uma arruela

Figura A-4: Montagem com molas em série e exemplo de uso com uma arruela.

Molas em paralelo



Molas em paralelo sob ação do peso de uma arruela

Molas em paralelo sob ação do peso de quatro arruelas

Figura A-5: Montagem com molas em paralelo e exemplos de utilização.

A.2. Montagens equivalentes para associações de molas em série e em paralelo

A.2.1 – Molas em paralelo

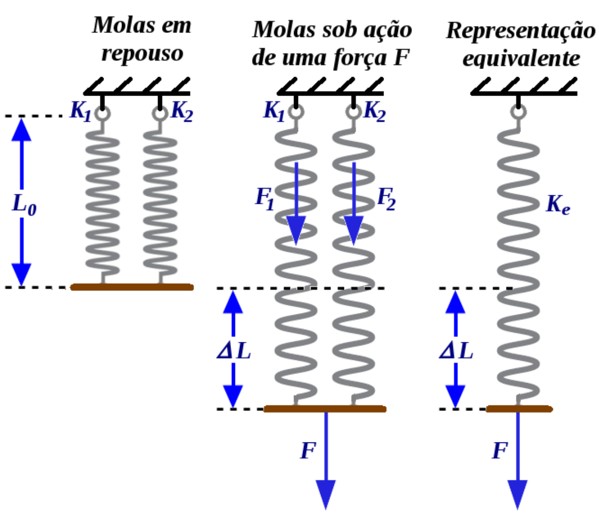


Figura A-6: Molas associadas em paralelo: na situação de repouso, sob a ação de uma força total F e a representação equivalente (da esquerda para a direita, respectivamente).

A.2.1 – Molas em série

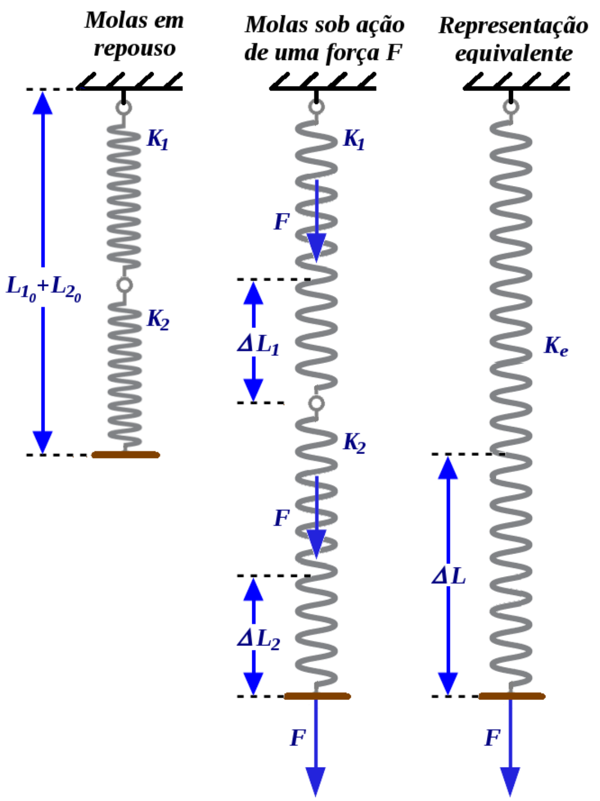


Figura A-7: Molas associadas em série: na situação de repouso, sob a ação de uma força total F e a representação equivalente (da esquerda para a direita, respectivamente).

ANEXO B – TRATAMENTO E ANÁLISE DE DADOS EXPERIMENTAIS

B.1. Traçado de uma reta estatística

Em geral os dados experimentais podem ser representados por uma reta estatística, onde coeficiente angular, coeficiente linear, R (coeficiente de correlação), e σ (desvio padrão) fornecem informações importantes sobre parâmetros do experimento, qualidade de medidas, e os erros estatísticos resultantes.

Em um gráfico de uma reta é necessário saber qual é a variável independente e a dependente. A independente é aquele valor imposto inicialmente, variável que você escolhe inicialmente, e a dependente é o valor resultante desta imposição. Na forma de equação escrevemos como:

$$Y = a \cdot X + b \qquad \text{(B1)}$$

Note que primeiro é colocado o valor de X para depois obter o valor de Y. Então X é a variável independente e Y a dependente.

Para obtermos os valores do coeficiente angular "a" e do coeficiente linear "b" podemos utilizar o Método dos Mínimos Quadrados, uma Regressão Linear ou o Método Gráfico.

B.1.1. Método dos Mínimos Quadrados

Considerando que são realizadas N medidas de pontos experimentais que se distribuem ao longo de uma treta em um gráfico y vs x, formando um conjunto de dados $\{(x_1,y_1),(x_2y_2),...,(x_N,y_N)\}$, onde para cada medida y_i há uma incerteza $\Delta y_i = \Delta y$ associada a ela, os estimadores do coeficiente angular a e do coeficiente linear b da equação:

$$y = a \cdot x + b \qquad \text{(B2)}$$

são dados pelas expressões:

$$a=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)y_i}{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2} \tag{B3}$$

onde $\sum p_i=\sum_{i=1}^{i=N} p_i$

$$b=\bar{y}-a\,\bar{x} \tag{B4}$$

Já a variância dos y_i é dada por:

$$S^2=\frac{\sum\left(y_i-a\,x_i-b\right)^2}{N-2} \tag{B5}$$

A partir destas expressões, podemos calcular os erros padrão dos estimadores dos coeficientes angular e linear como:

$$\Delta a=\frac{S}{\sqrt{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}} \tag{B6}$$

e

$$\Delta b=S\sqrt{\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^2}{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}} \tag{B7}$$

B.1.2. Regressão Linear

Para o mesmo caso em que são realizadas N medidas de pontos experimentais (x_i,y_i) que se distribuem ao longo de uma treta em um gráfico y vs x, com incertezas Δy iguais associadas a cada medida de y_i, podemos encontrar os coeficientes a e b para a reta que melhor descreve os pontos experimentais pelas expressões:

$$a=\frac{N\sum x_i\,y_i-\sum x_i\sum y_i}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2} \tag{B8}$$

e

$$b=\frac{\sum x_i^2\sum y_i-\sum x_i\sum x_i\,y_i}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2} \tag{B9}$$

com as incertezas Δa e Δb dadas por:

$$\Delta a=\sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}\,\Delta y \tag{B10}$$

e

$$\Delta b=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}\,\Delta y \tag{B11}$$

B.1.3. Método Gráfico

Descrevemos a seguir um método alternativo para estimar os parâmetros de uma reta, onde as únicas ferramentas necessárias são um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

Antes de traçar um gráfico devemos sempre:

i. Definir quem é a variável independente e dependente. A variável independente sempre deve ser colocada no eixo x e a variável dependente no eixo y de acordo com a equação $y=a\cdot x+b$.
ii. Verificar o intervalo de variação dos dados experimentais a serem colocados nos eixos x e y para ocupar boa parte do espaço da folha ou gráfico fornecido. Ocupe o máximo de espaço possível.
iii. Dividir os eixos x e y com valores que sejam fáceis de serem visualizados. Evite utilizar números ímpares (exceto número 5 e seus múltiplos), porque é difícil de subdividir.
iv. Não congestione os eixos x e y com números, sempre facilitando a leitura.
v. Nunca coloque os números experimentais nos eixos x ou y, a não que seja para chamar a atenção para algo específico.
vi. Definir qual a dimensão (unidade) das variáveis que serão colocadas nos eixos x e y, na forma de potência se necessário, e escrever abaixo ou no final dos eixos x e y bem legível.
vii. Colocar os dados experimentais na forma de um ponto para cada par (x,y), um pequeno círculo cheio. Note que se colocarmos um círculo cheio muito grande para os pontos poderá ser difícil adicionar barras de erros posteriormente, e se os pontos forem muito pequeno será difícil visualizá-los.

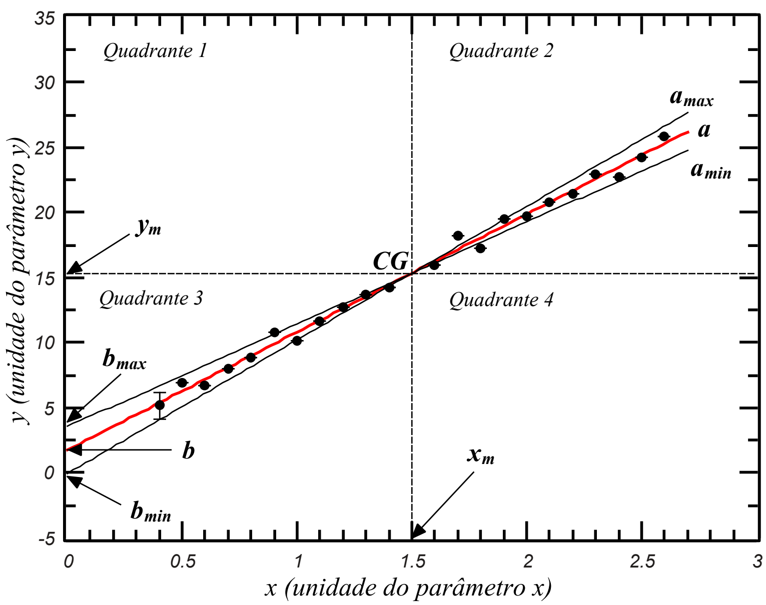


Figura B-1: Método gráfico para determinar os coeficientes angular e linear de uma reta e suas incertezas. As incertezas no parâmetro y são todas iguais às do primeiro ponto experimental.

Se as barras de erro se forem todas iguais, basta colocar uma vez só e anotar o procedimento em um lugar próximo ao gráfico e se forem muito pequena em relação a divisão da escala do gráfico pode ser omitido.

Para ilustrar o método vamos considerar os dados representados na Figura B-1, e seguir os seguintes passos:

a) Inicialmente determine um ponto no meio dos dados experimentais de modo que os pontos estejam metade para cada lado ao traçarmos uma linha vertical e horizontal. Este ponto é chamado também de centro de gravidade dos pontos (CG) no gráfico, e é igual à coordenada correspondente aos valores médios de x_i e y_i: ($\bar{x}=x_m$, $\bar{y}=y_m$).
b) Coloque ponta de lápis neste ponto CG e com ajuda de uma régua trace duas retas perpendiculares, horizontal e vertical, dividindo gráfico em 4 quadrantes.
c) Girando a régua levemente em torno do ponto CG, sempre com ponta do lápis no centro da gravidade dos pontos, determine uma reta que coloque em torno de 16% dos pontos acima da régua e trace uma

reta, definindo a inclinação máxima da reta (a_{max}). Para esta reta, a equação que a descreve pode ser escrita como $y = y_m + a_{max} \cdot (x - x_m)$.

d) Novamente, gire em sentido contrário e agora deixe 16% dos pontos abaixo da régua e trace uma reta, definindo a inclinação mínima (a_{min}). Esta reta pode ser descrita pela equação $y = y_m + a_{min} \cdot (x - x_m)$.

e) Prolongue as duas retas já definidas até que elas cruzem o eixo y em $x = 0$ para determinar os pontos de interceptação de cada uma delas com o eixo y. Obtenha os valores de b_{max} para a reta de menor inclinação e de b_{min} para a de maior inclinação e, em seguida, obtenha o ponto médio entre os pontos máximo e mínimo de interceptação $b = (b_{max} + b_{min})/2$.

f) A partir do ponto (0,b), trace uma reta passando pelo ponto (x_m,y_m), onde se cruzam as retas de inclinação máxima e mínima, obtendo assim a reta média.

Note que na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima ficam aproximadamente 68% dos pontos experimentais em concordância com o conceito de desvio padrão para uma distribuição normal. No exemplo mostrado na Figura B-1, dos 22 pontos experimentais, 15 (68,18 %) estão confinados entre as retas de inclinação máxima e mínima.

Os valores numéricos a reta média podem ser obtidos utilizando-se as expressões:

$$a = \frac{1}{2}\left(a_{max} + a_{min}\right) \quad ; \quad b = \frac{1}{2}\left(b_{max} + b_{min}\right) \qquad \text{(B12)}$$

com suas respectivas incertezas dadas por:

$$\Delta a = \frac{1}{2\sqrt{(N)}}\left|a_{max} - a_{min}\right| \quad ; \quad \Delta b = \frac{1}{2\sqrt{(N)}}\left|b_{max} - b_{min}\right| \qquad \text{(B13)}$$

Perceba que os valores das incertezas são inversamente proporcionais à raiz quadrada do número de medidas N, assim, quanto maior número de medidas, menor o erro correspondente.

O método gráfico pode ter algumas variações, sejam na execução ou nos resultados obtidos por cada experimentador. Porém é necessário que em torno de 68% dos pontos experimentais fiquem confinados nas retas de inclinação máxima e mínima (note que se tivermos 10 medidas isto pode significar 6 ou 7 medidas). Quanto maior o número de medidas, mais preciso se torna o método.

Se os pontos têm barras de erros diferentes, siga o mesmo procedimento descrito, mas levando em consideração os pesos relativos de cada ponto. O peso de cada ponto deve ser aproximadamente proporcional ao inverso da barra de erro.

B.2. Algarismos Significativos

REGRAS

1. Os erros das medidas são representados sempre com um algarismo significativo. Exceto quando o algarismo significativo for os números 1 ou 2, utilizamos dois algarismos significativos.
2. Primeiro obtemos o valor do erro para depois obter a posição do último algarismo significativo do valor principal.
3. O valor principal deve sempre ter seu último algarismo significativo na mesma casa do último algarismo significativo do erro.
4. O valor principal e o seu erro devem sempre estar na mesma potência.
5. Os erros lidos diretamente nos instrumentos, ou fornecidos pelo fabricante, são escritos apenas com um algarismo significativo, exceto se vier com 2 algarismos escritos no instrumento.
6. Para arredondamento: de 0,000 até 0,499 mantém-se o último algarismo significativo. De 0,500 até 0,999 acrescentamos uma unidade ao último algarismo significativo.
7. O número zero colocado à esquerda do valor principal ou do erro não é algarismo significativo, mas colocado à direita é um algarismo significativo do número.

8. Para o efeito de cálculo, trabalhamos com todos os números disponíveis no instrumento, mas a representação final sempre deve obedecer às regras acima.

B.3. Propagação de erros em um cálculo matemático

Quando obtemos qualquer medida experimental, sempre teremos o envolvimento do erro da medida. Ao realizarmos cálculo com essas medidas terá uma propagação destes erros e o resultado também deve ser representado com um erro.

Se tivermos duas medidas do tipo, $x \pm \Delta x$, e $y \pm \Delta y$, e realizarmos uma operação matemática qualquer, o resultante $f(x,y)$ também terá um erro $\Delta f(x,y)$. O valor do erro $\Delta f(x,y)$ pode ser obtido pela equação:

$$\Delta f(x,y)=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\Delta y)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(B14)}$$

onde $\partial f/\partial z$ é a derivada parcial da função f com relação à variável z (z corresponde a x ou y, na expressão B14).

Para um cálculo rápido e simplificado, apresentamos na Tabela B-1 uma lista de fórmulas para operações mais comuns.

Tabela B-1: Exemplos de expressões para cálculos de propagação de erros.

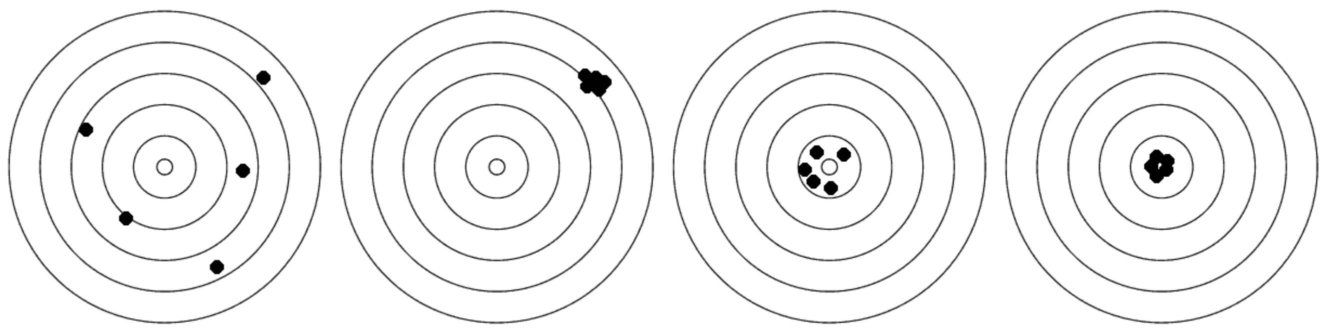
***w*= *w*(*x*, *y*, *z*,...)**	**Expressão para a incerteza σ_w**
$w=x\pm y\pm z\pm\ldots$	$\sigma_w^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+\ldots$
$w=x^m$	$\sigma_w=\lvert mx^{m-1}\rvert\sigma_x$ ou $\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert=\left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$w=ax$	$\sigma_w=\lvert a\rvert\sigma_x$ ou $\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert=\left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$w=ax\pm b$	$\sigma_w=\lvert a\rvert\sigma_x$ ou $\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert=\left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$w=axy$	$\sigma_w^2=(ay)^2\sigma_x^2+(ax)^2\sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2=\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w=a\frac{x}{y}$	$\sigma_w^2=\left(\frac{a}{y}\right)^2\sigma_x^2+\left(a\frac{x}{y^2}\right)^2\sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2=\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w=ax^py^q$	$\sigma_w^2=(apx^{p-1}y^q)^2\sigma_x^2+(ax^pqy^{q-1})^2\sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2=\left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w=a\,sen(bx)$	$\sigma_w=\lvert a\,b\cos(bx)\rvert\sigma_x$ – com bx e $b\sigma_x$ em radianos

B.4. Precisão e exatidão de medidas

Dado um conjunto de N medidas de um determinado parâmetro, podemos verificar duas relações importantes em relação a elas: a precisão e a exatidão das mesmas.

A precisão indica o quanto as medidas efetuadas estão próximas umas das outras. Já a exatidão indica o quanto o valor medido experimentalmente está próximo do valor real ou esperado ou de referência. Uma maneira de representar graficamente os conceitos de precisão e exatidão é mostrado com o exemplo do "tiro ao alvo", onde um atirador quer acertar o centro do mesmo, que equivale ao valor de referência. Na Figura B-2 podem ser vistos as situações possíveis:

- em a): não houve precisão nem exatidão, pois todos os tiros acertaram pontos distantes do centro do alvo e entre si;
- em b): houve precisão, pois os tiros acertaram pontos bem próximos uns dos outros, mas não houve exatidão, pois os pontos estão distantes do centro;
- em c): houve uma boa exatidão (tiros próximos ao centro), mas a precisão não foi tão boa, pois os tiros acertaram pontos distantes entre si;
- em d): houve exatidão e precisão, pois os tiros acertaram pontos muito próximos ao centro e também próximos entre si.



a) Impreciso e inexato b) Preciso mas inexato c) Exato mas impreciso d) Preciso e exato

Figura B-2: Representação gráfica dos conceitos de precisão e exatidão.

Podemos estimar quantitativamente a precisão de uma medida w, que possui uma incerteza Δw, através da expressão:

$$\left|\frac{\Delta w}{w}\right|\cdot 100\,\% \qquad \text{(B15)}$$

Quanto mais baixo o valor obtido com B15, maior a precisão da medida.

Se um parâmetro w possui um valor de referência w_{ref}, mas experimentalmente foi obtido o valor w_{exp}, a exatidão da medida pode ser obtida pela expressão:

$$\left|\frac{w_{ref}-w_{\exp}}{w_{ref}}\right|\cdot 100\,\% \qquad \text{(B16)}$$

De um modo geral, podemos utilizar as expressões B15 e B16 em conjunto com a incerteza de uma determinada medida para dizermos se a mesma foi boa ou ruim.

B.5. Incertezas dos instrumentos de medida

De um modo geral, a incerteza de uma medida é proporcional à escala do instrumento de medição. Por padrão, adota-se como incerteza na medida o valor correspondente à metade da menor divisão do instrumento. Nos casos em que o instrumento não é confiável ou se a escala é de difícil leitura, pode-se adotar como incerteza na medida o valor correspondente à menor divisão do mesmo.