

## Determinação da Densidade e da Massa dos Anéis de Saturno

(Determination of the density and mass of Saturn's rings)

Wilson Lopes

Universidade de Guarulhos, Praça Tereza Cristina 01, CEP. 07023-070, Guarulhos, SP

Universidade de Mogi das Cruzes, Av. Dr. Cândido Xavier de Almeida Souza, 200,

CEP. 08780-911, Mogi das Cruzes, SP

Trabalho recebido em 5 de fevereiro de 1993

### Resumo

Neste trabalho foram feitas algumas hipóteses a respeito dos anéis de Saturno e das partículas que os constituem. Desta maneira, para o anel B estimou-se uma densidade média e massa, respectivamente, de  $0,101 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  e  $6,63 \times 10^{-6} M_S$  ( $M_S = 5,69 \times 10^{26} \text{ kg}$  representa a massa de Saturno), que são compatíveis com os valores encontrados na literatura científica.

### Abstract

In this work were made some hypothesis about the Saturn's rings and their constituent particles. In this way, for the ring B, we calculated the mean density and the mass of  $0,101 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  and  $6,63 \times 10^{-6} M_S$  ( $M_S = 5,69 \times 10^{26} \text{ kg}$  is the Saturn's mass), respectively, which are compatible values with those we find in the scientific literature.

### I. Introdução

Até há pouco tempo, Saturno era, em nosso conhecimento, o único planeta, no sistema solar, que apresentava um sistema de anéis. Hoje sabemos que Saturno não é o único:

- Em 1977, de acordo com as observações feitas por Elliot, Dunham e Mink, a estrela de número 158.687, do catálogo S. A. O., cerca de meia hora antes de ser ocultada por Urano, apresentou variações em seu brilho, que se repetiram, simetricamente, do lado oposto do planeta. A explicação mais razoável, para estes fenômenos, é que a luz, proveniente da estrela, se atenuava ao atravessar os anéis, muito estreitos, de Urano<sup>[1,2]</sup>. Estes anéis detectados da Terra, em torno de Urano, foram confirmados, em 1986, pela nave espacial Voyager 2.
- Em 1979, as naves espaciais, Voyager 1 e 2, ao passarem muito próximo a Júpiter, conseguiram

fotografar um único anel, em torno do planeta, de pequena espessura<sup>[2]</sup>.

- Em 1984, os telescópios terrestres detectaram, em torno de Netuno, anéis incompletos, semelhantes a segmentos de arcos. Em 1990, a Voyager 2, de início, confirmou a presença de anéis descontínuos em torno de Netuno; posteriormente, à medida que se aproximava do planeta, aumentava o poder de resolução de seu sistema de detecção, e os arcos iam, pouco a pouco, se completando. Em torno de Netuno foram descobertos quatro anéis<sup>[3]</sup>.
- Há suspeitas de que até mesmo o Sol poderia conter um sistema de anéis, entre  $2,0 R_0$  e  $5,5 R_0$  ( $R_0 = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$ , representa o raio do Sol), em seu plano equatorial. Este fato poderia estar relacionado com a intensa variação na emissão de infravermelho-próximo, proveniente da coroa solar<sup>[4]</sup>.

Os anéis de Saturno foram observados, pela primeira

vez, em 1610, por Galileu. Devido a má qualidade das imagens reproduzidas pelo seu telescópio refrator e devido as observações que vinha fazendo a respeito dos quatro maiores satélites de Júpiter, pensou tratar-se de dois satélites muito próximos ao planeta. A imobilidade desses supostos satélites e seus desaparecimentos em 1612, ocasião em que a Terra, descrevendo seu movimento orbital em torno do Sol, cruza o plano das órbitas dos anéis, deixaram Galileu perplexo<sup>[2]</sup>.

Christian Huygens, em 1656, parece ter sido o primeiro cientista a explicar tais fenômenos. Em seu tratado, *Systema Saturnium*, afirmava: "...está rodeado de um sistema delgado e plano, que não toca nenhum lado e inclinado em relação ao plano da eclíptica". Huygens, considerava um único e rígido anel girando em torno de Saturno. Em 1675, Jean Dominique Cassini, com um telescópio de melhor qualidade que os de seus predecessores, observou a existência de uma divisão escura; o único anel observado por Huygens estava, a partir desse momento, dividido em dois. Esta divisão se conhece, desde então, como divisão de Cassini<sup>[1,2]</sup>.

A suposta rigidez, dos anéis de Saturno, começou a preocupar alguns teóricos. Laplace, em 1785, publicou um trabalho sobre a estabilidade dos anéis de Saturno: demonstrou, teoricamente, que um anel sólido não poderia ser estável e fragmentar-se-ia em pedaços. Admitindo, portanto, a hipótese de que cada anel deveria ser constituído por anéis muito estreitos e concêntricos. Maxwell em 1856, propôs uma constituição, para os anéis de Saturno, formada por um sistema de partículas sólidas e isoladas uma das outras. Desta maneira aumentava-se, ainda mais, a estabilidade dos anéis. Tanto Laplace como Maxwell, não descartaram a possibilidade de uma estrutura líquida para os anéis; Maxwell chegou mesmo a demonstrar este fato. Porém, para uma distância ao Sol de, aproximadamente, 10UA ( $1,0UA = 1,5 \times 10^{11}$  m) tem-se, para os anéis, uma temperatura da ordem de 90K, e que torna a hipótese de uma estrutura sólida a mais razoável. J. E. Keller, em 1895, ao observar o espectro dos anéis de Saturno, obteve uma prova da constituição por partículas sólidas<sup>[1]</sup>.

Foi adotada a seguinte nomenclatura para os anéis de Saturno: o anel mais externo, até então, foi denotado pela letra A; logo a seguir, o mais brilhante por B; depois o que se parece com crepe por C; e, finalmente, o mais próximo ao planeta por D. Em 1966, Feibelman

anunciou a existência de um anel externo a A e a nave espacial Pioneer 11 descobre outro anel, entre os anéis A e o de Feibelman, que foram designados, respectivamente, pelas letras E e F<sup>[1]</sup>.

Pode-se medir a espessura dos anéis de Saturno, quando a Terra, descrevendo seu movimento orbital em torno do Sol, cruza o plano dos anéis. Este fenômeno ocorre, aproximadamente, a cada 15 anos e, a partir de 1967, ano de sua ocorrência, alguns astrônomos conseguiram medir a espessura dos anéis de Saturno: Focas e Dollfus obtiveram  $(2,8 \pm 1,5) \times 10^3$  m; Kiladze obteve  $(1,6 \pm 0,5) \times 10^3$  m, e, recentemente, J. W. Fountain encontrou  $(1,3 \pm 0,3) \times 10^3$  m para a espessura dos anéis<sup>[1,5]</sup>.

Destacamos, também, os trabalhos de F. A. Franklin, G. Colombo e A. F. Cook e W. I. McLaughlin e T. D. Talbot que através da perturbação gravitacional, causada pelos anéis de Saturno em satélites vizinhos, estimaram a massa do anel B, respectivamente, em  $6 \times 10^{-6} M_S$ , para uma densidade  $\geq 0,1$  g/cm<sup>3</sup>, e  $(6,2 \pm 0,3) \times 10^{-6} M_S$ <sup>[5,6]</sup>.

A seguir, serão assumidas algumas hipóteses que permitirão estimar as densidades e as massas dos anéis de Saturno.

## II. Determinação da densidade e da massa dos anéis de Saturno

Admitem-se, neste trabalho, as seguintes hipóteses:

- Um plano, que contenha o eixo de rotação de Saturno, intercepta os anéis produzindo seções retas e elípticas, de raio interno  $R_1$ , raio externo  $R_2$ , raio central  $R = (R_1 + R_2)/2$ , eixo menor ou espessura  $2b$  e eixo maior  $2a = R_2 - R_1$ , conforme a Figura 1.

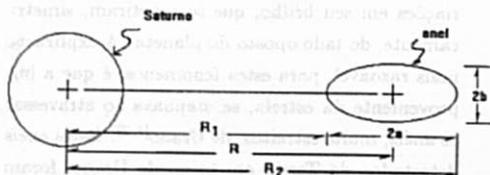


Figura 1. A figura mostra a seção reta de um anel, de forma elíptica, onde  $2a = R_2 - R_1$  e  $2b$  são, respectivamente, seus eixos maior e menor.

b) As partículas sólidas, que constituem os anéis, descrevam seus movimentos keplerianos em torno de Saturno, independentemente uma das outras. Desta maneira, a velocidade angular de uma partícula, que esteja a uma distância  $r$ , do eixo de rotação do planeta, será dada por:

$$w_r(G \cdot M_S/r^3)^{1/2}, \quad (1)$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$  representa a constante universal de gravitação e  $M_S$  a massa de Saturno.

c) O comportamento das partículas sólidas, constituintes de cada anel, se assemelhe ao de um gás ideal. Desta maneira, a densidade num ponto do anel, sujeito à pressão  $p$ , será dada por:

$$\mu = K \cdot p/T, \quad (2)$$

onde a temperatura  $T$  é suposta constante em todos os pontos do anel e  $K$  é uma constante de proporcionalidade.

d) Sejam válidas as equações barométricas:

$$dp_\beta = -\mu_\beta \cdot R^2 \cdot w^2 \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\beta \cdot d\beta \quad (3)$$

e

$$dp_r = -\mu_r \cdot (4\pi \cdot G < \mu > /3 - w_r^2) \cdot r \cdot dr \quad (4)$$

respectivamente, ao longo das colunas AB e BC, da Figura 2, e que a superfície do anel seja isobárica, isto é: são iguais as pressões nos pontos A e C<sup>[7,8]</sup>. Na expressão (3),  $w$  representa a velocidade angular das partículas que se encontram a distância  $R$ , do eixo de rotação do planeta (todas as partículas contidas na coluna AB, praticamente, estão a distância  $R$  do eixo de rotação do planeta) e, na expressão (4),  $< \mu >$  representa a densidade média do anel.

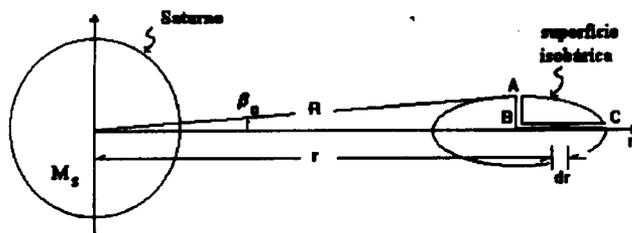


Figura 2. A figura mostra as colunas AB e BC, pertencentes a um anel e a sua superfície isobárica.

Substituindo-se (2) nas expressões (3) e (4), levando-se em conta a expressão (1) e integrando-se, tem-se:

$$\begin{aligned} \ln(p_A/p_B) &= - \int_0^{\beta_0} K R^2 w^2 \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\beta \cdot d\beta \\ &= K G M_S \cdot \text{sen}^2(\beta_0)/(2RT) \end{aligned} \quad (5)$$

e

$$\begin{aligned} \ln(p_C - p_B) &= - \int_R^{R_2} (K/T)(4\pi G < \mu > /3 - G M_S/r^3) \cdot r \cdot dr \\ &= (K/T)[4\pi G < \mu > (R_2^2 - R^2)/6 - G M_S(1/R - 1/R_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

O ângulo  $\beta_0$ , na expressão (5), é muito pequeno (ver a Figura 2) e, desta maneira, pode-se escrever:  $\text{sen}(\beta_0) \approx \beta_0 \approx b/R$ . Igualando-se as expressões (5) e (6), por serem as pressões iguais nos pontos A e C, localizados na superfície do anel, levando-se em conta a aproximação feita acima e resolvendo-se a equação re-

sultante em  $< \mu >$ , obtém-se:

$$< \mu > \approx 3M_S(b^2 R_2 + 2aR^2)/[4\pi R^3 R^2 (R_2^2 - R^2)]. \quad (7)$$

Sendo, em (7),  $2aR^2 \gg b^2 R_2$ , pode-se escrever,

sem comprometer os resultados:

$$\langle \mu \rangle \approx 3M_S / [2\pi \cdot R \cdot R_2(R_2 + R)] \quad (8)$$

Pelo teorema de Pappus-Guldin pode-se calcular o volume do anel, através da seguinte expressão:

$$V = 2\pi \cdot R \cdot A \quad (9)$$

onde  $R$  representa, aproximadamente, a coordenada do centro de massa da secção reta e elíptica do anel, de área  $A = \pi ab^{[9]}$ .

Multiplicando-se a densidade média do anel, definida pela expressão (8), pelo seu volume, definido pela (9), obtém-se a massa do anel, a saber:

$$\begin{aligned} M &= \langle \mu \rangle \cdot V, \\ &\approx 3\pi \cdot M_S \cdot a \cdot 2b / [2R_2(R_2 + R)] \quad (10) \end{aligned}$$

ou então,

$$M/M_S \approx 3\pi \cdot a \cdot 2b / [2R_2(R_2 + R)] \quad (11)$$

### III. Conclusões

Não encontramos nenhuma referência, na literatura disponível, de como deveriam ser as secções retas dos anéis de Saturno. Nem tampouco nos foi possível, neste trabalho, concluir que as secções retas deveriam ser elípticas. Portanto, a escolha de secções retas de forma elíptica constituem-se, diante dos resultados obtidos, em razoáveis aproximações.

Foi suposto, também, que as partículas constituintes de um anel tivessem o comportamento semelhante ao de um gás ideal. Desta maneira, a densidade, num ponto do anel, seria diretamente proporcional à pressão e inversamente proporcional a temperatura que foi suposta constante em todos os pontos do anel. Por outro lado, uma única partícula de um anel, estaria sujeita às forças gravitacionais de um número enorme de partículas vizinhas, e em todas as direções do espaço (com exceção daquelas localizadas nas superfícies mais externas dos anéis), resultando sobre a mesma, praticamente, a força gravitacional do planeta. Assim, esta partícula descreveria seu movimento kepleriano em torno do eixo

de rotação de Saturno, independentemente das demais, justificando o emprego das equações (1) e (2).

Os valores da densidade média e da massa de um anel, foram obtidos, respectivamente, com as equações (8) e (11). Particularmente, a equação (11) depende da espessura do anel, que não é fácil de ser medida. Foi feita, também, a suposição de que os anéis A, B, C e D tivessem a mesma espessura, mesmo que as medidas, nas várias referências usadas neste trabalho, se referissem apenas a um dos anéis e isto, sabemos, não é muito correto. Assim, para o anel B, com a espessura de  $2,8 \times 10^3$  m, obtida por Focas e Dollfus, foi conseguida a massa de  $6,63 \times 10^{-6} M_S$ , que é um valor concordante com aqueles obtidos por Franklin, Colombo e Cook, de  $6 \times 10^{-6} M_S$ , para uma densidade muito próxima de  $0,1 \text{ g/cm}^3$ , e McLaughlin e Talbot, de  $6,2 \times 10^{-6} M_S$ . A massa encontrada por McLaughlin e Talbot exigiria, neste trabalho, uma espessura da ordem de  $2,6 \times 10^3$  m para o anel B.

Não seria razoável, para uma espessura de  $2,8 \times 10^3$  m, supor que as massas dos anéis D e C fossem, respectivamente,  $4,52 \times 10^{-6} M_S$  e  $7,13 \times 10^{-6} M_S$ ; visto que, através de medidas de profundidade óptica, esses anéis apresentam densidades numéricas de partículas, relativamente, pequenas. Contudo, acreditando-se que a expressão (8), que fornece a densidade média do anel, esteja correta, conclui-se que os anéis D e C deverão ser bem menos espessos do que  $2,8 \times 10^3$  m.

Admitindo-se a possibilidade de um anel hipotético muito próximo à superfície de Saturno, de largura desprezível ( $R \approx R_2 \approx R_S$ , onde  $R_S$  representa o raio equatorial de Saturno), a expressão (8) fornece, aproximadamente, a densidade média do planeta, isto é,  $\langle \mu_S \rangle \approx 3M_S / (4\pi R_S^3)$ . Por outro lado, a mesma expressão fornece, para o anel B, uma densidade média da ordem de  $0,101 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , que concorda com o valor obtido por Franklin, Colombo e Cook. Em função destes resultados e levando-se em conta a equação barométrica (4), chega-se a conclusão de que, se Saturno tivesse raio equatorial igual ao valor médio entre  $R$ , raio central, e  $R_2$ , raio externo do anel B, teria, no modelo aqui exposto, aproximadamente, densidade média de  $0,101 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  e massa  $5,69 \times 10^{26} \text{ kg}$ . Será que, quando "Saturno" estava se contraindo, há,

Tabela 1

Anel	$R \times 10^{-7}$ (m)	$R_2 \times 10^{-7}$ (m)	$\langle \mu \rangle \times 10^{-3}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$M/M_S \times 10^6$ (F,D)	$M/M_S \times 10^6$ (K)	$M/M_S \times 10^6$ (F)
D	7,07	7,44	0,356	4,52	2,58	2,10
C	8,32	9,19	0,203	7,13	4,08	3,31
B	10,4	11,7	0,101	6,63	3,79	3,08
A	13,0	13,7	0,0571	2,53	1,44	1,17

A tabela foi construída com o auxílio das equações (8) e (11). As iniciais maiúsculas têm os seguintes significados, em relação as espessuras dos anéis: (F,D) = Focas e Dolfus, (K) = Kiladze e (F) = Fountain, correspondentes, respectivamente, as espessuras dos anéis de  $2,8 \times 10^3$ m,  $1,6 \times 10^3$ m e  $1,3 \times 10^3$  m<sup>[10]</sup>.

aproximadamente, 4,5 bilhões de anos, não teria deixado vestígios de sua densidade média, primitiva, de  $0,101 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, na posição atual do anel B?

As partículas que pertencem à superfície isobárica do anel, de seção reta elíptica, estão sujeitas a menor pressão  $p_A = p_C$ . A medida que nos deslocamos, no plano equatorial do anel (que deverá coincidir com o plano equatorial do planeta), de C para B (ver a Figura 2), a pressão vai aumentando e atinge um valor máximo no ponto B. Portanto, segundo este modelo, as partículas sujeitas às maiores pressões estão localizadas no plano equatorial do anel. Acreditamos que, se o anel fosse deslocado ligeiramente do plano equatorial do planeta, ocorreria uma instabilidade, de tal forma que o anel poderia perder sua forma de contorno "elíptico", devido a uma diferença de pressão definida através da expressão (5).

Com os resultados obtidos acima, este trabalho poderia constituir-se numa opção para se determinar, no terceiro grau, e mesmo nos cursos introdutórios à Astronomia, a densidade e a massa de um anel, em torno de um planeta, através do conhecimento da geometria do anel e da massa do planeta, independentemente, se o campo gravitacional do anel perturba ou não os movimentos de satélites vizinhos.

## Referências

1. I. R. Ferrin, Planetas com Anillos. Investigacion y Ciencia. Barcelona, n.43, p. 80 - 90, Abril 1980.
2. J. B. Pollack, J. N. Cuzzi, Anillos en el Sistema Solar. Investigacion y Ciencia. Barcelona, n. 64, p. 44 - 58, Enero 1982.
3. J. Kinoshita, Investigacion y Ciencia, Barcelona, n. 160, p. 53 - 61, Enero 1990.
4. U. R. Rao, et alli. IR Observations of the Solar Corona - aring Around the Sun? Nature. v. 289, n. 26, p. 779 - 780, February 1981.
5. F. A. Franklin, G. Colombo, A. F. Cook, A Dynamical Model for the Radial Structure of Saturn's Rings. II. Icarus, v. 15, p. 80 - 92, 1971.
6. W. I. McLaughlin, T. D. Talbot, On the mass of Saturn's rings. Monthly Notices R. Astr. Soc. London, v. 179, n. 3, p. 619 - 633, June 1977.
7. W. Lopes, Achatamento dos Planetas Gasosos e do Sol. Revista de Ensino de Física, São Paulo, v.11, p. 107 - 113, dezembro 1989. Considerando-se, entre os pontos dispostos radialmente no plano equatorial do planeta, a componente centrípeta, obtém-se a equação (4), do presente trabalho.
8. G. D. L. Ferreira, W. Lopes, Comentário sobre o artigo "Achatamento dos planetas gasosos e do Sol". Revista Brasileira de Ensino de Física. São Paulo, v.14, n. 2, p.120-121, agosto 1992.
9. J. L. Meriam, Mecânica: Estática. Barcelona, Editorial Reverte, v. 1, 1965. 405 p.
10. W. Lopes, O Limite de Roche. Revista Brasileira de Ensino de Física. São Paulo, v.14, n.1, p. 3 - 8, abril 1992. Os raios internos e externos dos anéis foram obtidos a partir desta referência.