Comentário sobre o experimento: "Verificação experimental da Lei dos Gases"

Guilherme F. Leal Ferreira (apos.)
FCM-IFSC-USP

Carta recebida em 12 de julho de 1995

Carta ao Editor

Prezado Sr. Editor do R.B.E.F.

Talvez seja conveniente tentar uma análise semi-quantitativa da interessante experiência[1] reportada nesta sob o título " Verificação experimental da lei dos gases", na qual se usou, para o fim em questão, o aumento de empuxo em um balão de borracha semi-inflado e submerso, provocado aquele pelo aumento da temperatura do sistema gás-líquido.

O nosso balão de borracha será a popular bexiga imaginada satisfazendo a relação entre a tensão γ, e o aumento de área

$$\gamma = K(S - S_0) \tag{1}$$

sendo S a área tensionada, S_0 a área inicial e K a constante elástica do material da bexiga. Na verdade a Eq.1 deve ser uma aproximação já que os elásticos não obedecem a uma relação linear força versus deformação. Os elásticos lineares obedecem, por exemplo, à seguinte relação entre força F, comprimentos deformado L e inicial L_0[2].

$$F = R_g T \left(\frac{L}{L_0^2} - \frac{L_0}{L^2} \right) . \tag{2}$$

sendo R_g a constante dos gases e T a temperatura absoluta. Mas como a análise intentada aqui é semiquantitativa ficaremos com a Eq.1.

A relação entre a pressão p dentro da bexiga cheia e a pressão exterior, que desprezado o efeito da água, será a atmosférica p_0, e a tensão γ é a conhecida relação de Laplace

$$p = p_0 + \frac{a\gamma}{R} \tag{3}$$

em que R é um raio de curvatura médio do balão cheio, a uma constante (que seria 2, se fosse esférico) e entre R e S, superfície do balão, admite-se relação do tipo

$$S = bR^2 \tag{4}$$

Também entre o volume V da bexiga cheia e o seu raio médio, admitimos a relação

$$V = cR^3 \tag{5}$$

As Eqs. 3, 4 e 5 são outras aproximações (b e c são constantes) necessárias à análise, embora razoáveis.

Para a bexiga não tensionada, teremos

$$S_0 = bR_0^2 \tag{6}$$

$$V_0 = cR_0^3 \tag{7}$$

sendo R_0 o raio médio naquela situação.

Sendo T_0 a temperatura absoluta inicial, vale a lei dos gases.

$$\frac{pV}{T_0} = nR_g \tag{8}$$

Portanto, para nós, a bexiga já está cheia à temperatura ambiente. Quando a temperatura do líquido é variada de ΔT, (suposta pequena comparada a T_0), a pressão varia de Δp e o volume de ΔV. Entre ΔT, Δp e ΔV, em vista da Eq.8, há a relação

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{= \Delta R}{T_0} . \tag{9}$$

Necessitamos calcular Δp como função de ΔV. Sendo ΔR a variação em R, tem-se das Eqs. (3,1,4) e (5)

$$\Delta p = -\frac{a\gamma}{R^2}\Delta R + \frac{a}{R}\Delta\gamma \tag{10}$$

$$\Delta\gamma = K\Delta S \tag{11}$$

$$\Delta S = 2bR\Delta R \tag{12}$$

relações que permitem achar Δp em função de ΔR, ou seja,

$$\Delta p = abK\left[1 + \frac{R_0^2}{R^2}\right]\Delta R \tag{13}$$

e usando-se ulteriormente aquela tirada da Eq.5,

$$\Delta V = 3cR^2\Delta R\ , \tag{14}$$

obtém-se Δp em função de ΔV e da Eq.9, finalmente, ΔV em função de ΔT.

Porém, em vez de trabalharmos com a grandeza K, é preferível tomarmos o excesso de pressão βp_0 no interior do balão cheio inicialmente, dado na Eq. 3 por $a\gamma/R$. Em vista das Eqs.1 e 4 K é

$$K = \frac{\beta p R}{b(R^2 - R_0^2)}\ . \tag{15}$$

βp_0 deve ser da ordem do décimo da atmosfera ou menor nas condições usuais.

Com isto a Eq.13 dando Δp, torna-se, dividindo-a por p, em termos de $\Delta R/R$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{a\beta(1 + R_0^2/R^2)}{1 - R_0^2/R^2}\frac{\Delta R}{R}\ . \tag{16}$$

Em termos de $\Delta R/R$, $\Delta V/V$ é, da Eq.5,

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta R}{R}\ . \tag{17}$$

Para um dado β, R_0/R decresce com a elasticidade da bexiga. Se R_0/R é pequeno

$$\frac{\Delta p}{p} \sim a\beta\frac{\Delta R}{R} \tag{18}$$

Como $a \simeq 2$ e $\beta < 0,1$, vê-se que $\Delta p/p$ será bem menor que $\Delta V/V$, Eq.17, e nesta situação ocorre a máxima variação de volume ΔV para um dado ΔT, como mostra a Eq. 9 (com $\Delta p/p$ desprezível).

No outro limite de baixa elasticidade, R/R_0 seria somente um pouco maior que 1 e pela Eq.16, $\Delta p/p$ poderia se tornar importante. Aliás isto é intuitivo porque a experiência não poderia ter sucesso fosse o material do balão rígido.

O fato de se usar balão semi-inflado na experiência da Ref.1 parece indicar que nos aproximamos do outro limite em que $\Delta p/p$ é pequeno - como aliás admitem os autores - e que deveríamos ter, então

$$\Delta V = \frac{V\Delta T}{T} \tag{19}$$

e uma relação quantitativa poderia ser extraida talvez do gráfico da Fig. 2 da Ref.1, a partir de alguns conhecimentos adicionais.

Estes são meus comentários ao interessantes trabalho da Ref.1.

1. L. V. Bagnato, S. R. Muniz e V. S. Bagnato, Rev. Bras. Ens. Fis., **17**, 104 (1995).
2. J.Frenkel, *Kinetic Theory of Liquids*, Dover Publ., N.Y., pg 482.