Se você não gostava dos polinômios de Legendre vai gostar agora

M. L. Bedran
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física
C.P. 68528, 21945-970 Rio de Janeiro (RJ), E-mail: bedran@if.ufrj.br

Trabalho recebido em 4 de abril de 1995

É um resultado bem conhecido que o potencial elétrico sobre o eixo de um disco (de raio R) uniformemente carregado com uma densidade superficial de cargas σ é:

$$V(r,0)=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{r^2+R^2}-r) \qquad (1)$$

a) Use este resultado, assim como o fato de que $P_l(1)=1$, para calcular os 3 primeiros termos na expansão

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(cos\theta) \qquad (2)$$

para o potencial do disco em pontos fora do eixo, para $r>R$. $P_l(cos\theta)$ são os polinômios de Legendre.

b) Ache o potencial para $r<R$ pelo mesmo método, usando a expansão

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(cos\theta) \qquad (3)$$

Obs: Divida a região interior em 2 hemisférios, acima e abaixo do disco. Não suponha que os coeficientes A_l sejam os mesmos nos 2 hemisférios.

Solucão

a)

$$V(r,0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(1)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}=eq.(1)$$

Para determinar os coeficientes B_l, façamos a expansão de $\sqrt{r^2+R^2}$ em série de Taylor. Lembrando que $r>R$ temos:

$$(r^2+R^2)^{1/2}=r\left(1+\frac{R^2}{2r^2}-\frac{R^4}{8r^4}+\frac{R^6}{16r^6}-...\right)$$

Igualando as duas séries, obtemos os coeficientes B_l:

$$B_0=\frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad B_1=0=B_3$$

$$B_2=\frac{-\sigma R^4}{16\epsilon_0} \quad B_4=\frac{\sigma R^6}{32\epsilon_0} \quad etc.$$

Logo, o potencial do disco para $r>R$ é:

$$V(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}-\frac{\sigma R^4}{32\epsilon_0 r^3}(3cos^2\theta-1)$$
$$+\frac{\sigma R^6}{256\epsilon_0 r^5}(35cos^4\theta-30cos^2\theta+3)-... \qquad (4)$$

onde reconhecemos o termo de monopolo $Q/4\pi\epsilon_0 r$. O termo de dipolo está ausente devido à simetria da distribuição de cargas em torno da origem do sistema de coordenadas, a qual coincide com o centro do disco.

b) Para pontos próximos ao disco, isto é, $r<R$,

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(cos\theta)$$

No eixo superior do disco, $\theta=0$, temos

$$V(r,0)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l=eq.(1)$$

Fazendo a expansão de $\sqrt{r^2+R^2}$ em termos de r/R, encontramos:

$$(r^2+R^2)^{1/2}=R\left(1+\frac{r^2}{2R^2}-\frac{r^4}{8R^4}+\frac{r^6}{16R^6}-...\right)$$

Igualando as duas séries achamos os coeficientes A_l e o potencial acima do disco para $r<R$:

$$V(r,\theta<\pi/2)=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}rcos\theta+\frac{\sigma r^2}{8\epsilon_0 R}(3cos^2\theta-1)-\frac{\sigma r^4}{128\epsilon_0 R^3}(35cos^4\theta-30cos^2\theta+3)+... \quad (5)$$

No eixo inferior do disco, $\theta=\pi$, temos

$$V(r,\pi)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(-1)=A_0-A_1r+A_2r^2-A_3r^3+...$$

Comparando com a série de Taylor, achamos o potencial abaixo do disco para $r<R$:

$$V(r,\theta>\pi/2)=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}rcos\theta+\frac{\sigma r^2}{8\epsilon_0 R}(3cos^2\theta-1)-\frac{\sigma r^4}{128\epsilon_0 R^3}(35cos^4\theta-30cos^2\theta+3)+... \quad (6)$$

que difere do potencial acima do disco apenas no sinal do segundo termo. Vejamos a importância deste sinal com o cálculo a seguir.

Calculemos o potencial e o campo elétrico de um disco infinito, isto é, o limite $R\gg r$:

$$V_{\text{acima}}=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}-\frac{\sigma z}{2\epsilon_0},$$

$$V_{\text{abaixo}}=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}+\frac{\sigma z}{2\epsilon_0},$$

onde $z=rcos\theta$.

$$\vec{E}_{\text{acima}}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\ ,$$

$$\vec{E}_{\text{abaixo}}=-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\ .$$

A mudança de sinal dá a descontinuidade do campo elétrico na superfície do disco carregado.

A solução deste problema, apesar de não ser analítica, permite o cálculo do potencial longe ou perto do disco carregado com a precisão desejada. A grande vantagem é que não foi necessário calcular nenhuma integral. A expressão analítica do potencial elétrico no eixo do disco foi usada como condição de contorno para a solução da equação de Laplace em termos dos polinômios de Legendre.

Referência

D.J. Griffiths: *Introduction to Electrodynamics*, 2nd ed. (Prentice-Hall).