

Estudo teórico - experimental do efeito da massa do fio sobre o período de oscilação de um pêndulo simples

(Theoretical-Experimental study of the effect of the mass of the wire on the oscillation period of a simple pendulum)

A. J. Palangana e P. R. B. Pedreira

Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Física

Av. Colombo, 5790, Maringá, PR, Brasil

Trabalho recebido em 25 de abril de 1994

Resumo

O tratamento teórico de H. L. Armstrong (Am. J. Phys. 44, 564 (1976)) sobre o efeito da massa do fio no período de um pêndulo simples é apresentado, em todos os seus detalhes matemáticos. O pêndulo composto, o período de um fio livre (massa pendular nula) e o período de um fio com massa pendular menor que a massa do fio, são também analisados. Do ponto de vista experimental foi desenvolvido um temporizador de intervalo, acoplado a um cronômetro digital. Este sistema possibilita as medidas dos períodos com precisão de 0,001 s. Os resultados experimentais são discutidos e confrontados com as previsões teóricas.

Abstract

The theoretical treatment of the H.L. Armstrong (Am. J. Phys. 44, 564 (1976)) for the investigation of the effect of the mass of the wire on the period of the a simple pendulum is presented in all their mathematical details. The compound pendulum, the period of a free wire (null pendular mass), the period of the mass of the a wire with pendular mass less than mass of the wire, are also analyzed. Experimental point of view were developed a interval timer connected to a digital chronometer. This system enables the measurements of period with precision of the 0.001 s. The experimental results are discussed and compared with theoretical previsions.

I. Introdução

O pêndulo simples constitui-se de uma massa puntiforme (M) presa à extremidade de um fio de comprimento l , que pode oscilar livremente em torno de um ponto de suspensão. Quando a massa M é deslocada de sua posição de equilíbrio, mantendo-se o fio tensionado, começa a oscilar. A massa do fio (m) pode, sob determinadas condições, influenciar o seu movimento. Este é o objeto de estudo teórico-experimental do presente trabalho.

Num primeiro momento, retomamos o tratamento teórico de H. L. Armstrong^[1] sobre o efeito da massa do fio (considerado flexível) no período de oscilação de

um pêndulo simples (PMS). Apresentamos os detalhes deste tratamento matemático. Os casos de interesse, como por exemplo: o pêndulo composto ou pêndulo físico (PF), o período de um fio livre (PFL), isto é com massa pendular nula e o período de um fio com massa pendular menor que a massa do fio (PMM), são também discutidos^[1].

Em seguida, desenvolvemos a parte experimental para as medidas dos períodos nos diferentes casos mencionados. Para tal finalidade, foi montado um temporizador de intervalo^[2], acoplado a um cronômetro digital. Este sistema, quando acionado por uma fotocélula, fornece as medidas dos períodos dos pêndulos. Os resul-

tados experimentais são comparados e discutidos com as previsões teóricas^[1].

II. Fundamentos teóricos

Para obter a equação de movimento do pêndulo simples, fazemos analogia com a corda vibrante^[3], uma vez que estamos considerando o fio de massa m , como sendo flexível. A figura (1) mostra um pêndulo simples (PMS). Consideramos o movimento de pequena amplitude, de forma que a trajetória descrita seja ao longo de uma linha reta, que passa pelo eixo O_y . Como o movimento se dá ao longo do eixo O_y , a resultante das forças aplicada a um elemento de comprimento Δx , segundo as leis de Newton, é dada por:

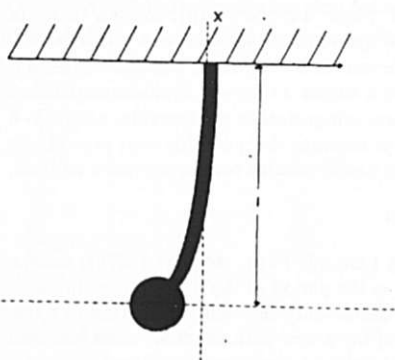


Figura 1. Pêndulo com massa de fio não desprezível (figura extraída da ref. 1).

$$[M + \rho x] \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - g[M + \rho x] \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x = \rho \Delta x \partial^2 y / \partial t^2 \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade, $\rho (= m/l)$ a densidade linear do fio e $\partial^2 y / \partial t^2$ a aceleração de um elemento de massa em Δx . Dividindo por Δx e no limite de $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos:

$$g \left[M + \frac{mx}{l} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{gm}{l} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

A solução da equação (2) pode ser obtida via método de separação de variáveis, ou seja: $y(x, t) = F(x)G(t)$. Substituindo $y(x, t)$ na equação (2)

$$g \frac{(M + \rho x)}{F} \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\rho g}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = k \quad (3)$$

sendo k uma constante. A parte temporal na equação (3) é característica do movimento harmônico simples (MHS). A solução do MHS é dado por

$$G = A \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

onde A e ϕ são a amplitude e fase do MHS, respectivamente. A frequência angular (ω) do MHS é definida por: $\omega^2 = \frac{k}{\rho}$. Introduzindo (4) em (3) e em seguida efetuando uma mudança de variável $z = M/ml + x$, obtemos

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{\omega^2}{g} y = 0 \quad (5)$$

Naturalmente (5) é a equação diferencial de Bessel^[5]. No entanto, a sua forma padrão é obtida introduzindo uma nova variável $z' = 2\omega(z/g)^{1/2}$ em (5),

$$\frac{d^2 y}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \frac{dy}{dz'} + y = 0 \quad (6)$$

cujas soluções são da forma:

$$y = A_1 J_0(z') + A_2 Y_0(z') \quad (7)$$

onde J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem 0, respectivamente, A_1 e A_2 são constantes arbitrárias. Em $x = 0$ a força segundo o eixo O_y é $Mg \frac{\partial y}{\partial x}$ e em $x = l$, $y = 0$. Estas condições de contorno aplicadas à equação (7) resultam em

$$A_1 J_0[\alpha] + A_2 Y_0[\alpha] = 0 \quad (8)$$

$$A_1 [\psi g J_1(\beta) - \omega^2 J_0(\beta)] + A_2 [\psi g Y_1(\beta) - \omega^2 Y_0(\beta)] = 0 \quad (9)$$

onde

$$\alpha = \left[4 \frac{\omega^2 (M+m)}{g} \frac{m}{l} \right]^{1/2}$$

$$\beta = \left[\frac{4\omega^2 M}{g} \frac{m}{l} \right]^{1/2}$$

e

$$\psi = \frac{\omega(m)^{1/2}}{(Mgl)^{1/2}}$$

$J_1(\beta)$ e $Y_1(\beta)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem 1. Para que as equações (8) e (9) apresentem soluções físicas o determinante de seus coeficientes deve ser zero,

$$\frac{\omega^2 (J_0(\beta) Y_0(\alpha) - Y_1(\beta) J_0(\alpha))}{\psi g (J_1(\beta) Y_0(\alpha) - Y_1(\beta) J_0(\alpha))} = 1 \quad (10)$$

Uma solução aproximada para a equação (10), é obtida, utilizando-se as formas assintóticas das funções

de Bessel^[4], quando os argumentos tendem a infinito. Dessa maneira a equação (10) fica:

$$\omega \left(\frac{lM}{mg} \right)^{1/2} \tan(\gamma - \epsilon) = 1 \quad (11)$$

onde

$$\gamma = z\omega \left(\frac{l}{g} \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \right)^{1/2}$$

$$\epsilon = z\omega \left(\frac{Ml}{gm} \right)^{1/2}$$

Desenvolvendo em série de potências o termo $(M/m + 1)^{1/2}$ até segunda ordem, e substituindo na equação (11), temos

$$\omega^2 \left(\frac{l}{g} \right) \left(1 + \frac{m}{3M} \right) = 1 \quad (12)$$

onde a frequência angular do movimento periódico é definida por $\omega = 2\pi/T$, sendo T o período de oscilação do pêndulo. Considerando os dois primeiros termos da expansão em série de potências de $(1 + m/3M)^{1/2}$ encontramos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{m}{6M} - \frac{1}{72} \frac{m^2}{M^2} \right) \quad (13)$$

Este resultado mostra o efeito da massa do fio^[1] no período de oscilação de um pêndulo simples, onde $T_0 = 2\pi(l/g)^{1/2}$ é o período de um pêndulo simples e $T_0 \left(\frac{m}{6M} - \frac{1}{72} \frac{m^2}{M^2} \right)$ o termo de correção de um pêndulo simples real, na aproximação considerada. A contribuição dos termos de ordem superior na eq.(13) transcende a precisão das medidas experimentais, limitada ao milésimo de segundos (ver seção III), por isso foram desprezados. Neste domínio a aproximação até os termos de segunda ordem é suficiente. Este procedimento é observado em todo o trabalho.

A seguir determinamos o período de oscilação de um pêndulo composto. O fio flexível é, agora, substituído por uma barra rígida mantendo-se os mesmos valores para m , M e l , respectivamente. Este é o caso de um pêndulo composto ou (físico) ^[5] cujo período pode ser obtido através da equação:

$$T = 2\pi \left(\frac{K^2}{gb} \right)^{1/2} \quad (14)$$

onde K é o raio de giração do sistema e b a posição do centro de massa do sistema. O momento de inércia (I) da barra, com relação ao seu ponto de suspensão é dado por

$$I = Ml^2 + \frac{m}{3}l^2 = (m + M)K^2 \quad (15)$$

e a posição do centro da massa do sistema é definida na forma

$$b = \frac{(Ml + ml/2)}{(M + m)} \quad (16)$$

Substituindo as equações (15) e (16) em (14), resulta

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{1/2} \left[\frac{\left(1 + \frac{m}{3M} \right)}{\left(1 + \frac{m}{2M} \right)} \right]^{1/2} \quad (17)$$

Da mesma forma como no caso anterior, fazendo uma expansão em série até os termos de segunda ordem na equação (17),

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{m}{12M} + \frac{11}{288} \frac{m^2}{M^2} \right) \quad (18)$$

Este resultado mostra que o fio quando flexível, atua no sentido de aumentar o período de oscilação do pêndulo (eq. 13), e quando rígido^[1,6] diminui o referido período de oscilação, segundo a equação (18).

Finalmente, do ponto de vista teórico^[1], discutimos mais dois casos particulares: o fio oscilando livremente com massa pendular $M = 0$ (PFL) e a oscilação do sistema com a massa do fio $m > M$ (PMM). A formulação do problema para estes dois casos está estabelecida na equação (10). Na referida equação fazemos $M = 0$, juntamente, com a condição de contorno $y = 0$ e $x = l$ assim:

$$A_1 J_0(S) + A_2 Y_0(S) = 0 \quad (19)$$

onde $S = 2\omega(l/g)^{1/2}$. Como o movimento é sempre finito, Y_0 se torna infinito quando S se aproxima de zero. Por este motivo, escolhemos $A_2 = 0$ na equação (19). A solução trivial ($A_1 = 0$), fisicamente, não interessa. Portanto, para $A_1 \neq 0$ e para que a equação (19) seja satisfeita $J_0(S) = 0$. A partir dos valores de $J_0(S)$ da função de Bessel^[4], o período de oscilação é obtido por

$$T = \frac{2\pi}{1.2024} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (20)$$

A equação (20), demonstra ser o período de oscilação de um fio oscilando livremente, menor quando comparado com o período de um pêndulo simples. Uma solução aproximada para o caso (PMM) pode ser considerada, supondo o fio de comprimento l e massa pendular M de comprimento d com a mesma densidade linear de massa do fio. Neste sentido, o comprimento efetivo do

sistema com relação ao ponto de suspensão passa a ser: $l' = l(1 + M/m)$. Substituindo este comprimento na equação (20) e expandindo em série até o termo de segunda ordem,

$$T = \frac{2\pi}{1.2024} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{M}{2m} - \frac{1}{8} \frac{M^2}{m^2} \right) \quad (21)$$

Comparando as equações (20) e (21), observa-se que para um sistema com massa pendular menor que a massa do fio o período de oscilação é maior com relação ao fio oscilando livremente. As equações (13), (18) e (21) são fundamentais para a investigação experimental que faremos na sequência do trabalho.

III. Experimental

O diagrama simplificado do arranjo experimental, para as medidas dos períodos de oscilações dos pêndulos nos casos estudados teoricamente, é mostrado na fig. 2. Um eléto imã com intensidade magnética suficiente para sustentar a massa pendular na posição inicial, quando desligado, possibilita a oscilação do sistema. Neste momento, ocorre a incidência de um feixe de luz sobre a fotocélula, que por sua vez aciona o sistema eletrônico travando o contador de pulsos (os pulsos chegam ao contador à razão de 1000 por segundo). O conjunto fotocélula lâmpada (fonte de luz) é posicionado de tal forma que o feixe de luz da lâmpada para a fotocélula é perpendicular ao plano de oscilação e pode ser interrompido por alguma parte do sistema oscilador preferencialmente a massa pendular.

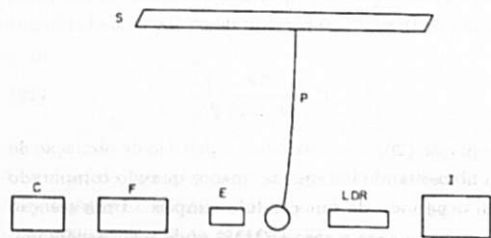


Figura 2. Arranjo experimental: S - suporte; P - pêndulo, C - cronômetro, F - fonte de luz, E - eletroímã, LDR - fotocélula, I - temporizador de intervalo.

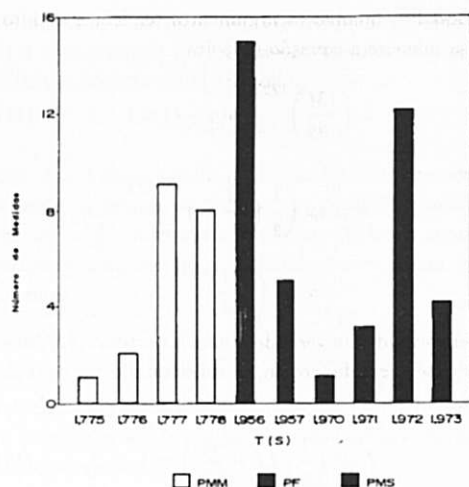


Figura 3. Circuito referente a parte eletrônica.

No momento em que o feixe é interrompido o contador de pulsos começa a contar. O pêndulo segue seu movimento natural, atinge velocidade zero e retorna cruzando novamente o feixe de luz (2ª vez). O contador é indiferente à esta interrupção. A massa pendular vai até o extremo do movimento e inicia um novo ciclo, cruzando o feixe de luz mais uma vez. Desta feita a interrupção do feixe determina o fim da contagem dos pulsos e o número de pulsos contados é o número de milissegundos transcorridos durante este período. Assim podemos contar tempo durante um período, desprezando a segunda interrupção do feixe de luz, dois períodos desprezados a 2ª, 3ª e 4ª interrupções e assim por diante para quanto períodos desejarmos. Vale ressaltar, no entanto, que as medidas dos períodos independem da posição do conjunto fotocélula-lâmpada (ver fig. 3). Este sistema possui uma chave seletora de períodos, e quando adequadamente posicionada, exhibe um cronômetro digital o tempo do número de períodos de oscilações.

As massas dos fios e as massas pendulares (esferas metálicas) foram medidas em uma balança analítica. Os comprimentos dos fios e os raios das esferas (r) foram determinadas por meio de um catetômetro e paquímetros, respectivamente. Neste trabalho utilizamos os seguintes valores: $m = 37,211g$, $M = 131,324g$, ($M = 7,850g$ e $r = 0,002m$ para o sistema-PMM), $r =$

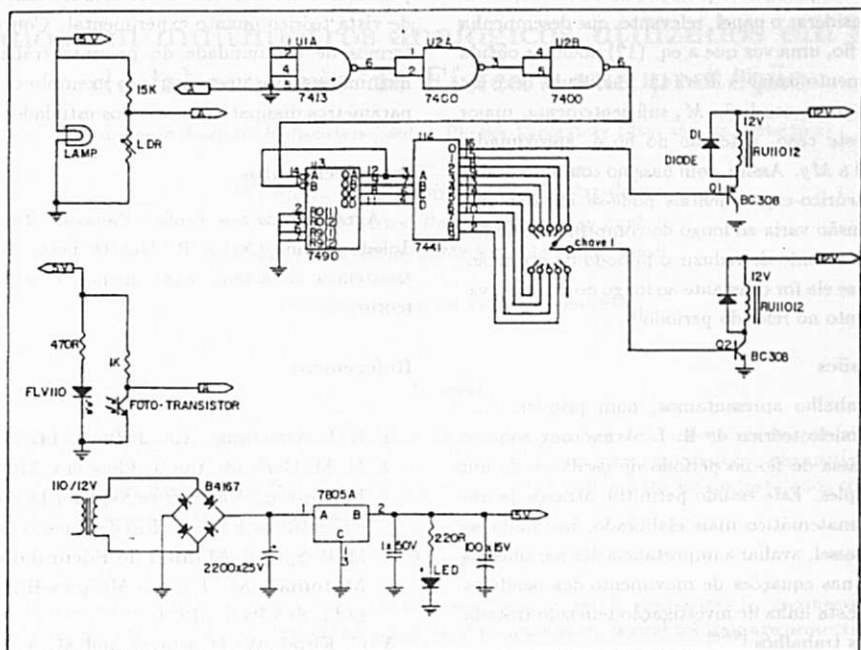


Figura 4. Número de medidas versus períodos.

0,016m, $l = 0,974\text{m}$ e a aceleração da gravidade $g = 9,787\text{ m/s}^2$, respectivamente. O freqüencímetro digital, utilizado na função de cronômetro, fornece as medidas dos períodos com precisão de 0,001 seg. Em todos os experimentos consideramos a condição de pequenas oscilações, ou seja uma inclinação máxima do pêndulo em relação a vertical de, aproximadamente, 5° .

IV. Resultados e Discussões

Os resultados experimentais obtidos para os períodos de oscilações estão indicados na tabela I. Estes valores referem-se à média de uma série de vinte medidas (ver fig. 4). Os períodos teóricos foram calculados a partir das eqs. (13, 18 e 21) (ver tabela I), onde se observa um excelente acordo teórico-experimental entre os períodos, particularmente, nos dois primeiros casos. Neste sentido, os dados experimentais demonstram, claramente, o aumento do período devido a flexibilidade do fio, da mesma forma que a sua diminuição está associada à substituição do fio pela barra rígida no experimento do pêndulo composto.

Tabela I - Períodos Teórico-Experimentais.

Pêndulos	T_r^* (seg)	T_r^{**} (seg)	Desvio (%)
PMS	1,970	1,972	0,10
PF	1,957	1,956	0,05
PMM	1,815	1,777	2,10

* teórico ** experimental

De outra maneira, para um sistema oscilando com $m > M$ o período de oscilações segundo a eq. (21), é maior quando comparado, mantendo-se os mesmos valores para o comprimento e a massa do fio pendular, com o período de um pêndulo simples. Os nossos resultados experimentais são concordantes com este dado, embora o desvio porcentual seja superior aos casos anteriores (ver tabela I). As causas prováveis desta diferença, podem estar relacionadas com as aproximações teóricas realizadas e instabilidades no sistema de oscilação, durante a realização das medidas. A reprodutibilidade destes experimentos foi verificada, o que demonstra confiabilidade nestes resultados.

Por fim, para um fio oscilando livremente (PFL), o período de oscilação é menor que o referido período de

um pêndulo simples (ver eq. 20). Neste sentido, é importante considerar o papel, relevante, que desempenha a tensão no fio, uma vez que a eq. (12) pode ser obtida via procedimento usual^[1]. Para tal finalidade, deve ser considerada como condição M , suficientemente, maior que m . Neste caso, a tensão no fio é, aproximadamente, igual a Mg . Assim, com base no conjunto destes resultados teórico-experimentais pode-se afirmar que, quando a tensão varia ao longo do comprimento do fio, o efeito é no sentido de reduzir o período de oscilação. No entanto, se ela for constante ao longo do fio, observa-se um aumento no referido período^[1].

V. Conclusões

Neste trabalho apresentamos, num primeiro momento, o modelo teórico de H. L. Armstrong sobre o efeito da massa do fio no período de oscilação de um pêndulo simples. Este estudo permitiu, através de um formalismo matemático mais elaborado, incluindo as funções de Bessel, avaliar a importância dos parâmetros de interesse nas equações de movimento dos pêndulos estudados. Esta linha de investigação tem sido tratada em diferentes trabalhos^[6-8].

Posteriormente, desenvolveu-se um arranjo experimental para as medidas dos períodos, sendo construído para tal finalidade um temporizador de intervalo. Os resultados destes experimentos apresentaram uma boa concordância com as previsões teóricas. A importância da massa do fio e até que ponto ela influi no sistema de oscilação assim como caráter rígido e flexível do fio

pendular é apresentada, neste estudo, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Concluindo, em termos de continuidade do presente trabalho, achamos interessante investigar por exemplo os efeitos de parâmetros dissipativos nos casos estudados.

Agradecimentos

Agradecemos aos Profs. Paulo de Tarso Sica de Toledo e Luis Carlos R. Duarte pelas discussões e assistência ao arranjo experimental e ao tratamento teórico.

Referências

1. H. L. Armstrong, Am. J. Phys. **44**, 564 (1976).
2. M. M. Garland, Am. J. Phys. **44**, 710 (1976).
3. E. Kreyszig, *Matemática Superior* Livros Técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro (1975).
4. M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Editora McGraw-Hill do (Brasil Ltda. São Paulo, 1974).
5. C. Kittel, W. D. Knight and M. A. Ruderman, *Curso de Física de Berkeley*, V.1, Editora Edgard Blucher. SP (1970).
6. R. J. Gleiser, Am. J. Phys. **47**, 640 (1979).
7. S. T. Epstein and M. G. Olsson, Am. J. Phys. **45**, 671 (1977).
8. C. G. Montgomery, Am. J. Phys. **46**, 411 (1978).