Propagação da Luz em um Meio Anisotrópico Uniaxial

(Light Propagation in an Uniaxial Anisotropic Media)

Eden V. Costa
Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense
Avenida Litorânea s/n, Boa Viagem, 2410-340, Niterói, RJ, Brasil

Trabalho recebido em 1 de julho de 1993

Resumo

A grande maioria dos livros texto de óptica, nas seções referentes à propagação da luz em meios anisotrópicos, apresentam, sem provar, a propriedade destes materiais transformarem um feixe incidente de luz não polarizada, em dois linearmentes polarizados ortogonalmente. Neste artigo vamos provar esta propriedade e desenvolver a equação que nos permite determinar a separação angular entre eles.

Abstract

The great number of optics textbooks, in the sections concerning to light propagation through anisotropic media, present to modify an whithout proving the property of these materials incident beam of unpolarized light into two orthogonal linearly polarized beam. In this paper we prove this property and develop the equation which allows to determine the angular separation betweem them.

Introdução

Certos cristais, embora homogêneos são anisotrópicos, isto é, através deles as propriedades ópticas nao são idênticas em todas direções. Um feixe luminoso refratado por um destes cristais, divide-se em dois. O ordinário, que se associa um índice de refração ordinário, n_0, e o extraordinário, que seu índice de refracão, n_e, varia com a direção. Cristais com estas propriedades são chamados birrefringentes. Os cristais birrefringentes que apresentam apenas uma direção particular, eixo óptico, na qual as velocidades dos dois feixes são iguais, são chamados uniaxiais.

Como o índice de refração do feixe extraordinário varia com a direção, é comum tomar como referência o valor na direção perpendicular ao eixo óptico.

Os livros textos de ótica, em sua maioria, além de afirmarem, sem provar, o aparecimento dos dois feixes, afirmam também que são linearmente polarizado ortogonalmente. Neste artigo vamos provar estas afirmações e desenvolver a equação que dá a separação angular entre os feixes.

2. Polarização linear

O valor instantâneo do campo elétrico de uma onda eletromagnética plana; com frequência angular ω, vetor de onda $\mathbf{k}$ e ângulo de fase ϕ, é [1]:

$$E(r,t) = E_0 \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \phi] \tag{2.1}$$

Uma onda é polarizada quando, ϕ e E_{0i}/E_{0j} são constantes[2]. E_{0i} e E_{0j}, são as componentes de E_0 segundos os eixos x, y e z. Quando:

$$\phi = n\pi \quad n = 0, 1, 2, ...$$

A onda é linearmente polarizada.

3. Equações básicas

As equações de Maxwell para um meio, uniforme, não condutor, livre de fontes e não magnético, são [1]:

$$\nabla \cdot D = 0\ , \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot B = 0\ , \tag{3.2}$$

$$\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t} , \quad (3.3)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} . \quad (3.4)$$

Onde:

$$D = \epsilon E \quad (3.5)$$

$$B = \mu_0 H \quad (3.6)$$

Aplicando o rotacional na equação (3.3) e usando a identidade, $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \times E) - \nabla^2 \vec{E}$, podemos escrever:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Para uma onda eletromagnética plana, com fase constante, a equação (3.7), pode ser escrita por:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 E + \mu_0 \epsilon \omega^2 E = 0 \quad (3.8)$$

Em um meio anisotrópico, ϵ é uma matriz, se utilizarmos um sistema de eixos característico do meio, chamado principal, a matriz é diagonal. Assim:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} .$$

Em um meio uniaxial, em que o eixo ótico coincide com o eixo z, $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Como $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ [1], ϵ_0 é a permissividade do vácuo, então $n_x = n_y = n_0$ e $n_z = n_e$. Assim, a equação (3.1) fica:

$$\epsilon_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \epsilon_z \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 . \quad (3.9)$$

Como consequência,

$$\nabla \cdot E = (1 - \gamma^2) \frac{\partial E_z}{\partial z} , \quad (3.10)$$

Onde, $\gamma^2 = \epsilon_z / \epsilon_x = n_e^2 / n_0^2$.

Aplicando o gradiente na equação (3.10) e comparando-a com a equação (3.8), temos:

$$\nabla^2 \vec{E} - (1 - \gamma^2) \nabla \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \mu_0 \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0 . \quad (3.11)$$

A equação (3.11) escrita para cada componente é:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - (1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \mu_0 \omega^2 \epsilon_x E_x = 0 . \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - (1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} + \mu_0 \omega^2 \epsilon_y E_y = 0 . \quad (3.12b)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \omega^2 \epsilon_z E_z = 0 . \quad (3.12c)$$

$v_i = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_i}$, $n_i = c/v_i$, e $k_0 = \omega/c$. [1] O conjunto de equações (3.12) nos permite estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em um meio anisotrópico uniaxial homogêneo.

Substituindo as componentes da equação (2.1), para $\phi = 0$, no conjunto de equações (3.12), temos o sequinte sistema:

$$[-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + n_0^2 k_0^2] E_{0x} + (1 - \gamma^2) k_x k_z E_{0z} = 0, \quad (3.13a)$$

$$[-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + n_0^2 k_0^2] E_{0y} + (1 - \gamma^2) k_y k_z E_{0z} = 0, \quad (3.13b)$$

$$[-(k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2 k_z^2) + n_e^2 k_0^2] E_{0z} = 0, \quad (3.13c)$$

Se,

$$E_{0z} = 0, \quad (3.14)$$

então:

$$E_{0x} + E_{0y} \neq 0, \quad (3.15)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - n_0^2 k_0^2 = 0 \ . \qquad (3.16)$$

A equação (3.16) define um vetor de onda com módulo constante, independente da direção. Ele gera uma esfera de raio $n_0 k_0$. Neste caso o meio comporta-se como isotrópico.

A partir da equação (3.1), podemos determinar a razão entre E_{0x} e E_{0y}.

$$\frac{E_{0x}}{E_{0y}} = -\frac{k_y}{k_x} \ . \qquad (3.17)$$

Logo, a onda é linearmente polarizada.

Se chamarmos de plano principal o plano formado pelo eixo óptico e a direção de propagação, então a onda está polarizada perpendicularmente ao plano principal. Esta é a onda ordinária.

Se,

$$E_{0z} \neq 0 \ , \qquad (3.18)$$

$$E_{0x} = \frac{(1-\gamma^2) k_x k_z E_{0z}}{k_0^2 n_0^2 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} \ , \qquad (3.19)$$

$$E_{0y} = \frac{(1-\gamma^2) k_y k_z E_{0z}}{k_0^2 n_0^2 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} \ , \qquad (3.20)$$

$$1 = \frac{k_x^2}{k_0^2 n_e^2} + \frac{k_y^2}{k_0^2 n_e^2} + \frac{k_z^2}{k_0^2 n_0^2} \ . \qquad (3.21)$$

A equação (3.21) define um vetor de onda cujo módulo varia entre $n_e k_0$ e $n_0 k_0$, portanto, dependente da direção. Ele gera um elipsoide de revolução, o que mostra um meio anisotrópico. Figura 1.

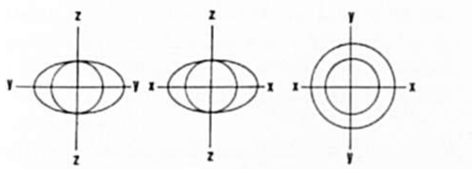

Figure 1. Onda ordinária e extrordinária em um cristal birrefringente uniaxial, com o eixo óptico paralelo ao eixo z. $n_e < n_0$.

A razão entre os valores das amplitudes das componentes do campo elétrico mostra, novamente, uma onda linearmente polarizada, porém no plano principal. Esta onda é a extraordinária.

As equações (3.14), (3.15) e (3.17), nos permite chegar ao vetor $E_{0(ord)}$, amplitude da onda ordinária.

$$E_{0(ord)} = E_{0xi} + (-k_x/k_y) E_{0xj} \ .$$

Da mesma forma, com as equações, (3.18)-(3.20), podemos chegar ao vetor $E_{0(ext)}$, amplitude da onda extraordinária.

$$E_{0(ext)} = \frac{[(1-\gamma^2) k_z E_{0z}]}{k_0^2 n_0^2 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} (k_{xi} + k_{yj}) + E_{0zk} \ .$$

A ortogonalidade entre $E_{0(ord)}$ e $E_{0(ext)}$ é verificada facilmente devido ao produto escalar nulo entre eles.

4. Equação de separação entre os feixes

A elipse cujos semi-eixos são os índices de refração n_0 e n_e, figura 2, tem a seguinte equação

$$n^2 \left(\frac{sen^2\theta}{n_e^2} + \frac{cos^2\theta}{n_0^2} \right) = 1, \qquad (4.1)$$

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{n^3}{2} \left[\left(\frac{1}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_0}\right)^2 \right] sen 2\theta \ .$$

A tangente do ângulo γ, entre a direção de propagação dos feixes ordinário e extraordinário, é:

$$tg\gamma = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\theta} = \frac{(n_0^2 - n_e^2) sen 2\theta}{2(n_e^2 sen^2\theta + n_0^2 cos^2\theta)} \qquad (4.2)$$

Se $\theta = 0$, $n = n_0$ e $\gamma = 0$. Como nesta situação $E_{0z} = 0$ e $k_x = k_y = 0$. Então, pelas equações, (3.19) e (3.20), temos:

$$E_{0x} = E_{0y} = 0 \ .$$

Logo, não existe onda extraordinária propagando-se paralela ao eixo ótico. Somente a solução para onda ordinária é possível.

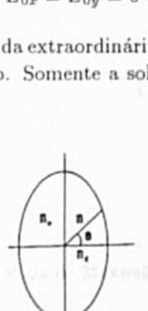

Figure 2. Elipse, cujos semi-eixos são: n_e e n_0.

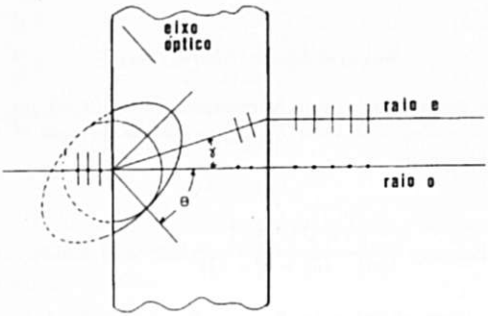

Figure 3. Feixe luminoso dividido em duas componentes, ordinária e extraordinária.

Para $\theta = \pi/2$, temos $n = n_e$ e $\gamma = 0$. Se a propagação é segundo o eixo x, então $k_y = k_z = 0$. Logo:

$$E_{0x} = E_{0y} = 0 \,,$$

$$E_{0z} \neq 0 \,.$$

A onda extraordinária se superpõe à ordinária. De forma idêntica ocorre quando a propagação é na direção y. Separação angular ocorre para $0 < \theta < \pi/2$. Figura 3.

Os meios materiais com a propriedade de transmitir ondas polarizadas, recebem o nome de polarizadores. A polarização causada nos meios birrefringentes, recebe o nome de polarização por dupla refração. Os meios birrefringentes são classificados como: positivos ou negativos, bastando para isso, $n_e > n_0$ ou $n_e < n_0$.

Referências

1. John R. Reitz, Frederick J. Milford and Robert W. Christy. *Foundation of Eletromagnetic Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, U.S.A., 1982, cap. 16.
2. M. Born and E. Wolf. *Principle of Optics*. Pergamon Press, New York, 1975, cap. I.