

## Comportamento crítico no pêndulo simples

Paulo Murilo Castro de Oliveira

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Av. Litorânea s/n, Boa Viagem, 24210-340, Niterói, RJ, Brasil

Trabalho recebido em 24 de janeiro de 1995

### Resumo

Apresenta-se a solução numérica do problema do pêndulo rígido simples. Trata-se de uma massa pontual presa à extremidade de uma haste rígida muito mais leve, o conjunto podendo girar livremente em torno de um eixo horizontal que passa pela outra extremidade da haste. Considerando o sistema inicialmente parado na posição vertical da articulação para baixo, imprime-se uma velocidade inicial à massa. Caso o valor desta velocidade seja menor que um certo valor crítico, o movimento é oscilatório e a massa percorre um arco de circunferência com idas e voltas sucessivas. Ao contrário, se a velocidade inicial exceder o valor crítico, a massa percorre periodicamente a circunferência completa, sempre no mesmo sentido. Neste texto são analisados a transição entre estes dois regimes e o ralentamento crítico que ocorre nas proximidades desta transição.

### 1. Introdução

Vamos considerar um pêndulo formado por uma massa presa na extremidade de uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e massa desprezível. Vamos também considerar desprezíveis os efeitos do atrito na articulação da outra extremidade, bem como os efeitos da resistência do ar ao movimento. Nestas condições, a lei de Newton aplicada a este sistema se escreve como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \text{sen}(\theta), \quad (1)$$

onde  $\theta$  é o ângulo instantâneo entre a haste e a vertical, medido do ponto de articulação para baixo. A intensidade do campo gravitacional terrestre é representada por  $g$ , e o tempo por  $t$ . A haste está inicialmente pendurada na posição vertical, e, através de uma pancada seca, imprime-se uma velocidade inicial  $v_0$  à massa.

Caso a velocidade inicial  $v_0$  seja pequena, o movimento subsequente é oscilatório, uma vez que o sistema não tem energia suficiente para atingir a posição vertical, oposta ao seu ponto de equilíbrio estável. Ao contrário, se  $v_0$  for grande, a massa consegue atingir o ponto mais alto da trajetória circular ainda com al-

guma velocidade, passar por ele, e continuar girando sempre no mesmo sentido. Em ambos os casos o movimento é periódico, ocorrendo no primeiro caso inversão de velocidade o que não ocorre no segundo caso.

O valor crítico

$$v_c = 2\sqrt{g\ell} \quad (2)$$

separa os dois regimes possíveis de movimento, ou seja, o movimento é oscilatório para  $v_0 < v_c$ , e circular sempre no mesmo sentido para  $v_0 > v_c$ . O valor crítico da equação (2) pode ser determinado por argumentos simples de conservação de energia.

Para velocidades iniciais muito próximas ao valor crítico  $v_c$  tanto acima quanto abaixo deste, a massa passa muito tempo próxima do ponto mais alto da trajetória circular, com velocidades muito baixas. Teoricamente, se  $v_0$  pudesse ser igualada *exatamente* ao valor crítico  $v_c$ , a massa gastaria um tempo infinito para atingir o ponto mais alto da trajetória circular. Desta maneira, o período  $T$  do movimento aumenta indefinidamente à medida em que  $v_0$  se aproxima de  $v_c$  de ambos os lados (ver figura 1).

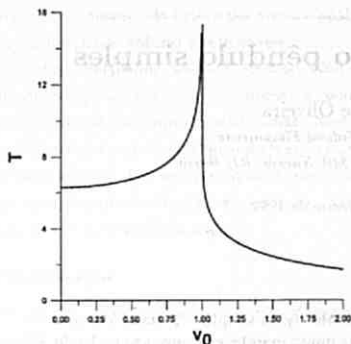


Figura 1. Gráfico do período  $T$  em função da velocidade inicial  $v_0$ , obtido numericamente. Foram usados neste caso os valores  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  e  $\ell = 2 \text{ m}$ , mas as escalas dos eixos foram convenientemente escolhidas para que o gráfico se aplique a quaisquer outros valores  $g$  e  $\ell$ :  $T$  é medido em unidades de  $\sqrt{g\ell}$ , e  $v_0$  em unidades de  $v_c = 2\sqrt{\ell/g}$ .

### Pequenas Oscilações

O problema do pêndulo é geralmente tratado no segundo grau ou no ciclo básico das universidades apenas no limite de pequenas oscilações, onde a solução é simples. Neste limite, o ângulo  $\theta$  varia sempre restrito a um pequeno intervalo em torno de zero, e o  $\sin(\theta)$  que aparece na equação (1) pode ser aproximado pelo próprio  $\theta$  medido em radianos. Dentro desta aproximação, a solução da equação é simplesmente

$$\theta(t) \cong \theta_A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right), \quad (3)$$

onde  $\theta_A$  é a amplitude de oscilação relacionada com  $v_0$  na forma

$$\theta_A \cong \frac{v_0}{\sqrt{g\ell}}, \quad (4)$$

e o período vale

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (5)$$

A relação (4) pode ser obtida igualando-se  $v_0$  ao produto da velocidade angular inicial  $\theta_A \sqrt{g\ell}$  (derivada da equação (3) em  $t = 0$ ) pelo raio  $\ell$  da trajetória. A relação (5) se obtém igualando o argumento da função  $\sin$  na equação (3) a  $2\pi$ , que é o ângulo correspondente a uma oscilação completa.

A aproximação que deu origem às equações (3), (4) e (5) é válida para pequenos valores da velocidade inicial, ou seja  $v_0 \ll v_c$ . No entanto, bastante antes da situação crítica (por exemplo quando a amplitude de oscilação é próxima de  $90^\circ$ ), esta aproximação já deixa muito a desejar. Note por exemplo que o período do movimento não depende da velocidade inicial  $v_0$  (e nem da amplitude  $\theta_A$ ), segundo a equação (5). Porém, esta independência só é aproximadamente verdadeira para velocidades iniciais (e amplitudes) muito pequenas, como pode ser observado no lado esquerdo da figura 1.

Um exercício interessante é o cálculo da velocidade inicial necessária para que a amplitude do movimento seja por exemplo, de  $30^\circ$ . Novamente através de argumentos simples de conservação de energia, chega-se a resposta  $v_0 = \sqrt{(2 - \sqrt{3})g\ell} \cong 0.26v_c$ , menor do que o valor crítico  $v_c$ . A aproximação (4), aplicada a este valor de  $v_0$  daria uma amplitude  $\theta_A \cong \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  radiano ou  $29.66^\circ$ , bastante próxima do valor correto  $30^\circ$ . Neste caso, o erro da aproximação é de apenas 1%.

No mesmo espírito do parágrafo anterior, a velocidade inicial necessária para que a amplitude seja de  $90^\circ$  vale  $v_0 = \sqrt{2g\ell} \cong 0.71v_c$ , também menor (mas não muito) do que o valor crítico. A aproximação (4) daria  $81^\circ$  para a amplitude, ao invés do valor correto,  $90^\circ$ . Neste caso o erro já subiu para 10%. Para uma amplitude de  $120^\circ$ , teríamos  $v_0 = \sqrt{3g\ell} \cong 0.87v_c$ , e a aproximação (4) daria  $99^\circ$  ao invés de  $120^\circ$ . O erro subiu ainda mais, desta vez para 17%. Quanto mais próximo da situação crítica, na qual a amplitude seria de  $180^\circ$ , piores serão os resultados obtidos das aproximações (3), (4) e (5).

### Solução Numérica

Perto da região crítica, ou seja, quando  $v_0$  se aproxima de  $v_c$ , vamos recorrer ao método numérico para resolver a equação (1). O método se baseia na discretização do tempo, transformando a equação diferencial (1) numa equação de diferenças finitas. Isto é feito adotando-se um pequeno intervalo  $\Delta t$  como unidade de tempo, e considerando-se apenas valores inteiros  $0, 1, 2, 3, \dots$  de tempo. O ângulo instantâneo  $\theta(t)$

assume uma série discreta de valores  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_t, \dots$ , ou seja, uma tabela numérica, sendo o primeiro valor

$$\theta_0 = 0. \quad (6)$$

de acordo com a condição inicial adotada anteriormente. O valor seguinte será o produto da velocidade angular inicial  $v_0/\ell$  pelo intervalo de tempo decorrido, ou seja

$$\theta_1 \cong \frac{v_0}{\ell} \Delta t. \quad (7)$$

Portanto,  $\theta_1$  pode ser calculado numericamente pela equação (7), e acrescentado na segunda posição da tabela.

Os demais valores da série  $\theta_t$ , serão obtidos da própria equação (1) que, depois de discretizada, se escreve na forma (ver referência [1])

$$\frac{\theta_{t+1} - 2\theta_t + \theta_{t-1}}{\Delta t^2} \cong -\frac{g}{\ell} \text{sen}(\theta_t), \quad (8)$$

ou, explicitando  $\theta_{t+1}$ ,

$$\theta_{t+1} = 2\theta_t - \theta_{t-1} - \frac{g}{\ell} \Delta t^2 \text{sen}(\theta_t). \quad (9)$$

A forma (9) é a equação de diferenças finitas mencionada acima. Considerando primeiramente o valor  $t = 1$  nesta equação, determina-se  $\theta_2$  em função de  $\theta_1$  e  $\theta_0$  já conhecidos, completando o terceiro valor da tabela. A mesma relação (9), desta vez considerando  $t = 2$ , fornece o quarto valor  $\theta_3$  em função de  $\theta_2$  e  $\theta_1$  já conhecidos. Novamente a equação (9), agora fazendo-se  $t = 3$  nos fornece o próximo elemento  $\theta_4$  da tabela e assim sucessivamente. Este método numérico simples já foi adotado em problemas semelhantes<sup>[1,2]</sup>.

De posse desta tabela contendo uma quantidade apreciável de valores consecutivos, pode-se construir o gráfico de  $\theta(t)$  em função de  $t$ . A figura 2 mostra um exemplo. Uma simples inspeção visual do gráfico basta para verificar que não se trata de uma senóide como na aproximação (3), que neste caso não se aplica: numa senóide, os máximos e mínimos são mais pontudos. A figura 3 mostra um outro exemplo, desta vez com velocidade inicial acima do valor crítico.

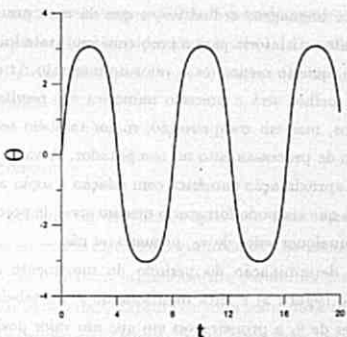


Figura 2. Gráfico de  $\theta$  em função de  $t$ , obtido numericamente, para  $\Delta t = 0.0001$  s e  $v_0 = 8.85$  m/s, usando o mesmo pêndulo da figura anterior ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> e  $\ell = 2$  m). Neste caso, a velocidade inicial é muito próxima do valor crítico  $v_c \cong 8.86$  m/s, inviabilizando a aproximação de pequenas oscilações. Note que a amplitude é também muito próxima de  $180^\circ$  ou  $\pi \cong 3.14$  radianos. Os ângulos estão expressos em radianos, e os tempos em segundos.

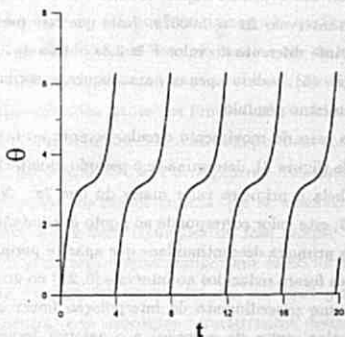


Figura 3. Gráfico de  $\theta$  em função de  $t$ , obtido numericamente com os mesmos valores da figura anterior, exceto  $v_0 = 8.87$  m/s. Desta vez, a velocidade inicial é maior do que o valor crítico  $v_c = 8.86$  m/s. O movimento, ao invés de oscilatório, é circular sempre no mesmo sentido. Os ângulos estão reduzidos ao intervalo  $[0, 2\pi]$ .

O erro desta aproximação numérica depende apenas de dois fatores. Primeiro, a quantidade de dígitos considerados nos valores numéricos que entram nos cálculos da equação (9). Isto depende do computador e da linguagem de programação usados. Em geral, as operações algébricas são realizadas com 16 dígitos, em computa-

dores e linguagens ordinários, o que dá uma precisão bastante satisfatória para o problema aqui tratado. Segundo, quanto menor for o valor do intervalo  $\Delta t$  adotado, melhor será a precisão numérica dos resultados obtidos, mas em compensação, maior também será o tempo de processamento no computador. A vantagem desta aproximação numérica com relação à seção anterior, é que ela pode fornecer o mesmo nível de precisão para qualquer valor de  $v_0$ , pequeno ou não.

A determinação do período do movimento oscilatório (figura 2) é feita monitorando-se na tabela de valores de  $\theta_t$  a primeira vez em que um valor positivo aparece logo após um negativo. O valor de  $t$  correspondente, multiplicado por  $\Delta t$ , dá o período com um erro da ordem de  $\Delta t$ . Um procedimento simples de interpolação linear entre os dois valores de  $\theta_t$  onde ocorre a mudança de sinal, dá uma precisão melhor ainda, com erro muito menor do que o próprio  $\Delta t$ . No caso da figura 2 por exemplo, o período vale  $T = 8.11593s$ , com precisão até o último dígito, mesmo tendo sido adotado o intervalo  $\Delta t = 0.0001s$ . Note que este período é bastante diferente do valor  $T \cong 2.8s$  obtido da aproximação (5), válido apenas para pequenas oscilações deste mesmo pêndulo.

No caso do movimento circular sempre no mesmo sentido (figura 3), determina-se o período monitorando na tabela o primeiro valor maior do que  $2\pi$ . Na figura 3, este valor corresponde ao ponto imediatamente após a primeira descontinuidade que aparece porque os ângulos foram reduzidos ao intervalo  $[0, 2\pi)$  no gráfico. O mesmo procedimento de interpolação linear entre este valor (antes da redução) e o anterior fornece o período com grande precisão. No caso da figura 3, temos  $T = 3.95366s$ , também com precisão até o último dígito.

### Ralentamento Crítico

A figura 4 mostra outro exemplo de movimento oscilatório, desta vez com velocidade inicial mais próxima ainda do valor crítico  $v_c = 8.858893836140m/s$ . Note que o período aumenta sensivelmente porque a massa passa a maior parte do tempo próxima da posição mais alta da trajetória circular, com velocidades baixíssimas.

Quanto mais próxima a velocidade inicial for do valor crítico, maior será este "plateau" quase horizontal no gráfico, e maior será o período.

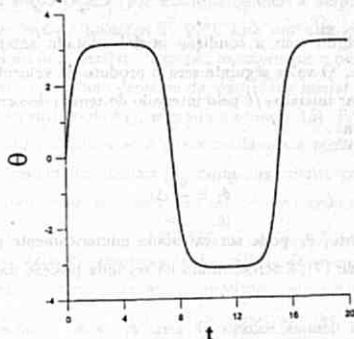


Figura 4. Gráfico de  $\theta$  em função de  $t$ , com  $\Delta t = 0.00001s$ ,  $v_0 = 8.85889m/s$  e demais valores iguais aos da figura 2.

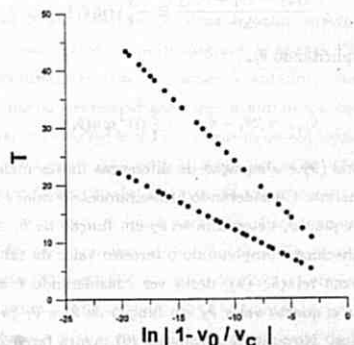


Figura 5. Gráfico do período  $T$  em função da velocidade inicial  $v_0$ , como na figura 1, para o mesmo pêndulo. O eixo horizontal, agora em escala logarítmica, destaca apenas velocidades em torno de  $v_c = 8.858893836140m/s$  (valor 1.00 no eixo horizontal da figura 1). A reta superior corresponde ao movimento oscilatório ( $v_0 < v_c$ ), e varre desde  $v_0 = 8.5m/s$  (à direita) até  $v_0 = 8.85889381m/s$  (à esquerda). A reta inferior se refere ao movimento circular sempre no mesmo sentido ( $v_0 > v_c$ ), e varre desde  $v_0 = 9.2m/s$  (à direita) até  $v_0 = 8.85889385m/s$  (à esquerda).

Na figura 5 aparece novamente o período  $T$  em função da velocidade inicial  $v_0$ , como na figura 1. Desta vez, entretanto, foram tomados apenas pontos dentro

da região crítica ( $v_0$  próximo de  $v_c$ ), e o gráfico foi contruído segundo uma escala logarítmica para o eixo horizontal. Na realidade são dois gráficos, o de cima correspondendo ao movimento oscilatório ( $v_0 < v_c$ ), e o de baixo ao movimento circular sempre no mesmo sentido ( $v_0 > v_c$ ). Nesta escala, observa-se que os pontos de cada gráfico se encaixam numa linha reta. Estes resultados numéricos nos permitem, então, inferir que a forma analítica do período em função da velocidade inicial, perto da região crítica, é

$$\frac{T}{\sqrt{\ell/g}} = K - C \ln |1 - v_0/v_c|, \quad (10)$$

onde  $K$  é uma constante aditiva sem importância, uma vez que o outro termo envolvendo logaritmo é muito maior e domina a expressão no limite  $v_0 \rightarrow v_c$ . Os valores obtidos numericamente para o coeficiente angular de cada reta são  $C \cong 1.99$  para  $v_0 < v_c$  na reta superior, e  $C \cong 1.00$  para  $v_0 > v_c$  na inferior (ambos os valores com incerteza na última casa decimal).

Um exercício interessante é calcular analiticamente o tempo que a massa gasta próxima da posição mais alta da trajetória em cada período, no movimento oscilatório, ou seja, a duração do "plateau" quase horizontal da figura 4. Isto se faz considerando apenas os valores de  $\theta$  muito próximos da amplitude  $\theta_A$  que por sua vez é muito próxima de  $\pi \cong 3.14$ . A conservação de energia fornece a velocidade angular

$$\frac{d\theta}{dt} \cong \sqrt{\frac{g}{\ell}[(\pi - \theta)^2 - (\pi - \theta_A)^2]} \quad (11)$$

numa posição  $\theta$  dentro desta região. Fazendo-se então a integral de  $dt$  desde a amplitude  $\theta_A$  até um certo limite arbitrário  $\theta_L$  um pouco menor, e multiplicando-se o resultado por 4, acha-se o período a menos de uma constante aditiva sem importância, como na equação (10). Desta maneira, é obtido o valor analítico  $C = 2$ , que concorda com o resultado numérico. De forma análoga, para o caso do movimento circular sempre no mesmo sentido, acha-se o valor  $C = 1$ , confirmando mais uma vez a análise numérica.

É fácil compreender o fator 2 que aparece no período do movimento oscilatório em relação ao movimento cir-

cular sempre no mesmo sentido, se considerarmos que a massa passa duas vezes por cada ponto (ida e volta) no primeiro caso, mas passa uma única vez (apenas ida), no segundo.

## Conclusões

O pêndulo rígido simples apresenta uma transição de fase entre dois distintos regimes de movimento. Considerando o sistema primeiramente parado na posição vertical para baixo, imprime-se uma velocidade inicial. Se esta for pequena, abaixo de um certo valor crítico, o movimento subsequente será oscilatório. Para velocidades iniciais superiores a este valor crítico, no entanto, o pêndulo tem energia suficiente para atingir e ultrapassar o ponto mais alto da trajetória circular, e passa a girar em círculos periodicamente, sempre no mesmo sentido.

O período  $T$  do movimento varia com o valor  $v_0$  da velocidade inicial, conforme mostrado na figura 1. Esta figura é um contra exemplo convincente da falácia muito difundida no segundo grau e nos ciclos básicos das universidades, de que as funções matemáticas que descrevem os sistemas físicos são sempre bem comportadas, não singulares, sem divergências. Ao contrário, os chamados fenômenos críticos que se observam em sistemas que sofrem transições de fase sempre apresentam grandezas que se comportam como na figura 1. As divergências observadas são descritas por leis de potência, e os expoentes característicos destas leis se classificam em classes de universalidade, cada uma (os mesmos valores para um conjunto de expoentes) englobando diversos sistemas completamente distintos. Esta universalidade dos fenômenos críticos é de fundamental importância porque permite que se estudem modelos ultra simplificados que, ainda assim, representam sistemas reais muito mais complicados que estão na mesma classe de universalidade<sup>[3,4]</sup>. Em geral são sistemas de muitas partículas, estudados sob a óptica da mecânica estatística. Os comportamentos em leis de potência caracterizam a existência de correlações de

longo alcance<sup>[4]</sup>, responsáveis pela universalidade. O caso aqui apresentado do pêndulo é um exemplo interessante do ponto de vista didático, uma vez que pode ser aplicado e compreendido por alunos do segundo grau ou dos ciclos básicos das universidades.

A análise numérica aqui aplicada a este problema é também interessante do ponto de vista didático, uma vez que permite a abordagem de um problema conceitualmente simples, para o qual, no entanto, não se conhece a solução analítica. O estudante terá a oportunidade de testar seus resultados numéricos, comparando com a solução analítica conhecida no limite de pequenas oscilações, dada na equação (3). Na região crítica, ao contrário, foi a solução numérica que induziu o autor a descobrir a solução analítica dada na equação (10).

#### Dedicatória e Agradecimentos

Dedico este trabalho à memória de meus professores

Pierre Henri Lucie, cuja falta se faz sentir há dez anos, e Sérgio Costa Ribeiro que nos faltará a partir deste ano. Este trabalho foi parcialmente financiado pelas agências CAPES, CNPq e FINEP.

Uma versão simplificada deste tema, adequada ao segundo grau estará no livro em homenagem à Pierre Lucie.

#### Referências

1. P.M.C. de Oliveira e S. Costa Ribeiro, Rev. Bras. Ensino de Fis. **3**, 3 (1981).
2. A.M. Mariz e P.M.C. de Oliveira, Rev. Bras. Ensino de Fis. **7**, 26 (1985).
3. P.M.C. de Oliveira, Ciência Hoje **2**(9), 17 (1983).
4. P.M.C. de Oliveira, Ciência Hoje **16**(92), 14 (1993).