

Uma abordagem da Física não-linear através de um oscilador mecânico

Klaus Weltner

*Institut für Didaktik der Physik, Johann Wolfgang Goethe Universität
D-6000, Frankfurt am Main, República Federal da Alemanha*

Roberto F. S. Andrade e A. Sergio C. Esperidião

*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia
Campus da Federação, 40210-340, Salvador, BA, Brasil*

Trabalho recebido em 6 de setembro de 1994

Resumo

Neste trabalho nós mostramos como diversos efeitos não lineares podem ser obtidos com o auxílio de um oscilador acoplado a uma fonte externa. O uso do oscilador mecânico começa com efeitos bem conhecidos e demonstra que o tipo de efeito depende da forma da não linearidade do torque restaurador. Primeiro construímos a curva de ressonância de um oscilador harmônico com pouco atrito. Em seguida, com torques restauradores não lineares de diversos tipos, nós observamos as mudanças da curva de ressonância e discutimos os novos efeitos como biestabilidade, triestabilidade e até, de maneira geral, como n modos estáveis diferentes podem ser obtidos simultaneamente em um oscilador.

Abstract

We demonstrate how several non-linear effects can be obtained with a simple mechanical oscillator coupled to an external driving force. We start showing the well known tuning curve of a driven pendulum with low friction. Then we show different types of non-linear effects depending on the form of the restoring torque: hardening, softening and even periodical with displacement. The effects shown are bistability, jump effect, tristability and, in general, n -stability. The effects can be treated in an introductory course of physics. A qualitative understanding can be obtained observing the change, introduced to the curve of natural frequency vs amplitude according to the specific form of the restoring torque and deriving its consequences on the tuning curve.

I. Introdução

A pesquisa de fenômenos não lineares assume hoje em dia uma grande importância em quase todos os segmentos da Física e de outras ciências. Por isso é necessário levar alguns conhecimentos sobre este assunto aos alunos de física e áreas afins. Uma abordagem viável tem que ser baseada nos fenômenos conhecidos ou nos conhecimentos adquiridos nos cursos regulares, e tem que mostrar a relação entre os fenômenos novos e os da física linear. Esperidião et ali. mostraram num artigo recente^[1] como se usa um pêndulo físico para demonstrar alguns fenômenos não lineares como bi-

estabilidade, caos, etc. Além disto mostraram como é possível observar as trajetórias destes movimentos no espaço de fase, mediante o uso de osciloscópio, e relacioná-las com cálculos feitos num computador pessoal. Outros trabalhos têm explorado circuitos elétricos que são regidos por equações similares às do pêndulo não linear^[2,3], ou osciladores acoplados a tiras de borracha e excitados por um campo de ondas sonoras^[4,5]. Recentemente continuamos a explorar o nosso arranjo experimental, obtendo novos e interessantes fenômenos não lineares^[6,7], bem como um melhor relacionamento com o pêndulo linear acoplado a uma fonte excita-

dora externa que é estudado profundamente no curso básico^[8,9]. Nestes novos experimentos, que são o objeto deste artigo, trabalhamos com um oscilador parecido variando as características do torque restaurador, a fonte do torque excitador e o momento de inércia do pêndulo. Mostramos não só a bi-estabilidade mas também a tri-estabilidade até n-estabilidade das oscilações dependente das características do torque restaurador.

Ao nosso ver a sequência dos experimentos deve ter uma abordagem que facilite ao aluno o entendimento dos fenômenos não lineares e o relacionamento com a física estudada anteriormente. Neste trabalho a base de raciocínio é sempre a mesma: a análise da curva de ressonância que, em condições de pouco atrito se desenvolve sempre nas vizinhanças da frequência natural. No caso não linear a frequência natural é uma função da amplitude, e assim basta obter esta função para termos uma aproximação para a curva de ressonância. A frequência natural depende das características do torque restaurador e isto será qualitativamente bem discutido no corpo do trabalho.

Na Seção II apresentaremos o arranjo experimental básico e na Seção III mostramos a curva de ressonância de um pêndulo linear com um máximo agudo na frequência natural. Na Seção IV nós usamos o pêndulo gravitacional, onde o torque restaurador não linear tende a diminuir com a amplitude se comparado com o caso do torque linear. Ao contrário do normalmente visto nos cursos, nós ultrapassamos os limites da linearidade e atingimos amplitudes de até 180° para ver as diferenças e os fenômenos da biestabilidade e a transição para o caos. Na Seção V nós usamos um arranjo com um torque restaurador onde a correção não linear tem inicialmente o mesmo sinal do termo linear, mudando no entanto de sinal para valores bem mais altos da amplitude. Neste caso mostramos a biestabilidade e triestabilidade. Na Seção VI nós discutimos uma extensão do arranjo precedente, no qual é possível atingir mais modos da estabilidade com um torque restaurador que muda suas características em função da amplitude com uma certa periodicidade. Finalmente, na Seção VII nós encerramos o artigo dando uma explicação qualitativa para as regiões de estabilidade e instabilidade da curva de ressonância não linear.

II - Arranjo experimental

O arranjo experimental básico é parecido com o que foi discutido em [1]. Se trata de um pêndulo forçado

por uma força externa periódica. Porém, como mostrado na Fig. 1, este tem outras dimensões e o eixo de rotações é posicionado no centro de uma haste retangular (P), feita com uma régua de 25 cm de comprimento e massa cerca de 20 gramas, que pode ser feita de qualquer material (acrílico, madeira, alumínio, etc). Se colocamos uma única massa de um lado da régua temos um pêndulo gravitacional. Para usar torques restauradores de tipos diferentes precisamos de um pêndulo simétrico (Figuras 2 e 7). A propósito disso fixamos nas extremidades uma massa de 9 gramas em cada lado, para isso basta fixarmos 3 moedas de 1 centavo de real com uma fita crepe de cada lado. O pêndulo não é muito sensível a estas especificações, começamos a trabalhar com massas de 2 gramas cada uma, mas afinal acabamos usando massas de 9 gramas porque assim se reduzem as frequências e as fases das oscilações podem se identificadas melhor quando observadas. Usamos um raio de bicicleta com 0.2 cm de diâmetro como eixo do pêndulo que é colocado num suporte (5) como mostra a Figura 1. Neste eixo colocamos algumas voltas de fita crepe (R) com o objetivo de aumentar o diâmetro até 0.6 cm para dar suficiente torque ao pêndulo. Uma melhor solução seria colocar um tubo de plástico ou de borracha de mesmo diâmetro para aumentar o atrito com o fio. Neste ressaltado (R) enrolamos duas voltas do fio cuja extremidade superior é ligada a uma mola, de constante elástica $K = 10 \text{ N/m}$ que posteriormente será ligada, mediante uma roda, a um dispositivo que é capaz de variar a amplitude e a frequência da força externa aplicada (Figura 1). Na extremidade inferior colocamos uma massa de 100 gramas para obter uma tensão do fio.

O dispositivo excitador pode ser feito de várias maneiras, podendo ser usado um motor elétrico experimental ou um motor elétrico usado nos limpadores de parabrisa dos automóveis. Nós usamos ambos os tipos e recomendamos o simples motor de limpador de parabrisa, com o qual obtivemos bons resultados em todos os experimentos, porque é bastante acessível e pode ser encontrado em sucatas.

Se dispusermos de uma fonte de tensão variável é aconselhável seu uso, porém é suficiente uma bateria de automóvel de 12 volts. A frequência é controlada pela tensão da fonte ou no caso da bateria mediante uma resistência variável entre 0 e 50 Ω .

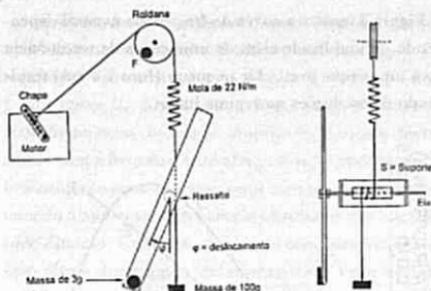


Figura 1. Esquema do arranjo experimental, ressaltando o motor, e o pêndulo em sua configuração como pêndulo gravitacional, visto de frente e de perfil.

Para determinar a frequência do motor com relação a posição ponteiro no resistor fizemos uma escala, marcando em uma fita crepe colado no mesmo. Medimos a frequência através do tempo decorrido em 10 voltas completas do motor.

Perpendicularmente ao eixo do motor colocamos uma pequena chapa de metal (alumínio) ou acrílica com furos. Os furos são espaçados de 0.5 cm e distam do eixo de 1.0 até 7.0 cm. Através da mesma fazemos a transmissão do movimento do motor ao pêndulo, fixamos um parafuso em um furo da chapa e mediante uma arruela conectamos o fio. Assim controlamos o torque aplicado através da posição do parafuso da chapa.

Para observar as fases entre as oscilações do pêndulo e o torque aplicado marcamos um ponto como referência da fase (F) na roldana superior. Para medir as amplitudes colocamos um transferidor atrás do pêndulo.

Para demonstrar mais claramente os efeitos da biestabilidade e da triestabilidade, observadas através da amplitude e sobretudo das diferenças de fase de cada um dos modos estáveis, recomendamos utilizar dois pêndulos iguais ligados à mesma fonte externa.

III. Curva de ressonância com um torque restaurador linear

Para obter um torque restaurador linear fixamos uma roldana (diâmetro de 3.4 cm) no centro do pêndulo, conforme a Fig. 2. Usamos ainda duas molas com uma constante elástica de 22 N/m cada uma que são conectadas por um fio fino, com tensão inicial entre 0.2 e 0.4 N. Este fio é então enrolado na roldana.

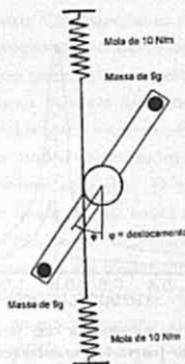


Figura 2. Parte do arranjo experimental, quando o pêndulo é simétrico e tem um torque restaurador linear usando-se duas molas.

No estado de equilíbrio as duas molas estão alongadas igualmente, as forças se compensam. Se o pêndulo é deslocado de um certo ângulo, uma das molas é alongada aumentando o torque restaurador linear com o deslocamento. A outra mola é comprimida diminuindo a elongação inicial, assim diminuindo o torque oposto linear com o deslocamento. Ambas as variações resultam em um torque restaurador linear.

Para estudarmos a dependência do movimento do pêndulo com relação a frequência f da fonte excitadora, medimos a amplitude do pêndulo mantendo constante o torque máximo do excitador, fazendo uma varredura das frequências baixas para as altas de forma bastante devagar e deixando que as oscilações alcancem seu estado estável.

A curva 1 na Figura 3 mostra a curva de ressonância com um torque excitador usando o furo de 2.0 cm, já a curva 2 foi obtida com um torque excitador usando o furo de 3 cm.

As curvas são bem conhecidas, com um máximo agudo na vizinhança da frequência natural^[8,9]. Na frequência natural f_0 é fácil obter amplitudes maiores do que 180° , usando um torque excitador adequado. As amplitudes só são limitadas devido a possibilidade de deslizamento do fio. Se uma mola está diminuindo demais a tensão no fio diminui e o fio desliza. Outras grandes amplitudes apenas nas vizinhanças da frequência natural.

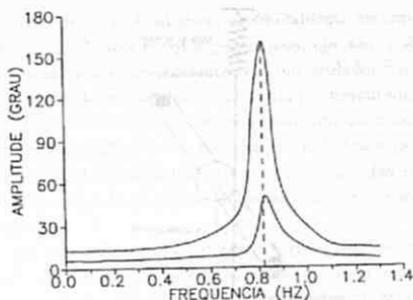


Figura 3. Curvas de ressonância com torque restaurador linear com pequenas (curva 1) e grandes (curva 2) amplitudes da força externa. A linha tracejada indica a frequência natural, que não depende da amplitude.

IV. O pêndulo gravitacional não linear

Obtemos um pêndulo gravitacional se retiramos o fio da roldana e fixamos uma massa de 6 gramas, podemos usar duas moedas de um centavo de real cada, em uma mesma extremidade do pêndulo, presa por uma fita crepe. Em primeiro lugar observamos o torque restaurador. No arranjo anterior este foi uma reta. Agora o torque restaurador começa linear mas com amplitudes excedendo 30° afasta-se da reta, cresce mais lentamente e após 90° começa a diminuir e tende a zero quando a amplitude vai a 180° (Fig. 4). Considerando T_0 como o máximo valor do torque excitador, podemos concluir que:

$$T = T_0 \sin \varphi \quad (1)$$

É possível deduzir que agora a frequência natural vai depender da amplitude da oscilação^[10,11]. Para pequenas amplitudes a frequência natural deve ser constante. Este caso é muito conhecido dos cursos básicos de mecânica. Mas depois de 30° ela deve diminuir, porque o torque restaurador é menor que o do caso linear. Por causa das dificuldades matemáticas (os cálculos requerem o conhecimento de integrais elípticas) este caso apesar de ser importante é normalmente deixado de lado. Com amplitudes atingindo 180° as oscilações tornam-se bastante lentas e a frequência natural diminui. A frequência natural também pode ser medida liberando-se o pêndulo com diferentes amplitudes e medindo o período do primeiro ciclo com um cronômetro.

A Figura 5 mostra a curva da frequência natural dependendo da amplitude além de uma curva de ressonância com um torque excitador pequeno (furo 1.0 cm) resultando de oscilações no regime linear.

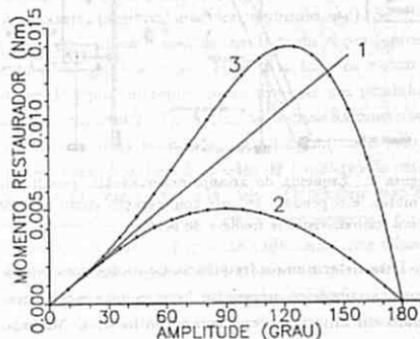


Figura 4. Torque restauradores usados em cada experimentos. Curva 1 - Torque restaurador linear (figura 2). Curva 2 - Torque restaurador não linear de um pêndulo gravitacional (figura 1). O torque diminui com a amplitude. Curva 3 - Torque restaurador não linear devido ao arranjo apresentado na figura 7. O torque cresce com a amplitude até 90° e diminui a partir daí.

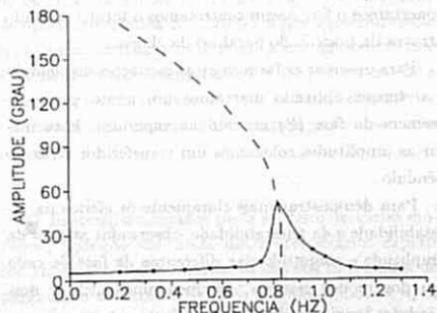


Figura 5. Curva de ressonância de um pêndulo gravitacional com pequenas amplitudes, que é bastante próxima ao caso linear. A curva tracejada indica a frequência natural do pêndulo gravitacional, que depende da amplitude.

Vamos agora estudar a reação do sistema quando aumentamos o torque máximo T_0 . Sabemos que no caso linear o pico de ressonância cresce. O mesmo vai acontecer aqui. Porém as amplitudes elevadas devem ocorrer nas vizinhanças da curva da frequência natural.

Verificamos este comportamento com um torque aplicado usando o furo a 2 cm do eixo da chapa. Os resultados são mostrados na Figura 6 (curva 1: furo 1 cm; curva 2: furo 2 cm). Neste caso, começando com frequências baixas a amplitude aumenta lentamente com a frequência até atingirmos f_1 , onde ela salta bruscamente para um novo valor bem mais alto. Continuando a aumentar a frequência observa-se que a amplitude diminui. Começamos de novo com uma frequência bem alta e diminuindo lentamente o seu valor nós observamos os mesmos valores da amplitude como antes. Porém, isto não ocorre com frequências logo abaixo de f_1 : as amplitudes continuam crescendo até uma frequência $f_2 < f_1$ onde a estabilidade do estado de grande amplitude do pêndulo acaba e depois de um estado transiente a amplitude diminui até o mesmo valor já descrito anteriormente. Chamamos atenção para que amplitudes maiores que 150° podem levar o pêndulo a girar, para evitar isto recomendamos que as oscilações devem ser bem simétricas. Entre as frequências f_2 e f_1 nós identificamos o fenômeno da biestabilidade descrito em [1].

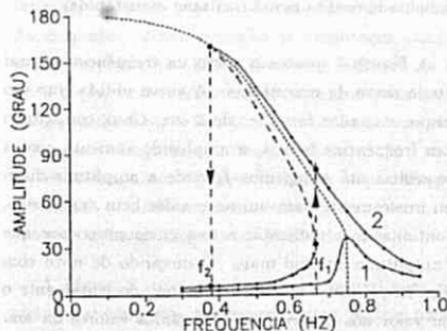


Figura 6. Curva de ressonância do pêndulo gravitacional para pequenos e grandes torques externos, exibindo a biestabilidade. Curva 1 - Pequeno torque externo (furo 1 cm). Curva 2 - Maior torque externo (furo 2 cm). Note que a curva de ressonância se curva, acompanhando a curva da frequência natural. Entre f_2 e f_1 o sistema admite dois modos de oscilações (biestabilidade) e tem um modo instável (linha pontilhada).

Na Figura 6 a curva de ressonância é completada por uma linha pontilhada. Esta linha, que indica um ramo instável, uma separatrix. Oscilações com amplitudes abaixo da separatrix diminuem até atingirem o tre-

cho estável abaixo. Oscilações com amplitudes acima da separatrix aumentam até atingirem o trecho estável acima. Se vê bem que a curva de ressonância se desenvolve na vizinhança da curva da frequência natural.

Se dois pêndulos iguais são usados^[12], cada um deles pode oscilar em modos diferentes no intervalo $[f_2, f_1]$, com o mesmo torque excitador. O modo de pequena amplitude oscila quase em fase com o torque excitador, e o de alta amplitude oscila em oposição de fase. Então se os pêndulos oscilam em modos diferentes eles oscilam quase em oposição de fase. É bem fácil fazer um pêndulo oscilar no modo desejado. Basta iniciar com uma amplitude média e liberar o pêndulo ou em fase ou em antifase com o torque excitador. A fase deste torque é bem observada pelo ponto na roldana superior que desvia o fio excitador.

Com um torque maior, usando os furos acima de 6 cm de distância do eixo da chapinha, começam os movimentos caóticos. Esta transição é descrita em detalhes em [1]. Todos os experimentos descritos lá podem ser repetidos com este novo arranjo experimental. Desta vez com frequências menores podemos observar melhor o fenômeno. Para demonstrar a transição ao regime caótico nós recomendamos de novo usar dois pêndulos iguais. Porque é espetacular ver dois pêndulos iguais com excitações iguais se comportarem de forma tão diferentes.

V - Torque restaurador não linear especial

Nós obtemos um torque restaurador com múltiplas características (forte dependência com relação à amplitude) a partir do arranjo experimental mostrado na Figura 7. Conforme indicado, nós fixamos dois pequenos alfinetes com cabeças esféricas na roldana central, a cerca de 1,5 cm do eixo, sendo que eles estão em posições diametralmente opostas. Em seguida conectamos as duas molas, já usadas anteriormente na obtenção do torque linear, de novo usando um fio fino, porém desta vez as molas não são alongadas e fio tem uma certa folga. Depois damos duas, três ou quatro voltas do fio em torno de cada alfinete assim conectamos o fio com os alfinetes e obtemos uma pequena tensão inicial do fio entre 0,1 e 0,2 N. A tensão inicial determina a frequência natural de pequenas amplitudes, para demonstrar os fenômenos seguintes sugerimos trabalhar com frequências naturais tão baixas quanto

possível. Se usamos dois pêndulos iguais, conforme já foi aconselhado, devemos prestar atenção para o ajuste da tensão inicial de tal modo que em ambos produzam o mesmo efeito, isto é, frequências naturais iguais.

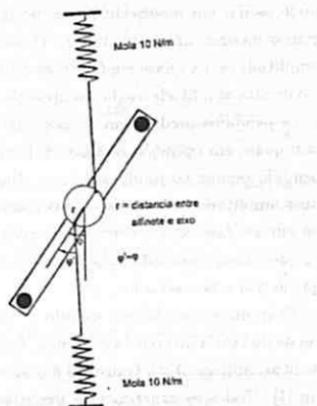


Figura 7. Esquema do arranjo experimental para o torque restaurador não linear especial. O torque restaurador é mostrado na figura 4. Nesta seção, limitamos os deslocamentos até 180° . Para o cálculo assumimos que $\varphi \approx \varphi'$. Na seção seguinte não há limitação. A cada giro de 180° o fio se encurta ao se enrolar nos alfinetes fixados na roldana. Neste caso o torque restaurador é mostrado na figura 10.

Com este arranjo nós obtemos um torque restaurador que varia com a amplitude conforme a Figura 4 curva 3, onde observamos três regimes distintos. No primeiro deles, com as amplitudes pequenas até aproximadamente 30° , o torque restaurador é linear. A tensão das molas não muda. No segundo regime de 30° até 120° as molas são alongadas, a tensão aumenta e o torque restaurador aumenta mais do que no regime linear. No terceiro regime com amplitudes acima de 120° o torque restaurador começa a diminuir, até que tende a zero quando a amplitude vai a 180° , porque o raio efetivo diminui. Para molas bem distantes, (de fato, com os fios exatamente na horizontal), o torque restaurador pode ser aproximadamente calculado de maneira bastante fácil.

Como no arranjo cada mola atua sobre o alfinete através do fio então o torque é igual ao produto da tensão do fio pelo braço de torque. Assim o torque das duas molas pode ser escrito como:

$$T = 2 [\text{tensão inicial} + \text{tensão oriunda do alongamento}] \times \text{braço}$$

Sendo K a constante elástica das molas, r a distância do alfinete ao eixo, X_0 a elongação inicial de cada mola e φ o deslocamento angular, escrevemos:

$$T = -2[K(X_0 + r(1 - \cos\varphi))] \cdot r \sin \varphi \quad (2)$$

A frequência natural deste oscilador depende de maneira complicada da amplitude. Vamos analisar, em primeiro lugar, os dois primeiros regimes. No primeiro deles a frequência natural constante. No segundo a frequência natural deve aumentar, porque o torque restaurador aumenta mais do que o linear e um torque aumentado resulta numa oscilação mais rápida.

A Figura 8 mostra a curva da frequência natural e uma curva de ressonância. A curva obtida com um torque excitador com furo de 2 cm. Caso, começando com frequências baixas, a amplitude aumenta com a frequência até atingirmos f_2 onde a amplitude diminui bruscamente para um novo valor bem mais baixo. Continuando a aumentar a frequência observa-se que a amplitude diminui mais. Começando de novo com uma frequência bem alta e diminuindo lentamente o seu valor nós observamos os mesmos valores da amplitude como antes. Porém o mesmo não ocorre com frequências logo abaixo de f_2 . As amplitudes crescem bem devagar até uma frequência f_1 onde a estabilidade acaba e a amplitude cresce bruscamente até o mesmo valor já descrito anteriormente. De novo temos um regime de biestabilidade, mas neste caso o modo com grandes amplitudes estão em fase com o torque excitador, e o modo com amplitudes menores está aproximadamente em oposição de fase. A curva de ressonância é completada por uma parte pontilhada. Como no pêndulo gravitacional, esta parte, instável, também é uma separatrix.

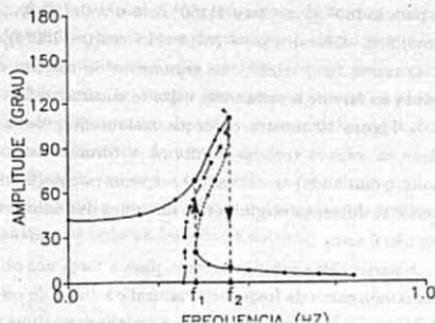


Figura 8. Curva de ressonância para torque excitador médio (furo 2 cm), no caso do arranjo mostrado na Fig. 7. Note que a curva da frequência natural (linha tracejada) se inclina para a frente, e que a curva de ressonância continua a se desenvolver em suas vizinhanças.

Analisemos agora o terceiro regime do torque restaurador, obtidos com furos mais afastados do eixo da chapinha. Nesta situação as amplitudes atingem valores maiores que 120° . Conforme indicado na Figura 4 (curva 3), nesta região o torque restaurador começa a diminuir, e isso tem como consequência a diminuição da frequência natural. Nesta situação a curva da frequência natural é parecido com a do pêndulo gravitacional, e se nós atingirmos esta região podemos encontrar os mesmos fenômenos já obtidos com ele.

A Figura 9 mostra a frequência natural e as amplitudes encontradas nos experimentos, onde o torque excitador foi obtido usando-se o furo a uma distância de 3 cm do eixo da chapa. Começando com frequências baixas, a amplitude aumenta com a frequência até atingirmos f_3 onde a estabilidade acaba. Neste ponto a amplitude pode ter dois comportamentos: ou dá um salto para um novo valor bem acima, ou para um valor bem menor. Se acontece o primeiro caso nós teremos atingido um novo modo de oscilação. Enfatizamos que ambos os comportamentos são possíveis, mas que, variando apenas a frequência, não temos como controlar experimentalmente se a amplitude vai para cima ou para baixo.

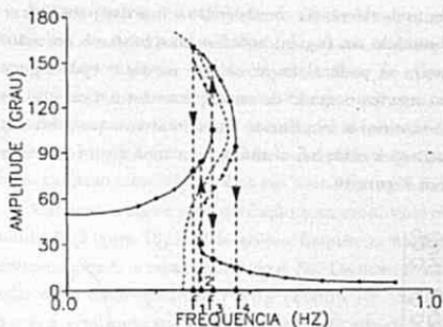


Figura 9. Curva de ressonância com maior torque excitador (furo de 3 cm) para o mesmo caso discutido anteriormente. A curva da frequência natural se inclina para trás quando as amplitudes ficam muito grandes, e é acompanhada pela curva de ressonância. Note a presença de uma região com três modos estáveis e de duas regiões com dois modos estáveis.

Com a curva de ressonância completa, onde os trechos pontilhados não representam estados estáveis e sim separatrizes, se observa claramente que ela se situa, como esperado, nas vizinhanças da curva da frequência natural. O novo modo está em oposição de fase com o torque excitador, assim como ocorre com o de menor amplitude. Escolhendo de maneira adequada as condições iniciais, é fácil iniciar o novo modo. Basta começar com uma amplitude de $130^\circ - 150^\circ$, liberando o oscilador em oposição de fase. Após algumas oscilações meio irregulares o novo modo vai se estabilizar, o novo modo será estável entre as frequências, f_1 e f_4 . Usando dois osciladores iguais, como recomendado, é possível com quase a mesma fase e amplitudes bem diferentes. Entre as frequências f_1 e f_4 é possível pô-los a oscilar com fases opostas ao do regime caracterizados pelas frequências situadas entre f_1 e f_3 .

Entre as frequências f_2 e f_3 existe uma região com triestabilidade. Para se determinar esta região é recomendável começar com frequências altas, diminuindo lentamente seu valor, até f_2 quando este modo de pequenas amplitudes se tornar instável, e a amplitude começa a crescer, até atingir o novo estado estável. Usando uma frequência pouco maior do que f_2 pegamos uma das extremidades do pêndulo com a mão e deslocamos até a amplitude e modo desejado, liberando-o com a fase adequada. Observamos que a posição do

ponto de referência com respeito a fase dar para liberar o pêndulo em fase ou anti-fase com bastante precisão. Assim se pode alcançar os três modos. Após alguns batimentos o modo de oscilação se estabiliza, e aí se pode variar a frequência. Fazendo-se uma pesquisa das oscilações estáveis, acaba-se com uma figura parecida com a Figura 10.

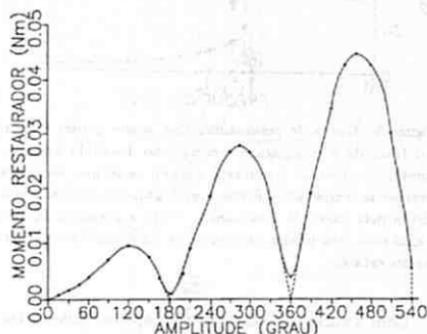


Figura 10. Torque restaurador para o esquema mostrado na Fig. 7, quando a amplitude ultrapassa 180°. Entre 180° e 360° a curva tem o mesmo comportamento que no intervalo [0°, 180°], mas com amplitude maior. A parte pontilhada indica a curva teórica.

VI - Extensão para a n-estabilidade

Se no arranjo anterior nós deixamos a amplitude ultrapassar 180°, os alfinetes se engatam no fio e o torque restaurador, que se aproximou de zero em 180° aumenta de novo. Desta vez a tensão do fio é maior, já que ele foi encurtado de uma valor igual a 2r. O mesmo comportamento descrito na seção anterior vai acontecer agora para amplitudes entre 180° e 360°, e mais genericamente em cada intervalo $[n \times 180, (n+1) \times 180]$. Considerando as molas bem distantes, n como o número de meias voltas enroladas nos alfinetes e desprezando o diâmetro dos mesmos, podemos aproximadamente escrever o torque restaurador como:

$$T = -2Krsin\varphi[x_0 + r(1 - \cos(\varphi))] \text{ para } 0 \leq \varphi \leq 180^\circ;$$

$$T = -2Krsin\varphi[x_0 + 2r + r(1 - \cos(\varphi + 180^\circ))] \text{ para } 180^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ;$$

$$T = -2Krsin\varphi[x_0 + 4r + r(1 - \cos(\varphi + 360^\circ))] \text{ para } 360^\circ \leq \varphi \leq 540^\circ;$$

$$T = -2Krsin\varphi[x_0 + 6r + r(1 - \cos(\varphi + 540^\circ))] \text{ para } 540^\circ \leq \varphi \leq 720^\circ;$$

ou para $n \cdot 180^\circ \leq \varphi \leq (n+1)180^\circ$ com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, como, $T = -2Krsin\varphi[x_0 + 2nr + r(1 - \cos(\varphi + 180^\circ))]$.

O termo $(\varphi + n180^\circ)$ no argumento do cosseno é devido ao fato de a cada meia volta se encurtar o fio.

A Figura 10 mostra o torque restaurador, destacando os valores teóricos conforme a fórmula acima (linha pontilhada) e os valores experimentais (linha cheia). A diferença origina-se do diâmetro dos alfinetes que não é zero.

A partir deste comportamento para a força nós obtemos uma curva da frequência natural e a curva de ressonância que se desenvolve nas suas vizinhanças, o que é ilustrado pela Figura 11. Conforme a convenção usada acima, os trechos pontilhados são instáveis e as partes cheias são modos estáveis. Os pontos indicados correspondem a valores experimentais. É possível determinar até seis modos estáveis com a mesma frequência com o arranjo descrito.

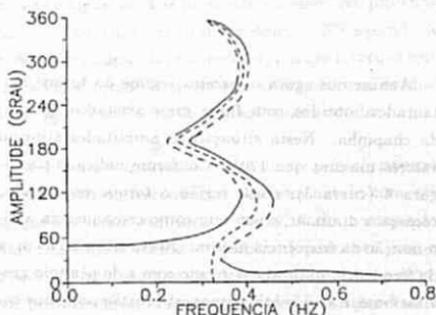


Figura 11. Curvas de ressonância e da frequência natural correspondendo situação ilustrada pela Fig. 10, quando a amplitude de oscilação ultrapassa o 180°. A situação se torna bastante complexa, com multi-estabilidade. Conseguimos experimentalmente identificar os cinco ramos estáveis indicados na figura.

VII - Observações sobre os regimes de estabilidade

Se pensarmos na curva de ressonância com pouco atrito (Fig. 3), verificamos um máximo agudo na frequência natural f_0 . As condições para a transferência de energia da fonte externa para o pêndulo são máximas quando a frequência externa é igual a frequência natural do pêndulo com a fase entre o torque excitador e a oscilação de 90°. Porém se temos uma diferença entre a

frequência natural f_0 e a frequência do torque externo a transferência de energia diminui e em consequência a amplitude da oscilação também diminui, porque essa transferência de energia tem que compensar as perdas de energia por causa do atrito. Estas perdas dependem monotonicamente da amplitude da oscilação. Se as diferenças são maiores a transferência da energia diminui mais e resulta em amplitudes menores, assim resulta o máximo aguçado na frequência natural.

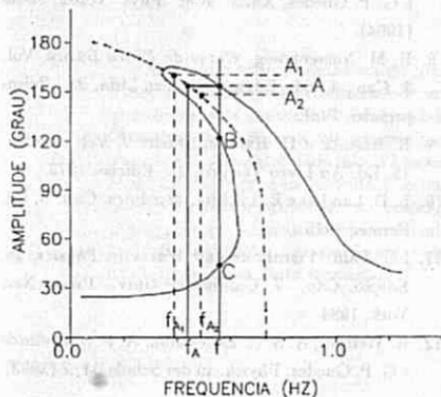


Figura 12. Indicação dos três modos, caracterizados por amplitudes A, B e C, que podem ser encontrados com uma dada frequência f . Indicação da frequência própria f_A correspondendo amplitude A, bem como de f_{A_1} e f_{A_2} devidas a duas outras amplitudes A_1 e A_2 próximas a A. O balanço da energia jogada no sistema e da dissipada leva o oscilador de volta a amplitude A, que é estável.

Vamos agora analisar um caso não-linear, o do pêndulo gravitacional com frequência natural não constante, e dependendo da amplitude. A Figura 12 mostra a curva de ressonância que conforme já dissemos, ocorre na vizinhança da curva da frequência natural. Uma oscilação com uma certa frequência f pode possuir três modos com amplitudes A, B e C. Consideramos inicialmente uma oscilação com modo A. Neste caso a frequência natural desta amplitude é f_A e temos uma certa diferença entre f e f_A . Se por acaso a amplitude for aumentada um pouco até o valor A_1 , a frequência natural dessa amplitude é f_{A_1} e a diferença entre f e f_{A_1} é maior que a anterior. Consequentemente a transferência de energia diminui resultando numa diminuição da oscilação. A amplitude decresce, até atingir de novo o valor A.

Se por acaso a amplitude é menor do que A, como em A_2 , a frequência natural f_{A_2} dessa amplitude aproxima-se mais da frequência excitadora f . Consequentemente a transferência de energia melhora, resultando num crescimento da amplitude, até atingir de novo o valor A. Assim a amplitude A é estável, porque cada variação aleatória implica em um retorno a A.

Analisemos agora uma oscilação com amplitude ou modo B (Figura 13). Neste caso a frequência natural correspondendo a esta amplitude é f_B . De novo temos uma certa diferença entre f e f_B (Figura 13). Se por acaso a amplitude aumenta um pouco até atingir o valor B_1 a sua frequência natural será f_{B_1} . A diferença entre f e f_{B_1} é menor do que entre f e f_B . Assim a transferência de energia aumenta resultando num aumento da amplitude e esta cresce até atingir o valor do modo A!

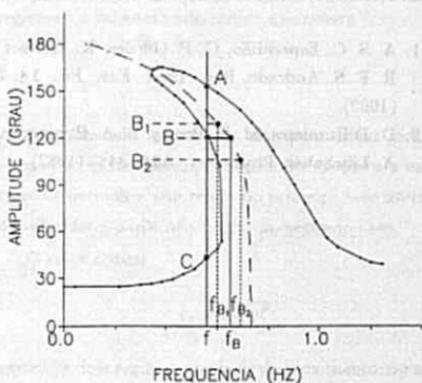


Figura 13. Indicação da frequência própria f_B correspondendo à B, bem como de f_{B_1} e f_{B_2} , devidas a duas outras amplitudes B_1 e B_2 próximas a B. O balanço da energia jogada no sistema e da dissipada leva o oscilador a se afastar de B, e em cada distorção se aproximando de A ou de C.

Se consideramos a amplitude um pouco menor que B, ou seja um modo com amplitude B_2 a frequência natural dessa amplitude é f_{B_2} e a diferença entre f e f_{B_2} é maior que entre f e f_B . Consequentemente a transferência de energia piora, resultando numa diminuição da amplitude. Ela diminui até atingir o valor do modo C. Assim o modo com amplitude B é instável porque qualquer variação aleatória é amplificada, resultando num afastamento ainda maior.

da frequência natural. Os modos dos trechos abaixo da curva da frequência natural são instáveis.

Um caso particular são os trechos vindo das frequências bem maiores ou bem menores da frequência constante natural das amplitudes pequenas. Nesse caso as amplitudes são pequenas, dentro do regime linear da força restauradora. Por isso nos aproximamos do caso linear, com amplitudes limitadas e estáveis. Este é o caso do ponto indicado pela letra C.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Profa. Judite Miranda por discussões proveitosas e aos árbitros desta revista por suas sugestões valiosas. O Prof. Weltner agradece o apoio financeiro do DAAD e CNPq. A.S.C. Esperidião e R.F.S. Andrade têm o apoio financeiro do CNPq.

Referências

1. A. S. C. Esperidião, G. P. Guedes, K. Weltner e R. F. S. Andrade, Rev. Bras. Ens. Fis. **14**, 78 (1992).
2. D. D'Humieres, M. R. Bealey, B. A. Huberman e A. Libchaber, Phys. Rev. A **16**, 3483 (1982).
3. P. Lais, Rev. Ens. Fis. **11**, 30 (1989).
4. R. Khosropour e P. Nillet, Amer. Jour. Phys. **60**, 429 (1992).
5. B. Hoke - Nonlinearity in rubber band vibrations - Senior Thesis, Hamilton Colledge, Clinton, New York, Dezembro 1990.
6. K. Weltner e A. S. C. Esperidião, Math. Nat. Wiss. Unter. **46**, 228 (1993).
7. K. Weltner, A. S. C. Esperidião, R. F. S. Andrade e G. P. Guedes, Amer. Jour. Phys. Vol **62**, 56-59 (1994).
8. H. M. Nussenzweig, Curso de Física Básica, Vol. 2, Cap. 4, Ed. Edgard Blucher Ltda, 2a. Reimpressão, 1987.
9. R. Resnick e D. Halliday, Física I, Vol. 2, Cap. 15, Ed. Ao Livro Técnico, 2a. Edição, 1973.
10. L. D. Landau e E. Lifchitz, Mecânica, Cap. 5, Ed. Hemus, 1975.
11. I.G. Pain, Vibrations and Waves in Physics, 2a. Edição, Cap. 7, Cambridge Univ. Press, New York, 1984.
12. K. Weltner, A. S. C. Esperidião, R. F. S. Andrade e G. P. Guedes, Physik. in der Schule **31**, 7 (1993).