

## O Análogo Mecânico da Lei de Ohm

Vanderlei S. Bagnato

Instituto de Física de São Carlos - USP

Caixa Postal 369 - 13.560 São Carlos - SP

Trabalho recebido em 18 de novembro de 1994

As propriedades elétricas dos materiais é sem dúvida uma consequência importante de suas características microscópicas e por isto ela é, em muitos casos, utilizada como critério de quantificação para defeitos estruturais presentes em materiais condutores. De acordo com a variação da corrente num condutor com o campo aplicado, ele pode ser ôhmico ou não-ôhmico. Para os materiais ôhmicos, a densidade de corrente ( $J$ ) é linear com o campo aplicado ( $E$ ), ou seja,

$$J = \sigma E \quad (1)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\sigma$  é denominada de condutividade elétrica do material. A equação (1) é normalmente denominada de "Lei de Ohm". A condutividade, resume todas as características do material com respeito à condução elétrica.

O modelo matemático mais simples que conecta as características microscópicas com a condutividade elétrica é o modelo de Drude<sup>[1]</sup>. Neste modelo, imagina-se um gás eletrônico na presença de vários centros espalhadores fixos. A presença do campo acelera os elétrons entre colisões produzindo um transporte efetivo de cargas pelo material. A simplicidade do modelo exige algumas aproximações:

1) Não há interação elétron-elétron ou elétron-ion entre colisões. A interação só se manifesta durante a colisão e fora destas os portadores interagem somente com o campo aplicado. 2) As colisões ocorrem abruptamente

e os centros espalhadores não se movem. 3) O tempo médio entre colisões é  $\tau$  e 4) Após cada colisão o elétron emerge do centro espalhador em qualquer direção. Com, estas suposições, a visão microscópica que podemos formar da condução elétrica esta representada na figura 1. Entre colisões o movimento é balístico.

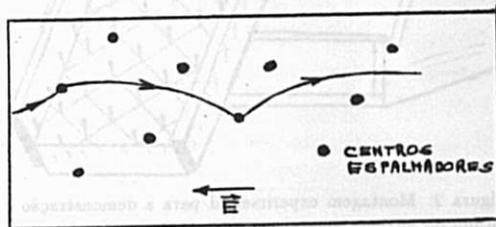


Figura 1: Movimento de cargas num sólido condutor segundo o modelo de Drude. O movimento acelerado é interrompido por colisões.

Imaginemos um campo estático  $E$  aplicado ao sistema. O fluxo de corrente gerado é por definição  $J = nq \langle v \rangle$ , onde  $n$  é a densidade de cargas,  $q$  a carga e  $\langle v \rangle$  a velocidade média. Não havendo campo externo,  $\langle v \rangle = 0$  e portanto  $J = 0$ . Na presença do campo, a velocidade das cargas entre colisões consecutivas evolui da forma,

$$v(t) = v_0 + (q/m)Et \quad (2)$$

onde  $m$  é a massa de cada  $q$  carga e  $\langle t \rangle = \tau$ . Tomando a média temporal de (2),  $\langle v \rangle = (q/m)E\tau$ , de modo que,

$$J = nq^2/m\tau E \quad (3)$$

que comparado com a lei de Ohm (1), permite obter a condutividade elétrica do sistema  $\sigma = nq^2\tau/m$ .

Nosso propósito aqui é mostrar que existe uma situação macroscópica de fácil construção, que simula com relativa fidelidade a situação microscópica do modelo de Drude descrito acima, permitindo a realização de uma analogia com a lei de Ohm.

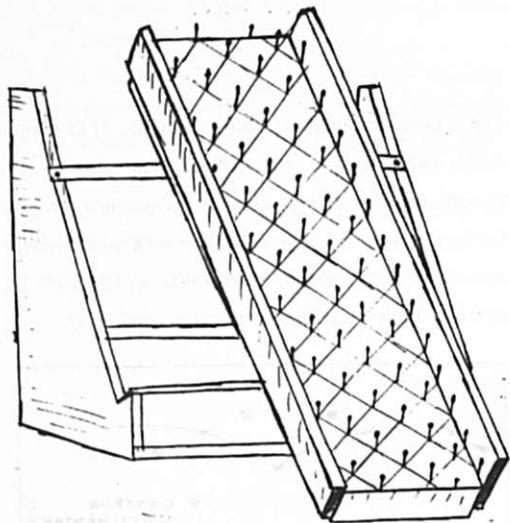


Figura 2: Montagem experimental para a demonstração e estudo do análogo mecânico da lei de Ohm. A tábua tem cerca de 50 cm de comprimento contendo uma rede de pregos. A bolinha utilizada é um bolinha de vidro comum ("bolinha de gude"). O cronometro utilizado para medidas dos tempos pode ser o existente em relógios digitais de pulso. Um suporte de madeira mantém o plano inclinado, permitindo variações de altura.

Imagine uma tábua na qual coloca-se pregos, aleatoriamente distribuídos ou segundo uma rede pré-estabelecida. Se esta tábua é inclinada criando uma diferença de potencial gravitacional entre seus extremos, (ver figura 2), uma bolinha de massa  $m$  deixada no seu extremo superior, rola plano abaixo, sofrendo no seu caminho colisões com os pregos e sendo acelerada pelo campo gravitacional entre colisões. A situação é portanto bem parecida com o modelo de Drude para condução elétrica e assim podemos dizer que é um análogo mecânico ao caso elétrico. O equivalente do

campo elétrico é agora a altura  $H$  do extremo superior com relação ao extremo inferior, já que a diferença de potencial é  $mgH$ . O fluxo de carga é agora representado pelo fluxo de partículas que é dado por  $1/t_m$  onde  $t_m$  é o tempo decorrido para a bolinha viajar entre os extremos da tábua. Assim,

$$1/t_m = \sigma_m H \quad (4)$$

Um gráfico  $1/t_m$  vs  $H$  fornece portanto uma reta cuja inclinação é a condutividade mecânica do sistema ( $\sigma_m$ ). O resultado de um dos experimentos realizados está mostrado na figura 3. Para este caso, obteve-se,  $\sigma_m \approx 0,015$  (sec. cm) $^{-1}$ . A linearidade da curva da figura 3, mostra a validade do modelo. É possível variar a densidade de pregos, criar distribuições aleatórias, criar diferentes redes, simular defeitos introduzindo pregos mais espessos, etc e verificar as variações que tais mudanças causam na condutividade.

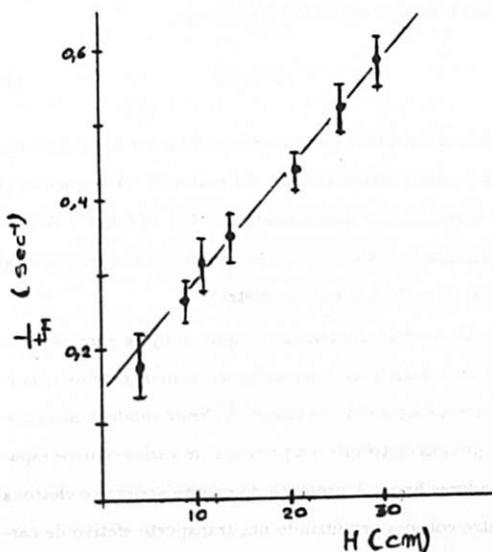


Figura 3: Gráfico mostrando  $1/t_m$  vs  $H$ . Para este caso cada ponte é o resultado de seis medidas. A condutividade mecânica é obtida pela inclinação da reta é  $0,015$  sec $^{-1}$  cm $^{-1}$ .

É importante salientar que para cada altura  $H$ , deve-se repetir várias vezes o experimento, obtendo-

se a média e o desvio padrão (barras dos pontos da figura 3.) O sistema é quantitativo e um bom uso da imaginação permite demonstrar para você mesmo ou para uma classe, importantes conceitos relacionados com este tema.

Uma análise detalhada deste problema, incluindo a razão pela qual  $H$  não extrapola para o valor zero quando  $1/t_m$  vai a zero é apresentada pelo Prof. Paulo Murilo de Oliveira nos artigos listados na referência 2, e cuja leitura é altamente recomendada.

## Referências

1. O modelo de Drude pode ser encontrado em qualquer livro texto de Eletricidade como Halliday-Resnick, etc.
2. M. C. Tavares, M. Fonte Boa and P. M. de Oliveira, "Mechanical Analogy for the Ohm's law", Phys. Education **26**, 195 (1991), Phys. Education **27**, 60 (1992).