O Método dos Operadores na Equação de Legendre

(The operators method for Legendre equation)

Mario Goto

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Londrina C.P. 6001, CEP 86051-970, Londrina, PR, Brasil

Trabalho recebido em 30 de julho de 1992

Resumo

Mostra-se que o método de fatoração pode ser aplicado com vantagem à equação de Legendre, obtendo-se operadores de levantamento e abaixamento de índice que atuam sobre auto-estados de momento angular orbital (polinômios de Legendre). O método de fatoração permite reduzir uma equação diferencial de segunda ordem a um par de equações diferenciais de primeira ordem, de integração mais fácil.

Abstract

We show that the factorization method can be applied to solve Legendre equation, introducing raising and lowering operators which act on orbital angular momentum eigenstates (Legendre polynomials). Using the factorization method, we can reduce a second order differential equation to a pair of first order ones, that are more easily integrated.

I. Introdução

No equacionamento de um problema físico envolvendo sistemas contínuos, tanto em nível clássico como quântico, o resultado é um sistema de equações diferenciais parciais, em geral de segunda ordem. Equações diferenciais parciais ligadas a alguns modelos específicos, sob certas condições de contorno e de simetria, podem ser submetidas a separação de variáveis, reduzindo-se a conjuntos de equações diferenciais ordinárias. Como estas equações são comuns a uma variada gama de sistemas físicos diferentes, o estudo e a obtenção das suas soluções são feitos exaustivamente em física-matemática[1,2,3,4]. A equação de Legendre é um dos principais exemplos de equações diferenciais de interesse em física-matemática, muitas vezes usada como modelo para a introdução das chamadas funções especiais, soluções dessas equações, obtidas a partir da expansão em série de potências conhecida como o Método de Frobenius. Os polinômios de Legendre definem a primeira solução da equação de Legendre[4]. Em mecânica quântica, algumas destas equações são resolvidas usando-se um método alternativo simples e eficaz, através da fatoração da equação, tendo frequentemente como modelo o oscilador harmônico simples unidimensional[5,6]. Neste caso, a fatoração permite introduzir operadores de levantamento e abaixamento de índice (similares aos de criação e destruição da Teoria Quântica de Campos e muitas vezes assim denominados), que permitem o acesso a todas as soluções a partir da solução correspondente ao estado fundamental, por exemplo, cuja equação pode ser reduzida a uma equação diferencial de primeira ordem, de integração imediata. Mostramos que o método dos operadores, nos mesmos moldes, é eficaz também no tratamento da equação de Legendre. Motiva-nos, inclusive, a possibilidade de se obter com o seu concurso, uma fatoração mais completa da hamiltoniana quântica de sistemas como o átomo de hidrogênio[7,8] ou o oscilador harmônico isotrópico a três dimensões[9,10], onde a equação de Legendre associada surge como a parte angular da equação que descreve o sistema. Nos casos acima citados, consegue-se introduzir operadores de criação, por exemplo, tais que

$$A^+ R_{n,\ell} \rightarrow R_{n+1,\ell} \tag{1}$$

(osciladores harmônicos),

$$A^+_{n\ell} R_{n,\ell} \rightarrow R_{n+1,\ell} \tag{2}$$

(átomo de hidrogênio),

$$A^+_\ell R_{n,\ell} \rightarrow R_{n,\ell+1} \tag{3}$$

ou

$$L_+ Y_{\ell,m} \rightarrow Y_{\ell,m+1} \ , \tag{4}$$

sendo a solução completa dada por

$$\Psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \ . \tag{5}$$

Os operadores que permitem a fatoração da equação de Legendre, como veremos adiante, atuam em transformações do tipo

$$Q^+_\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \rightarrow Y_{\ell+1,m}(\theta,\varphi) \ , \tag{6}$$

$$Q_\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \rightarrow Y_{\ell-1,m}(\theta,\varphi) \ , \tag{7}$$

completando, portanto, o conjunto de operadores necessários para percorrer todos os auto-estados de energia e momento angular. Um breve resumo dos resultados é apresentado pelo autor na ref. [9]. Operadores classe **T** [10],

$$T_+ \Psi_{j,j} \longrightarrow \Psi_{j+1,j+1} \tag{8}$$

também desempenham este papel.

Operadores do tipo Q_ℓ e Q^+_ℓ acima definidos atuam sobre auto-estados do momento angular orbital $\mathbf{L}^2$, o que sugere a generalização a operadores que atuem sobre auto-estados do momento angular total $\mathbf{J}^2$ e em particular, a operadores que atuem sobre auto-estados de spin $\mathbf{S}^2$, visto que

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \ . \tag{9}$$

Operadores do tipo

$$Q^+ \mid s = 0\rangle \rightarrow \mid s = \frac{1}{2}\rangle \tag{10}$$

e

$$Q \mid s = \frac{1}{2}\rangle \longrightarrow \mid s = 0\rangle \tag{11}$$

são conhecidos como operadores supersimétricos, e transformam auto-estados de spin inteiro em auto-estados de spin semi-inteiro, ou seja, bósons em férmions e vice-versa[11,12]. Apesar destas indicações, sendo o nosso objetivo de carácter prático, não temos a pretensão de abordar, por exemplo, a álgebra obedecida por estes operadores, ou sua relação com os geradores das transformações supersimétricas, de modo que trataremos do assunto do ponto de vista eminentemente operacional.

II. Os Operadores

A equação de Legendre, em física-matemática, é frequentemente apresentada na forma

$$(1-u^2)\frac{d^2P_\ell(u)}{du^2} - 2u\frac{dP_\ell(u)}{du} + \ell(\ell+1)P_\ell(u) = 0, \tag{12}$$

para valores de ℓ inteiros ($\ell = 0,1,2,3,\ldots$) e surge da parte angular da expansão do d'Alambertiano ∇^2 em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), com a introdução da variável auxiliar $u = cos\theta$. Consideremos as relações de recorrência[4]

$$(1-u^2)\frac{dP_\ell(u)}{du} = \ell P_{\ell-1}(u) - \ell u P_\ell(u) \tag{13}$$

e

$$(1-u^2)\frac{dP_\ell(u)}{du} = (\ell+1)uP_\ell(u) - (\ell+1)P_{\ell+1}(u) \ . \tag{14}$$

A primeira delas pode ser escrita na forma

$$\ell P_{\ell-1}(u) = \left[(1-u^2)\frac{d}{du} + \ell u\right] P_\ell(u) \tag{15}$$

e a segunda,

$$(\ell+1)P_{\ell+1}(u) = -\left[(1-u^2)\frac{d}{du} - (\ell+1)u\right] P_\ell(u) \ . \tag{16}$$

As equações acima são típicas definições de operadores de criação,

$$Q^{+}_{\ell+1} = -\left[(1-u^2)\frac{d}{du} - (\ell+1)u\right] \tag{17}$$

e de aniquilação,

$$Q_{\ell} = \left[(1-u^2)\frac{d}{du} + \ell u\right] , \tag{18}$$

nos moldes dos usados em mecânica quântica, conduzindo a

$$(\ell+1)P_{\ell+1}(u) = Q^{+}_{\ell+1}P_{\ell}(u) \tag{19}$$

e

$$\ell P_{\ell-1}(u) = Q_{\ell}P_{\ell}(u) . \tag{20}$$

Estas equações mostram que

$$(\ell+1)P_{\ell}(u) = Q_{\ell+1}P_{\ell+1}(u) = \frac{Q_{\ell+1}Q^{+}_{\ell+1}}{(\ell+1)}P_{\ell}(u) \tag{21}$$

e

$$\ell P_{\ell}(u) = Q^{+}_{\ell}P_{\ell-1}(u) = \frac{Q^{+}_{\ell}Q_{\ell}}{\ell}P_{\ell}(u) , \tag{22}$$

de modo que os operadores Q_{ℓ} e Q^{+}_{ℓ} devem satisfazer as relações

$$Q_{\ell+1}Q^{+}_{\ell+1}P_{\ell}(u) = (\ell+1)^2P_{\ell}(u) \tag{23}$$

e

$$Q^{+}_{\ell}Q_{\ell}P_{\ell}(u) = \ell^2P_{\ell}(u) , \tag{24}$$

indicando que $P_{\ell}(u)$ é auto-função de $Q^{+}_{\ell}Q_{\ell}$ e de $Q_{\ell+1}Q^{+}_{\ell+1}$, com auto-valores ℓ^2 e $(\ell+1)^2$, respectivamente.

Em especial, para $\ell = 0$,

$$Q_oP_o(u) = (1-u^2)\frac{d}{du}P_o(u) = 0 , \tag{25}$$

de modo que P_o deve ser uma constante, podendo ser convenientemente fixada no valor

$$P_o = 1 . \tag{26}$$

A partir da função inicial P_o, é possível determinar as demais auto-funções $P_{\ell}(u)$ pela aplicação sucessiva dos operadores de criação Q^{+}_{ℓ}. Assim, temos

$$P_1(u) = Q^{+}_1P_o(u) = -\left[(1-u^2)\frac{d}{du} - 1u\right]1 = u , \tag{27}$$

$$P_2(u) = -\frac{1}{2}\left[(1-u^2)\frac{d}{du} - 2u\right]u = -\frac{1}{2}(1-u^2) + u^2 = \frac{1}{2}(3u^2-1) \tag{28}$$

e, de forma genérica, para um ℓ inteiro positivo,

$$P_{\ell}(u) = \frac{1}{\ell}Q^{+}_{\ell}P_{\ell-1}(u) = \frac{1}{\ell}Q^{+}_{\ell}\frac{1}{\ell-1}Q^{+}_{\ell-1}\dots Q^{+}_1P_o(u)$$

$$= \frac{1}{\ell!}Q^{+}_{\ell}Q^{+}_{\ell-1}Q^{+}_{\ell-2}\dots Q^{+}_1P_o(u), \tag{29}$$

podendo-se verificar, com algum esforço, que pode ser reduzida à fórmula de Rodrigues[4]

$$P_{\ell}(u) = \frac{1}{2^{\ell}\ell!}\left(\frac{d}{du}\right)^{\ell}(u^2-1)^{\ell} , \tag{30}$$

que define os polinômios de Legendre de ordem ℓ.

Os polinômios de Legendre são auto-funções do operador de momento angular $\mathbf{L}^2$,

$$\mathbf{L}^2\,P_{\ell}(u) = \hbar^2\ell(\ell+1)\,P_{\ell}(u) , \tag{31}$$

o que, comparado à equação (24), leva à relação

$$\mathbf{L}^2\,P_{\ell}(u) = \hbar^2(Q^{+}_{\ell}Q_{\ell} + \ell)P_{\ell}(u) . \tag{32}$$

A expressão acima somente tem significado para as auto-funções $P_{\ell}(u)$ explicitadas, uma vez que os operadores Q_{ℓ} e Q^{+}_{ℓ} têm dependência explícita em ℓ. A partir das equações acima, pode-se verificar que

$$[\mathbf{L}^2, Q_\ell^+]P_{\ell-1} = 2\hbar^2\ell Q_\ell^+ P_{\ell-1}\ , \qquad (33)$$

$$[\mathbf{L}^2, Q_{\ell+1}^+]P_\ell = 2\hbar^2(\ell+1)Q_{\ell+1}^+ P_\ell \qquad (34)$$

e

$$[\mathbf{L}^2, Q_\ell]P_\ell = -2\hbar^2\ell Q_\ell P_\ell\ , \qquad (35)$$

caracterizando os operadores $Q_{\ell+1}^+$ e Q_ℓ como operadores de levantamento e abaixamento do índice ℓ para $(\ell+1)$ e $(\ell-1)$, respectivamente, das auto-funções $P_\ell(u)$.

A parte angular da expansão do operador d'Alambertiano ∇^2 em coordenadas esféricas é a equação associada de Legendre

$$\left[(1-u^2)\frac{d^2}{du^2} - 2u\frac{d}{du} - \frac{m^2}{(1-u^2)} + \ell(\ell+1)\right] P_{\ell m}(u) = 0\ , \qquad (36)$$

sendo $P_{lm}(u)$ os polinômios associados de Legendre. Pode-se verificar que estes polinômios satisfazem a equação de auto-valores

$$Q_\ell^+ Q_\ell P_{\ell m}(u) = (\ell^2 - m^2)P_{\ell m}(u)\ . \qquad (37)$$

Vale ressaltar que as auto-funções $P_{\ell m}$ podem ser obtidas a partir das auto-funções P_ℓ (caso $m=0$), pela aplicação sucessiva do operador degrau de momento angular L_+,

$$L_+ P_{\ell,m} \rightarrow P_{\ell,m+1}\ . \qquad (38)$$

III. Funções de Legendre de segunda espécie

A técnica dos operadores de fatoração é útil também para a obtenção das segundas soluções das equações de Legendre. Uma forma alternativa para a equação de Legendre (12) é

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d}{du}y_\ell\right] + \ell(\ell+1)y_\ell = 0. \qquad (39)$$

Esta equação, para $\ell = 0$, fica

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d}{du}y_0\right] = 0, \qquad (40)$$

ou seja,

$$(1-u^2)\frac{d}{du}y_0 = C, \qquad (41)$$

onde C é uma constante arbitrária. A equação (41), para $C=0$, leva à equação (25), com $y_0 = P_0$, resultando nas soluções polinomiais de Legendre; se C for uma constante arbitrária não nula ($C \neq 0$), a equação fica

$$\frac{dy_0}{du} = \frac{C}{(1-u^2)}, \qquad (42)$$

cuja solução é, assumindo $|\ u\ | < 1$ e $C = 1$,

$$y_0(u) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+u)}{(1-u)}. \qquad (43)$$

Esta função é exatamente a segunda solução da equação de Legendre, caso $\ell = 0$.

As funções de Legendre de segunda espécie de qualquer ordem ℓ podem ser obtidas por aplicações sucessivas dos operadores de criação Q_ℓ^+, definidas pela equação (17), sobre a função (43). Por exemplo,

$$y_1(u) = Q_1^+ y_0(u) = -\left[(1-u^2)\frac{d}{du} - u\right] y_0(u)$$

$$= \frac{u}{2}\ln\frac{(1+u)}{(1-u)} - 1. \qquad (44)$$

IV. Conclusões

O método dos operadores, aplicado ao tratamento da equação de Legendre, apresenta algumas vantagens em relação ao tratamento tradicional, sobretudo em termos de simplicidade, e ressalta, de certa maneira, a origem física da equação de Legendre, principalmente em mecânica quântica, onde os operadores de levantamento e de abaixamento de índice assumem pleno significado. Outras equações diferenciais de segunda ordem de interesse na Física são fatoráveis e o seu estudo pode contribuir para uma melhor compreensão do método dos operadores. Outro ponto a ser destacado é a importância de, uma vez conhecidos os operadores envolvidos na fatoração que atuam em certo espaço vetorial, tentar estabelecer, quando cabível, a álgebra destes operadores, um passo essencial na abstração deste espaço. Finalmente, na situação aqui tratada, torna-se interessante o estudo de uma possível extensão ao spin.

Referências

1. W. E. Boyce e R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons (1965)
2. D. H. Menzel, *Mathematical Physics*, Dover Publications (1961).
3. A .N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Equaciones de la Fisica Matematica*, MIR (1972), Moscow.
4. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1966); E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1968).
5. L. Infeld e T. E. Hull, *The Factorization Method*, Rev. Mod. Phys., **v.23**, n. 1 (1951) 21-68.
6. S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons (1974); E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons (1961); J. L. Powell e B. Crasemann, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1961); A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North-Holland (1970).
7. L. Harris and A. L. Loeb, *Introduction to Wave Mechanics*, McGraw -Hill (1963).
8. I. Kimel, *A Simple Way of Solving the Hydrogen Atom Problem*, Rev. Bras. de Fśica, v.12, n.4 (1982) 729-737.
9. M. Goto, *O Método dos Operadores de Fatorização em Sistemas Quânticos Tridimensionais*, a sair na Rev. Bras. Ensino de Física, v. 15 (1993).
10. R. H. Dicke e J. P. Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1960).
11. N. A. Alves e E. Drigo Filho, *The Factorisation Method and Supersymmetry*, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 3212-3225.
12. M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Reports **128** (1985) 39-204. (Obs.: Esta referência não é essencial para o entendimento deste texto.)