

# Caos em Sistemas Clássicos Conservativos

Marcus A. M. de Aguiar

Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP  
Campinas, SP, 13083-970, CP 6165 - Brasil

Trabalho recebido em 13 de Maio de 1994

## Resumo

Apresentamos uma introdução à teoria de caos em sistemas conservativos através do estudo de osciladores com um e dois graus de liberdade. Primeiramente são considerados apenas osciladores não acoplados, onde aproveita-se a simplicidade do movimento para introduzir o conceito de seções de Poincaré e analisar a estrutura topológica do espaço de fases. Mostra-se em seguida que a existência de acoplamentos genéricos entre os osciladores muda qualitativamente a estrutura do espaço de fases, introduzindo caos nas vizinhas das órbitas periódicas instáveis. O estudo do movimento caótico é desenvolvido com os teoremas de Poincaré-Birkhoff e KAM.

## I. Introdução

Nos últimos 30 anos o interesse de várias áreas do conhecimento tem se voltado para a questão do aparecimento de comportamento caótico nas soluções de problemas que anteriormente pareciam simples e sem relevância científica. Na verdade, apesar da palavra *caos* ter sido acrescentada ao vocabulário científico a relativamente pouco tempo, seu conteúdo e existência já eram conhecidos no começo deste século pelo matemático francês Henri Poincaré<sup>[1]</sup>. Graças à sua genialidade, Poincaré conseguiu demonstrar que sistemas muito simples, como uma partícula movendo-se em uma superfície bidimensional, poderiam apresentar movimentos altamente complexos e instáveis. A instabilidade deste novo tipo de movimento vislumbrado por Poincaré era tão intensa que duas trajetórias que comessem muito próximas se afastariam uma da outra de forma exponencialmente rápida. Na prática esse tipo de instabilidade leva à imprevisibilidade do comportamento do sistema para tempos longos. Isso acaba ocorrendo porque qualquer erro ou incerteza que tenhamos sobre as condições iniciais acaba se propagando rapidamente de tal forma que, depois de um certo intervalo de tempo, não podemos mais dizer qual o estado do sistema. Essa *perda rápida de informação* é o

que caracteriza o que chamamos de *caos determinístico*. É importante notar que os erros nas condições iniciais podem vir tanto de aparelhos medidores em uma experiência quanto do número de dígitos disponíveis em uma simulação numérica.

Embora a teoria de caos tenha inúmeras aplicações em campos como biologia, medicina, química, economia, etc., vamos neste trabalho dar apenas uma introdução à teoria de caos na física. Exemplos de aplicações em algumas dessas áreas podem ser encontrados na ref. [2]. Mesmo dentro da física clássica o caos pode se manifestar de duas formas distintas, dependendo de haver ou não dissipação de energia. O caso dissipativo é extremamente interessante pois envolve os famosos *atratores estranhos* além de conceitos como *dimensão fractal* etc. No entanto, trataremos neste trabalho apenas do caso conservativo, onde, apesar de nunca ocorrerem atratores de nenhum tipo, temos a possibilidade de modelar sistemas microscópicos isolados, onde aplica-se também a teoria quântica. O estudo de caos na mecânica quântica e suas possíveis aplicações é um dos mais ativos campos de pesquisa em física teórica atualmente e isso tem sido uma das motivações mais importantes para essa retomada do estudo clássico. Três excelentes livros de divulgação científica voltados basicamente ao caos dissipativo são dados pela refs. [3-5]

ou pela edição sobre caos das revistas *La Recherche*<sup>[6]</sup> e *Ciência Hoje*<sup>[7]</sup>, onde também podem ser encontrados textos sobre caos quântico. As refs. [8-11] contém excelentes revisões sobre caos quântico, e a ref. [12] sobre caos dissipativo, todas em nível mais avançado.

É importante ressaltar que, apesar de introdutório, este *não* é um trabalho de divulgação científica, mas é dirigido aos estudantes de ciências exatas com algum conhecimento de cálculo e, principalmente, de mecânica. A intenção aqui é de fazer uma revisão didática sobre o tema de caos em sistemas conservativos e, através de exemplos simples, introduzir os conceitos e ferramentas básicas que são utilizados neste fascinante campo de pesquisa. No entanto, como este é um texto introdutório, nem todas as afirmações que faremos serão demonstradas, ou pela dificuldade envolvida ou para não tornar este texto ainda mais longo. Nesses casos serão dadas referências para que o leitor possa posteriormente completar essas lacunas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção II introduziremos brevemente o formalismo Hamiltoniano, onde mostramos que as equações de Newton para um sistema conservativo de  $N$  graus de liberdade podem ser reescritas na forma de um conjunto de  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem no tempo. Na seção III resolvemos uma série de problemas simples, não caóticos, introduzindo uma linguagem mais moderna e sofisticada que será necessária para descrever sistemas caóticos. Os elementos mais importantes dessa linguagem são o *espaço de fases* e as *seções de Poincaré*. O leitor também deve ficar atento ao papel das órbitas periódicas em todo esse estudo. A importância dessas órbitas foi reconhecida também por Poincaré<sup>[1]</sup>, que mostrou que em sistemas caóticos essas são as únicas estruturas que sobrevivem à quebra de regularidade (veja a seção III.4). Em toda a seção III os sistemas considerados serão do tipo massa-mola em uma ou duas dimensões, onde trataremos apenas o caso em que os dois graus de oscilação são desacoplados. Na seção IV consideraremos um acoplamento genérico entre os dois modos de vibração de um oscilador bidimensional e veremos que isso implica no aparecimento de movimento caótico e de uma complexa estrutura fractal no espaço de fases. Finalmente, a seção V é reservada às conclusões e comentários finais.

## II. As equações de Hamilton

De acordo com a teoria clássica de Newton, um sistema constituído por  $N$  partículas com coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_N$  movendo-se sob a ação de forças mútuas é regido pelas equações

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $F_i$  é a força sobre a  $i$ -ésima partícula. A solução deste conjunto de equações fornece  $N$  funções do tempo  $t$ , das posições iniciais  $x_i(0)$  e das velocidades iniciais  $\dot{x}_i(0)$  que descrevem o movimento de todo o sistema.

Embora as forças  $F_i$  dependam geralmente de  $x, \dot{x}$  e  $t$ , nos restringiremos aqui ao caso em que  $F_i = F_i(x)$  apenas. Além disso, vamos assumir que essas forças sejam *conservativas*, isto é, que derivem de uma função *Energia Potencial*  $V(x)$  de forma que as equações (1) possam ser escritas como

$$m\ddot{x}_i = F_i(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \quad (2)$$

Neste caso, podemos mostrar que a quantidade

$$H(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + V(x) \quad (3)$$

é uma *Constante do Movimento*, isto é,  $H(x, \dot{x})$  não muda com o tempo apesar de ambos  $x$  e  $\dot{x}$  mudarem de acordo com as equações (2). Isso pode ser mostrado por cálculo direto:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt} \right] \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + m_i \dot{x}_i \ddot{x}_i \right] \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \left[ m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (6)$$

(7)

onde usamos a eq.(2) na última passagem.

A função  $H$  é a energia do sistema e pode ser utilizada para a determinação das próprias equações de movimento. Para vermos como isso funciona definimos primeiro os momentos lineares

$$p_i = m_i \dot{x}_i \quad (8)$$

em termos dos quais as equações de Newton (2) ficam

$$\begin{cases} \dot{x}_i = p_i/m_i \\ \dot{p}_i = m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (9)$$

que, para  $i=1, \dots, N$  representa um conjunto de  $2N$  equações de primeira ordem no tempo, ao invés das  $N$  equações de segunda ordem dadas por (2). A função energia  $H$  em termos de  $x$  e  $p$  fica

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x) \quad (10)$$

e é chamada de *hamiltoniana*. Em termos de  $H(x, p)$ , as equações de movimento assumem a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (11)$$

que são as famosas *equações de Hamilton*. O espaço  $(x, p)$ , de  $2N$  dimensões é chamado de *espaço de fases* do sistema.

Assim, em vez de escrevermos as equações de Newton (2) podemos escrever diretamente a função energia  $H(x, p)$  e a partir dela obter as equações de movimento via (11). Além da vantagem de podermos trabalhar com equações de primeira ordem no tempo, as formulação Hamiltoniana tem a vantagem de permitir uma transição natural para a Mecânica Quântica, tópico que não abordaremos neste trabalho. O leitor interessado em aprender mais sobre o formalismo Hamiltoniano deve consultar livros texto como Goldstein<sup>[13]</sup>, Marion<sup>[14]</sup>, Symon<sup>[15]</sup>, Landau e Lifchitz<sup>[16]</sup> etc..

### III. Osciladores Harmônicos e Seções de Poincaré

Nesta seção estudaremos o comportamento qualitativo das soluções das equações de Hamilton para alguns sistemas simples. Como falamos na Introdução, a idéia será utilizar esses sistemas como ponto de partida para desenvolvermos uma linguagem um pouco mais sofisticada e podermos então estudar sistemas mais complexos onde trajetórias caóticas e regulares se misturam. Trataremos em primeiro lugar os osciladores harmônico e anarmônico em uma dimensão, passando em seguida ao oscilador bidimensional, onde introduziremos o importante conceito de *Seções de Poincaré*.

#### III.1 O Oscilador Harmônico em Uma Dimensão

Um dos sistemas mecânicos mais simples que existem é o oscilador harmônico unidimensional, representado por um corpo de massa  $m$  ligado a uma mola de constante elástica  $k$  e frequência natural de oscilação  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . A força elástica  $-kx$  pode ser derivada do potencial  $\frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ , de forma que a energia total, cinética mais potencial, é dada por

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (12)$$

Utilizando as equações de movimento de Hamilton (11) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = p/m \\ \dot{p} = -m\omega x \end{cases} \quad (13)$$

que, combinadas, recaem na segunda lei de Newton:

$$\ddot{x} = \dot{p}/m = -\omega^2 x. \quad (14)$$

A solução geral das equações (13) acima é dada por

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} p_0 \sin \omega t \\ p(t) = p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t \end{cases} \quad (15)$$

onde  $x_0$  e  $p_0$  são a posição e momento inicial. Reescrevendo em forma matricial obtemos

$$z(t) = A(t)z_0 \quad (16)$$

onde definimos

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \\ -m\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

A matriz  $A(t)$  propaga qualquer condição inicial  $z_0$ . É fácil mostrar que  $A(t)$  é periódica no tempo com período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , ou seja,

$$A(t) = A(t + \frac{2\pi}{\omega}) \quad (20)$$

Isso implica que *todas* as trajetórias possíveis, especificadas por diferentes vetores  $z_0$ , são periódicas, pois

$$z(t + T) = A(t + T)z_0 = A(t)z_0 = z(t) \quad (21)$$

É importante comentar aqui que essa totalidade de soluções periódicas é atípica para sistemas com mais de um grau de liberdade, como veremos a seguir.

Uma maneira prática de visualizar as soluções (16) é, em vez de desenhar  $x(t)$  e  $p(t)$ , desenhar diretamente  $p$  versus  $x$ . Pela lei de conservação da energia temos que

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (22)$$

ou

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1 \quad (23)$$

onde  $E$  é definida pelas condições iniciais:

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} \quad (24)$$

A equação (23) é a equação de uma elipse no espaço de fases  $(x, p)$ , como ilustrado na figura (3.1) para diferentes valores de  $E$ .

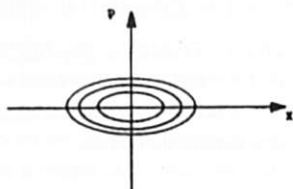


Figura 3.1 - Trajetórias do oscilador harmônico unidimensional no espaço de fases para diferentes energias.

### III.2 O Oscilador Anarmônico em uma Dimensão

Em sistemas físicos reais, como uma massa ligada a uma mola, o movimento harmônico é apenas uma solução aproximada do movimento real. Isso ocorre porque as molas, em geral, não obedecem perfeitamente a Lei de Hooke, e devemos incluir correções não lineares às equações de movimento. Tanto no formalismo Newtoniano quanto no Hamiltoniano, essas correções são incluídas diretamente na função potencial  $V(x)$ . A correção mais simples que podemos fazer ao potencial harmônico é acrescentar um termo proporcional à  $x^4$ :

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4} \quad (25)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  é geralmente pequeno.

Com esse novo potencial, as equações de Hamilton ficam

$$\begin{cases} \dot{x} = p/m \\ \dot{p} = -m\omega^2 x - \lambda x^3 \end{cases} \quad (26)$$

ou, recuperando a segunda lei de Newton,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \frac{\lambda x^3}{m} \quad (27)$$

É fácil ver que o movimento no espaço de fases  $(x, p)$  continua limitado e periódico, pois a energia potencial é sempre positiva. No entanto, a curva que descreve a trajetória no plano  $(x, p)$  não é mais uma elipse, como mostra a figura (3.2). Para pequenas oscilações em torno da origem, o termo  $\lambda x^3$  é pequeno e devemos ter um movimento muito próximo ao do oscilador harmônico. Para amplitudes maiores, no entanto, pode-se mostrar que o período do movimento diminui. Então, uma órbita com uma dada energia  $E$  terá um período  $T(E)$  que muda conforme mudamos de órbita, em vez de permanecer constante em  $\frac{2\pi}{\omega}$  como no caso do oscilador harmônico. Em outras palavras, quanto maior a amplitude de oscilação da partícula maior será sua energia e mais rapidamente ela completará um ciclo e voltará a sua posição inicial. Essa dependência do período com a energia será extremamente importante para nossa discussão de oscilações em duas dimensões. Uma boa aproximação para  $T(E)$  no caso de  $\lambda$  pequeno é [19]

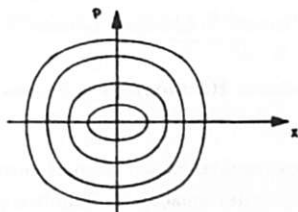


Figura 3.2 - Trajetórias do oscilador anarmônico unidimensional para diferentes energias.

$$T(E) = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 - \frac{3\lambda E}{4m^2\omega^4} \right) \quad (28)$$

Embora essa expressão não seja muito difícil de deduzir, não entraremos nesse tipo de detalhe técnico aqui.

### III.3 O Oscilador Harmônico em Duas Dimensões

Vamos agora permitir que nosso oscilador possa se movimentar no plano  $(x, y)$ , estando acoplado a duas molas de constantes  $k_1$  e  $k_2$  e frequências de oscilação  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$  e  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ . Nesse caso, a energia total será a soma das energias em cada modo de oscilação, de forma que a Hamiltoniana fica

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2} \quad (29)$$

Em analogia com o que fizemos na seção (III.1), definimos um vetor de 4 componentes por

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \quad (30)$$

em termos do qual a solução geral das equações de Hamilton assume novamente a forma simples

$$z(t) = A(t)z_0 \quad (31)$$

onde agora  $A(t)$  é uma matriz 4x4 dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & 0 & \frac{1}{m\omega_1} \sin \omega_1 t & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 t & 0 & \frac{1}{m\omega_2} \sin \omega_2 t \\ -m\omega_1 \sin \omega_1 t & 0 & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & -m\omega_2 \sin \omega_2 t & 0 & \cos \omega_2 t \end{pmatrix} \quad (32)$$

Como no caso anterior,  $A(t)$  contém toda informação sobre a dinâmica do sistema. No entanto, como  $A(t)$  envolve funções de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , duas classes distintas de soluções serão possíveis, dependendo da razão  $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  ser um número racional (da forma  $r/s$ , com  $r$  e  $s$  inteiros e primos entre si) ou irracional. Se  $\alpha = r/s$  (racional) podemos escrever

$$\begin{cases} \omega_1 = r\omega_0 \\ \omega_2 = s\omega_0 \end{cases} \quad (33)$$

e, nesse caso, vemos que

$$A\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = A(t) \quad (34)$$

pois

$$\cos\left[\omega_1\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \cos\left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{\omega_0} r\omega_0\right) = \cos \omega_1 t \quad (35)$$

o mesmo ocorrendo com os outros senos e cossenos de  $A(t)$ . Assim, se  $\alpha = r/s$  vemos que novamente todas as soluções são periódicas com período  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi s}{\omega_1} = \frac{2\pi r}{\omega_2}$ . Quando projetadas no plano  $(x, y)$  as trajetórias  $(x(t), y(t))$  formam as famosas *figuras de Lissajous*<sup>[14]</sup>.

Por outro lado, se  $\alpha$  é irracional  $A(t)$  não será periódica e as trajetórias nunca se fecham. Note que

o valor de  $\alpha$  é fixado pelas molas e, portanto, dadas duas molas já saberemos de início se suas órbitas serão ou não fechadas, não sendo possível ter os dois tipos de movimento num único sistema. As duas situações de  $\alpha$  racional ou irracional são ilustradas na figura (3.3).

### III.4 Seções de Poincaré

A visualização das trajetórias de um sistema bidimensional no espaço de fases  $x, y, p_x, p_y$  fica bastante complicada pela sua alta dimensionalidade. Para contornar esse problema Poincaré introduziu o que é hoje conhecido como *seções de Poincaré*. A idéia básica é a seguinte: o espaço de fases tem dimensão 4, mas, como a energia é conservada, o movimento ocorre numa região de dimensão 3 apenas, também chamada de *superfície de energia*, pois o vínculo  $H(x, y, p_x, p_y) = E$  deve ser obedecido. Escolhemos agora uma superfície dentro desse espaço tridimensional e marcamos as sucessivas interseções das trajetórias com essa superfície, como ilustrado na figura (3.4). A superfície onde marcamos os pontos é a seção de Poincaré e as interseções sucessivas geram o *mapa de Poincaré*, que substitui o fluxo contínuo das trajetórias por um conjunto discreto de pontos. Poincaré mostrou que todas as propriedades

do sistema contínuo se refletem no mapa discreto, que é muito mais simples de estudar, pois tem dimensão 2 apenas.

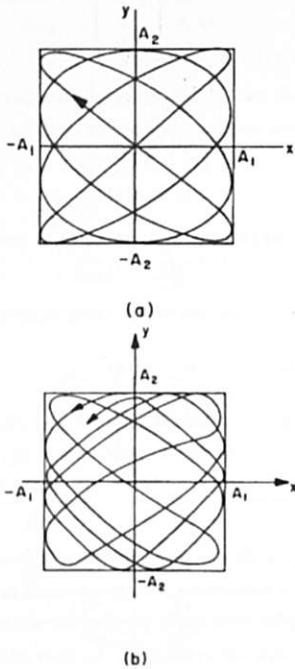


Figura 3.3 - Projeção de uma trajetória do oscilador harmônico bidimensional no plano  $x$ - $y$ . Na parte (a)  $\alpha$  é racional e na parte (b)  $\alpha$  é irracional. Os valores máximos de  $|x|$  e  $|y|$  são dados respectivamente por  $A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m\omega_1^2}}$  e  $A_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{m\omega_2^2}}$ .

Um exemplo de seção de Poincaré, que construiremos explicitamente para o caso do oscilador bidimensional, é a seção  $(x, p_x)$  construída com a escolha  $y = 0$ . Cada um dos vínculos  $H = E$  e  $y = 0$ , quando considerados isoladamente, restringem o movimento a 3 dimensões. A intersecção dessas duas superfícies tem dimensão 2, e é a seção de Poincaré. Para construir a seção tomamos uma trajetória qualquer do sistema que tenha energia  $E$  e observamos sua evolução temporal. Toda vez que a coordenada  $y$  (que varia com o tempo como todas as outras) passar por zero, marcamos um ponto no plano  $(x, p_x)$  definido pelo valor das coordenadas  $x(t)$  e  $p_x(t)$  no instante em que  $y = 0$ . Depois de algum tempo, quando a coordenada  $y$  voltar a se anular, marcamos um novo ponto no plano  $(x, p_x)$ .

Conseguimos assim fazer o mapa de Poincaré desta trajetória escolhida. Repetindo o procedimento para outras trajetórias com a mesma energia  $E$ , construímos o mapa completo para essa energia fixa. De fato, como as trajetórias furam a seção nos dois sentidos (veja a figura 3.4), os pontos  $(x, p_x)$  só são marcados se  $p_y > 0$ , ou seja, só marcamos os pontos quando as trajetórias atravessam a superfície de seção em um dos sentidos.

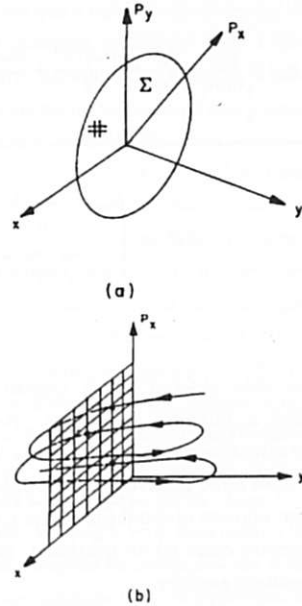


Figura 3.4 - (a) Representação esquemática da superfície de energia  $\Sigma$  no espaço de fases de 4 dimensões. (b) Projeção da superfície de energia no espaço  $y-x-p_x$  e intersecções de uma trajetória com o plano de Poincaré  $x-p_x$  (definido por  $y = 0$ ).

Para ilustrar e clarear essa idéia vamos montar o mapa de Poincaré para o oscilador harmônico bidimensional. Antes disso, porém, vamos estudar um pouco as propriedades topológicas de seu espaço de fases, pois isso nos ajudará a entender melhor os resultados. A superfície de energia constante  $H = E$  pode ser escrita como

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{p_y^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega_1^2}} + \frac{y^2}{\frac{2E}{m\omega_2^2}} = 1 \quad (36)$$

que é a superfície de um elipsóide em 4 dimensões (veja novamente a figura 3.4). Além disso, como a Hamiltoniana é a soma de dois osciladores desacoplados, o



leitor pode mostrar que a energia em cada direção é conservada individualmente, ou seja,

$$E_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} \quad (37)$$

e

$$E_2 = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2} \quad (38)$$

são ambas conservadas. As equações acima definem elipses nos planos  $(x, p_x)$  e  $(y, p_y)$  e, portanto, a trajetória se move sobre uma superfície de dimensão 2 que é o produto direto de duas elipses. Esse tipo de superfície é chamada de *toro* e é análoga a um *pneu*, como ilustrado na figura (3.5): cada um dos circuitos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  é projetado em uma das elipses.

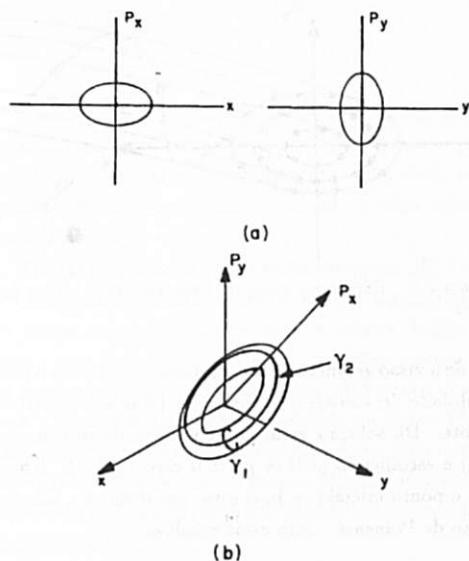


Figura 3.5 - (a) Projeção de uma trajetória típica nos planos  $x - p_x$  e  $y - p_y$ . (b) Visualização da superfície toroidal no espaço de fases, que quando projetada resulta nas elipses da parte (a).

Variando  $E_1$  e  $E_2$  mas mantendo  $E = E_1 + E_2$  constante equivale a mudar os semi-eixos das elipses. Mudando  $E_1$  de zero à  $E$ , por exemplo, varremos todas as possíveis elipses e toros, preenchendo assim toda a superfície de energia  $E$ . Dizemos então que a superfície de um elipsóide em 4 dimensões admite uma decomposição em uma família a um parâmetro ( $E_1$  nesse caso) de toros de dimensão 2.

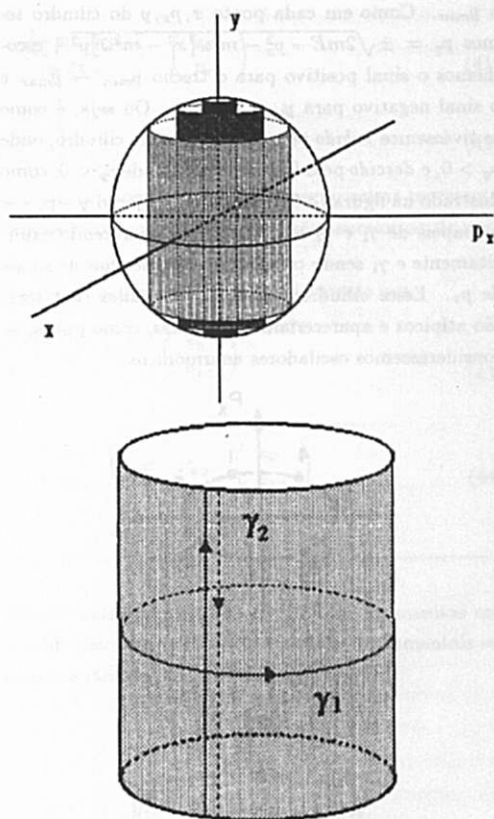


Figura 3.6 - (a) Projeção da superfície de energia no espaço  $x - p_x - y$ . Essa superfície, que aparece como o volume de um esferoide, é decomposta por uma família de cilindros, ou toros achatados. (b) Circuitos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sobre um cilindro típico.

Para o caso específico do oscilador bidimensional podemos desenhar as projeções da superfície de energia  $\Sigma$  e da família de toros no espaço  $x - p_x - y$ , por exemplo. Isso é ilustrado na figura (3.6a), onde os toros projetam-se como cilindros e a superfície  $\Sigma$  como o volume encerrado por um elipsóide. Os cilindros se degeneram na reta  $x = p_x = 0$  quando  $E = E_2$  ou na elipse máxima desenhada no plano  $y = 0$  quando  $E = E_1$ . Para um cilindro típico o circuito  $\gamma_1$  corresponde a dar uma volta no cilindro mantendo  $y$  constante. O circuito  $\gamma_2$  é obtido, por exemplo, partindo do menor valor possível de  $y$ ,  $y_{min}$ , com  $x$  e  $p_x$  fixos, indo até o valor máximo,  $y_{max}$ , e voltando novamente

a  $y_{min}$ . Como em cada ponto  $x, p_x, y$  do cilindro temos  $p_y = \pm \sqrt{2mE - p_x^2 - m^2\omega_1^2 x^2 - m^2\omega_2^2 y^2}$ , escolhamos o sinal positivo para o trecho  $y_{min} \rightarrow y_{max}$  e o sinal negativo para  $y_{max} \rightarrow y_{min}$ . Ou seja, é como se tivéssemos *subido pelo lado de fora* do cilindro, onde  $p_y > 0$ , e *descido pelo lado de dentro*, onde  $p_y < 0$ , como ilustrado na figura (3.6b). Em uma projeção  $y - p_y - x$  os papéis de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  se invertem,  $\gamma_2$  aparecendo explicitamente e  $\gamma_1$  sendo construído com escolhas de sinais de  $p_x$ . Esses cilindros, ou *toros achatados* (flat tori) são atípicos e apareceriam *engordados*, como pneus, se considerássemos osciladores anarmônicos.

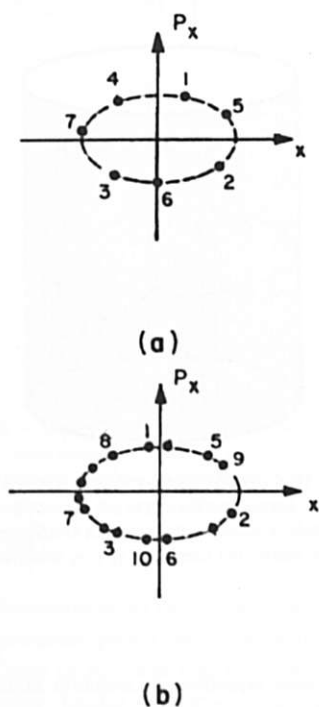


Figura 3.7 - Mapa de Poincaré no plano  $x - p_x$  para os casos (a)  $\alpha$  racional e (b)  $\alpha$  irracional. Na parte (a) a ilustração é feita com  $\alpha = \frac{2}{7}$ .

Voltemos então à seção de Poincaré: fixada uma órbita, cada vez que  $y$  passar por zero colocamos um

ponto na posição  $(x, p_x)$ . Como  $x(t)$  e  $p_x(t)$  só podem passar pela sua elipse, a sequência de pontos que obteremos estará sempre sobre esta elipse. Se  $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  for irracional o ponto inicial  $(x_0, p_{x0})$  (o primeiro ponto na seção) nunca se repetirá, e a elipse será preenchida uniformemente com o decorrer do tempo. Se  $\alpha$  for um racional do tipo  $r/s$ , então após  $s$  furos o ponto inicial (qualquer que seja ele) será repetido, como ilustrado nas figuras (3.7).

Mudando agora de trajetória variando  $E_1$  e  $E_2$  mas mantendo  $E$  fixo, obteremos pontos sobre outras elipses, que são nada mais do que as seções transversais dos toros na superfície de energia  $E$ , como pode ser visto na figura (3.8). Em todas essas elipses a velocidade angular média é a mesma, dada por  $2\pi\alpha$ .

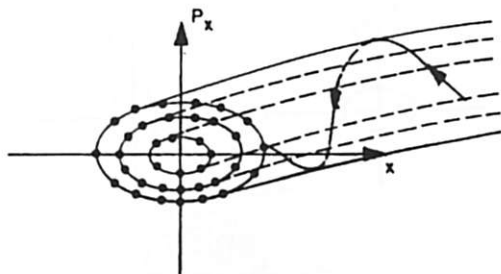


Figura 3.8 - Elipses na seção de Poincaré como seções dos toros.

Se a visão geométrica ficou complicada, temos a possibilidade de construir o mapa de Poincaré analiticamente. Da solução geral das equações de movimento (31) e escolhendo  $y(0) = y_0 = 0$  com  $p_{y0} > 0$ , temos que o ponto inicial  $(x_0, p_{x0})$  está, por definição, sobre a seção de Poincaré. Com essas escolhas

$$y(t) = \frac{p_{y0}}{m\omega_2} \sin \omega_2 t \quad (39)$$

e  $y(t)$  será zero novamente para  $t = \pi/\omega_2$ , mas nesse instante é fácil ver que  $p_y = -p_{y0} < 0$ . Assim, só em  $t = t_1 = 2\pi/\omega_2$  teremos  $y(t) = 0$  e  $p_y(t) > 0$ . Nesse instante obtemos o próximo ponto na seção de Poincaré:

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1) = x_0 \cos 2\pi\alpha + \frac{1}{m\omega_1} p_{x0} \sin 2\pi\alpha \\ p_{x1} = p_x(t_1) = p_{x0} \cos 2\pi\alpha - m\omega_1 x_0 \sin 2\pi\alpha \end{cases} \quad (40)$$

ou, em forma matricial,



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & \frac{1}{m\omega_1} \sin 2\pi\alpha \\ -m\omega_1 \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\equiv P_\alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Note que apesar da semelhança com a solução do oscilador unidimensional, Eq.(16), a equação acima representa um mapa, pois o tempo não aparece do lado direito. Essa expressão conecta duas interseções sucessivas de uma trajetória com a seção de Poincaré.

Como a matriz  $P_\alpha$  não depende de  $x_0$  e  $p_{x_0}$ , a posição do  $k$ -ésimo ponto será dada simplesmente por

$$\begin{pmatrix} x_k \\ p_{x_k} \end{pmatrix} = \underbrace{P_\alpha \dots P_\alpha}_{k \text{ vezes}} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} = P_\alpha^k \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\pi k\alpha & \frac{1}{m\omega_1} \sin 2\pi k\alpha \\ -m\omega_1 \sin 2\pi k\alpha & \cos 2\pi k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} = P_{k\alpha} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x_0} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Como já comentamos, esse mapa corresponde a uma rotação ao longo elipse no plano  $x - p_x$  por um ângulo  $2\pi\alpha$ . Se  $\alpha = r/s$ , o  $s$ -ésimo ponto (com  $k=s$ ) será igual ao ponto inicial, correspondendo a uma solução periódica.

Outra propriedade importante do mapa  $P_\alpha$  é que seu determinante é igual a um, o que leva à *preservação de áreas*: se propagarmos todos os pontos dentro de uma curva fechada  $C$  qualquer com área interna  $A$ , os pontos propagados cairão numa nova curva  $\tilde{C}$  que terá a mesma área  $A$ , como ilustrado na figura (3.9). Essa propriedade, também conhecida como *Teorema de Liouville*<sup>[23,24]</sup>, vale para qualquer sistema Hamiltoniano e será utilizada na seção V quando estudarmos movimento caótico.

Devemos salientar que a escolha  $y = 0$  para a seção é totalmente arbitrária. As escolhas  $x = 0$  ou  $p_x = 0$  ou  $p_y = 0$  produzem outras seções que são, em princípio, tão boas quanto as primeiras.

Essa visão um tanto sofisticada de um problema tão simples não é à toa. Veremos que quando acoplarmos os modos de vibração nas direções  $x$  e  $y$  o movimento se

tornará extremamente complexo e as ferramentas que introduzimos nesta seção se tornarão fundamentais em nossas análises.

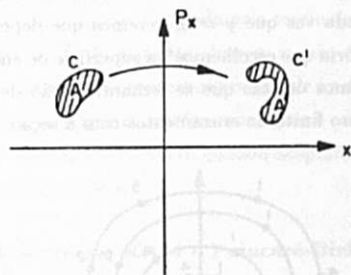


Figura 3.9 - Preservação de áreas pelo mapa de Poincaré: a área envolvida por  $C'$  e por  $\tilde{C}$  são iguais.

### III.5 Osciladores Anarmônicos em Duas Dimensões

Finalmente permitiremos que nossas molas sejam anarmônicas, do tipo descrito na seção (III.2). A Hamiltoniana será dada por

$$H = \left( \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{\lambda_1 x^4}{4} \right) + \left( \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2} + \frac{\lambda_2 y^4}{4} \right) \quad (45)$$

e, novamente, cada um dos termos entre parênteses é uma constante de movimento. Fixada uma energia total  $E$ , podemos dividi-la de várias maneiras entre  $E_1$  e  $E_2$ . A diferença crucial em relação ao oscilador harmônico é que o período de oscilação em cada direção vai depender dessa partição da energia total. Tomando novamente  $E_1$  como parâmetro (que variamos de zero à  $E$ ) e chamando  $\tau_x$  e  $\tau_y$  os períodos de oscilação em cada direção, vemos que  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\tau_y}{\tau_x}$  é uma função contínua de  $E_1$ , e não a constante  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  como na seção (III.3). Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são pequenos podemos usar a expressão (28) e obter explicitamente

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 - \frac{3\lambda_1 E_1}{4m^2 \omega_1^4}}{1 - \frac{3\lambda_2 (E - E_1)}{4m^2 \omega_2^4}}$$

$$\simeq \frac{\omega_1}{\omega_2} \left[ 1 + \frac{3\lambda_2 E}{4m^2 \omega_2^4} - \frac{3E_1}{4m^2} \left( \frac{\lambda_1}{\omega_1^4} + \frac{\lambda_2}{\omega_2^4} \right) \right]$$

Assim, mesmo que  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  seja irracional, ao variarmos  $E_1$  faremos com que  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  passe por uma infinidade de números racionais e irracionais distintos. Em termos da seção de Poincaré, conforme coletamos pontos no plano  $(x, p_x)$  cada vez que  $y = 0$ , veremos que dependendo da trajetória que escolhemos na superfície de energia  $E$  fixa, teremos órbitas que se fecham ou não depois de um número finito de cruzamentos com a seção.

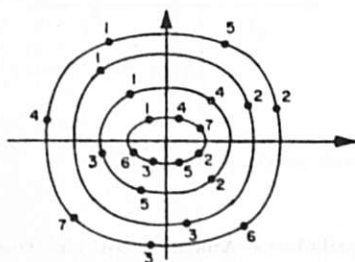


Figura 3.10 - Seção de Poincaré para os osciladores anarmônicos com  $m = \omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$  e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . As curvas contínuas são as seções dos toros cortados pelo plano  $x = p_x$ . O valor de  $\alpha$  em cada curva é (de dentro para fora):  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{7}$ . Os números indicam a sequência em que os pontos são mapeados.

Na figura (3.10) mostramos de forma esquemática uma seção de Poincaré típica para a Hamiltoniana (45) com a escolha  $m = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_2 = 2$ . Para  $E_1 = 0$  estamos próximos do centro da seção e

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} \simeq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3\lambda E}{64} \right)$$

que é um pouco maior que  $\frac{1}{2}$  para  $\lambda$  pequeno. Além disso, conforme  $E_1$  aumenta,  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  diminui. Na figura (3.10) mostramos alguns valores racionais simples pelos quais  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  passa conforme  $E_1$  aumenta:  $\frac{3}{7} \simeq 0.43$ ,  $\frac{2}{5} = 0.40$ ,  $\frac{1}{3} \simeq 0.33$  e  $\frac{2}{7} \simeq 0.29$ . Entre cada par desses valores existem uma infinidade de outros racionais mais complicados e também de irracionais. Por exemplo, entre  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{2}{5}$  existem  $\frac{15}{37}$  e  $\frac{27}{65}$  que são racionais e  $\frac{15\pi}{115}$  que é irracional. Os toros, cujas seções transversais vemos como elipses na seção de Poincaré, são chamados de *racionais* ou *irracionais* conforme  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  seja racional ou irracional respectivamente. Voltaremos a discutir sobre números racionais e irracionais quando estudarmos movimentos caóticos na próxima seção.

#### IV. Caos

O oscilador anarmônico que estudamos na seção (3.5) é ainda um sistema atípico pelo fato de ser separável. Em geral um sistema com dois graus de liberdade não é separável, ou seja, existem acoplamentos entre os dois graus. Mais do que isso, sistemas com dois graus de liberdade não são, em geral, *integráveis*. Um sistema hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade é dito integrável quando existem  $n$  funções  $F_i(q, p)$  independentes que são constantes do movimento, ou seja,  $F_i(q(t), p(t)) = f_i = \text{constante}$  para todo  $t$ . O teorema de *Arnold-Liouville*<sup>[17]</sup> garante que as equações de movimento de sistemas hamiltonianos integráveis podem ser resolvidas por meio de operações algébricas (como inversão de funções) e *quadraturas* (cálculo de integrais de funções conhecidas). A energia, obviamente, é uma função desse tipo, de forma que sistemas com 1 grau de liberdade são sempre integráveis. Para  $n > 1$  a existência de outras constantes de movimento independentes da energia já não é óbvia e vai ou não ocorrer dependendo do sistema.

Na verdade a definição precisa de integrabilidade envolve alguns detalhes técnicos, como o conceito de independência das funções  $F_i$ , que pretendemos evitar neste artigo. O leitor deve referir-se ao livro de Arnold<sup>[17]</sup>

para uma leitura mais completa e formal. Em poucas palavras, o fato de um sistema ser não-integrável implica que não existe solução fechada geral para suas equações de movimento em termos das condições iniciais e do tempo. Essa impossibilidade de se encontrar uma fórmula fechada para as soluções está intimamente ligada ao fato do sistema exibir movimento caótico.

Vemos nesta seção que a adição de acoplamentos à sistemas inicialmente separáveis provoca mudanças qualitativas extremamente importantes no comportamento das trajetórias. Em particular esses acoplamentos levam ao aparecimento do chamado *caos determinístico*, fenômeno ligado à alta instabilidade das soluções do sistema.

#### IV. 1 O Mapa de Poincaré Revisitado

O estudo de sistema acoplados é bastante simplificado com a utilização das seções de Poincaré. Na seção (III.4) construímos explicitamente o mapa de Poincaré para o oscilador harmônico bidimensional, eq.(42). Escolhendo o produto  $m\omega_1 = 1$  vemos que esse mapa corresponde a uma rotação por um ângulo  $2\pi\alpha$ . Introduzindo coordenadas polares no plano  $(x, p_x)$  por

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + p_x^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{p_x}{x}\right) \end{cases} \quad (46)$$

o mapa do oscilador pode ser escrito como

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_0 \\ \theta_1 = \theta_0 + 2\pi\alpha \end{cases} \quad (47)$$

Vemos também que o mapa de Poincaré dos osciladores anarmônicos, seção (III.5), é qualitativamente semelhante ao mapa acima. As duas diferenças importantes são: (1) as curvas sobre as quais ficam os pontos iterados pelo mapa não são mais círculos (ou elipses se  $m\omega_1 \neq 1$ ), embora ainda sejam curvas fechadas e; (2) o ângulo de rotação sobre cada curva depende da curva. Dessa forma, vemos que mesmo com a escolha  $m\omega_1 = 1$  não conseguiremos escrever o mapa de Poincaré numa forma tão simples como em (47) acima. No entanto, em vez de tentarmos achar a forma exata desse mapa, faremos uma idealização: vamos supor que consigamos fazer uma transformação de coordenadas  $(x, p_x) \rightarrow (\rho, \theta)$

diferente da (46) acima, tal que em termos de  $\rho$  e  $\theta$  o mapa anarmônico fique

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_0 \\ \theta_1 = \theta_0 + 2\pi\alpha(\rho_0) \end{cases} \quad (48)$$

ou, mais formalmente,

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

onde usamos o sub-índice '0' para indicar que o mapa corresponde ao sistema desacoplado. Com esse procedimento nós deformamos as curvas fechadas em círculos mas deixamos que o ângulo de rotação  $\alpha$  dependa do raio do círculo, como na figura (3.10). Vamos também, em analogia com a discussão da seção III.5, supor que  $\frac{d\alpha}{d\rho} < 0$ , de forma que a velocidade de rotação diminua conforme  $\rho$  aumenta. Dizemos que os círculos são *curvas invariantes* deste mapa, pois se mapearmos todos os pontos do círculo  $\rho = \rho_0$  eles recairão sobre o mesmo círculo, embora cada ponto tenha rodado de  $\alpha$ .

Embora pareça um tanto mágica, esse tipo de transformação é de fato possível, dada pela teoria de *Formas Normais*<sup>[9,17-20]</sup>. Novamente abriremos mão deste detalhe técnico para que possamos prosseguir na descrição qualitativa. A pergunta que faremos agora é a seguinte: como fica a seção de Poincaré quando acoplamos os osciladores anarmônicos?

#### IV.2 Os Teoremas KAM e Poincaré-Birkhoff

A introdução de acoplamentos entre as coordenadas  $x$  e  $y$  do oscilador anarmônico altera o mapa de Poincaré. Como exemplo de acoplamento vamos somar o termo  $\epsilon x^2 y$  à Hamiltoniana (45), embora os resultados que seguem sejam independentes da forma específica deste acoplamento. Seguindo a apresentação de M. Berry<sup>[21]</sup>, escrevemos o mapa alterado como

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_0 + \epsilon f(\rho_0, \theta_0) \\ \theta_1 = \theta_0 + 2\pi\alpha + \epsilon g(\rho_0, \theta_0) \end{cases} \quad (50)$$

ou, mais formalmente

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = T_\epsilon \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

onde o parâmetro  $\epsilon$  será considerado inicialmente pequeno.

Vamos agora nos concentrar na dinâmica do mapa nas vizinhanças de um toro racional do mapa não perturbado  $T_0$  e ver o que ocorre quando a perturbação,

$$T_0^s \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \theta + 2\pi\alpha(\bar{\rho})s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \theta + 2\pi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \theta \end{pmatrix} \quad (52)$$

ou seja, todos os pontos do círculo  $\rho = \bar{\rho}$  voltam sobre si mesmos, i.e., são *pontos fixos* do mapa  $T_0^s$ .

Além disso, como estamos supondo  $\frac{d\alpha}{d\rho} < 0$ , os círculos externos à  $\bar{\rho}$  tem  $\alpha < \alpha(\bar{\rho})$ . Então, depois de  $s$  iterações os pontos desses círculos vizinhos não voltarão exatamente sobre si mesmos: como  $\alpha < \alpha(\bar{\rho})$  eles se atrasarão um pouco, sendo mapeados para a direita do ponto inicial. Da mesma forma, pontos sobre círculos internos à  $\bar{\rho}$  tem  $\alpha > \alpha(\bar{\rho})$  e se adiantarão um pouco, sendo mapeados para a esquerda. Esse *mapa de torção* é ilustrado na figura (4.1), onde as setas indicam o sentido em que os pontos são mapeados.

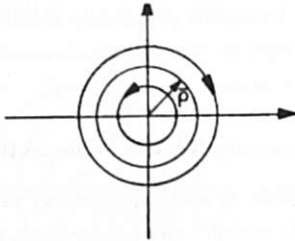


Figura 4.1 - Mapa de Poincaré dos osciladores desacoplados  $T_0^s$ . Os pontos só são marcados na seção a cada  $s$  cruzamentos. Todos os pontos do círculo  $\bar{\rho}$ , onde  $\alpha(\bar{\rho}) = r/s$ , são pontos fixos do mapa.

Liguemos agora o acoplamento  $\epsilon x^2 y$ . Se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno, esperamos que pontos com  $\rho > \bar{\rho}$  continuem rodando para a direita, embora de maneira não mais uniforme e não mais sobre círculos. Da mesma forma, esperamos que pontos com  $\rho < \bar{\rho}$  continuem rodando para a esquerda, de maneira que a característica de *torção* do mapa seja preservada. Consideremos agora um ângulo  $\theta_0$  fixo e vamos acompanhar

ou acoplamento, é ligada. Seja então  $\bar{\rho}$  o raio de um círculo tal que  $\alpha(\bar{\rho}) = r/s$ . Iterando  $s$  vezes o mapa  $T_0$  (ou seja, fazendo com que uma determinada trajetória fure  $s$  vezes a seção de Poincaré) temos

o sentido da rotação de pontos com  $\theta = \theta_0$  à diferentes distâncias da origem pela ação do mapa  $T_0^s$ , como na figura (4.2a). Se para  $\rho < \bar{\rho}$  os pontos rodam para a esquerda e para  $\rho > \bar{\rho}$  para a direita, tem que haver uma distância  $\rho(\theta_0)$  tal que o ponto especificado por  $(\theta_0, \rho(\theta_0))$  não roda, ou seja, sob a ação do mapa  $T_0^s$  o ponto  $(\theta_0, \rho(\theta_0))$  é levado em  $(\theta_0, \bar{\rho})$  onde  $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}$  em geral.

Fazendo isso para cada  $\theta_0$  encontramos uma curva, que chamamos de  $C_\epsilon$  dos *pontos que não rodam* pela ação de  $T_0^s$ , embora esses pontos possam se mover radialmente. Note que fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  a curva  $C_\epsilon$  tende ao círculo  $\rho = \bar{\rho}$ .

Na figura (4.2b) mostramos a curva completa  $C_\epsilon$ . O próximo passo consiste em mapear cada ponto da curva  $C_\epsilon$  de acordo com  $T_0^s$ . Como, por construção esses pontos não rodam, eles só podem se mover radialmente. A nova curva assim gerada é  $\tilde{C}_\epsilon = T_0^s C_\epsilon$ . Usaremos agora a propriedade de preservação de áreas (veja a seção 3.4) que diz que a área envolvida por  $C_\epsilon$  e  $\tilde{C}_\epsilon$  são iguais. Então, se alguns pontos de  $C_\epsilon$  encolhem ao aplicarmos  $T_0^s$ , outros tantos devem esticar, de forma que  $C_\epsilon$  e  $\tilde{C}_\epsilon$  devem se intersectar em um número par de pontos (desconsiderando o caso em as curvas se tangenciam, pois a chance de que isso ocorra é muito pequena). Isso é ilustrado na figura (4.3), onde as setas indicam a direção do movimento dos pontos sob o mapa de Poincaré  $T_0^s$ . Os pontos de intersecção de  $C_\epsilon$  e  $\tilde{C}_\epsilon$  são pontos fixos do mapa, pois não rodam e não tem movimento radial, correspondendo portanto à órbitas periódicas do sistema.

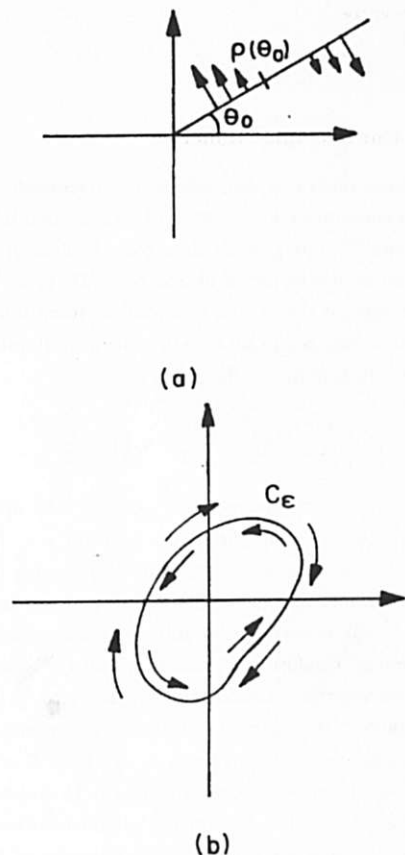


Figura 4.2 - (a) Direção do fluxo para um ângulo fixo  $\theta_0$  pelo mapa perturbado  $T_\epsilon^s$ . O ponto à distância  $\rho(\theta_0)$  não roda. (b) Curva  $C_\epsilon$  dos pontos que não rodam, formada pelos pontos  $\rho(\theta_0)$  da parte (a) com  $\theta_0$  variando de  $0$  a  $2\pi$ .

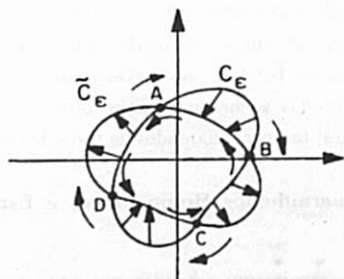


Figura 4.3 - Curva  $\tilde{C}_\epsilon$ , obtida pelo mapeamento de cada ponto de  $C_\epsilon$ . As setas indicam a direção do fluxo.

Mas podemos ir mais longe, obtendo informações sobre a estabilidade dessas órbitas: observando a direção

das setas na figura (4.3) vemos que o fluxo nas vizinhanças dos pontos fixos **A** e **C** circula em torno deles. Então, as órbitas periódicas correspondentes são *estáveis*, pois órbitas vizinhas permanecem vizinhas. Por outro lado, o fluxo nas vizinhanças de **B** e **D** tende a afastar as órbitas próximas, o que indica que as órbitas periódicas associadas à **B** e **D** são *instáveis*.

Na verdade, como estamos iterando o mapa de Poincaré  $s$  vezes, cada órbita periódica aparece na seção como uma sequência de  $s$  pontos. Assim, se  $\alpha = \frac{2}{5}$ , por exemplo, a figura esquemática (4.3) deve ser substituída pela figura (4.4). Nessa figura a órbita **A** é estável e os furos na seção ocorrem na sequência  $A_1, A_3, A_5, A_2 e A_4$ . Da mesma forma a órbita **B** é instável e sua sequência de furos é  $B_1, B_3, B_5, B_2 e B_4$ .

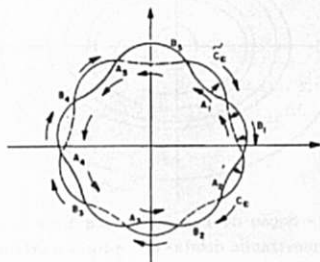


Figura 4.4 - Curvas  $C_\epsilon$  e  $\tilde{C}_\epsilon$  para o caso  $\alpha = \frac{2}{5}$ .

Resumindo, quando perturbamos um sistema integrável os toros racionais, antes cobertos por órbitas periódicas, são substituídos por um número par de órbitas periódicas, metade estável e metade instável. Esse é o conteúdo do *Teorema de Poincaré-Birkhoff*.

Pelas figuras (4.3) e (4.4) vemos que a perturbação que *destruiu* o toro racional também modifica toda uma vizinhança deste toro, destruindo também os toros irracionais muito próximos. Surge então uma questão importante: se todo toro irracional tem um toro racional tão próximo dele quanto se queira (pois os números racionais são densos nos irracionais), e se todo toro racional destruído leva consigo uma vizinhança, será que alguns toros irracionais sobrevivem à perturbação ou será que são todos destruídos e o movimento totalmente alterado? Antes de responder essa pergunta é importante entender o que significa um toro ser destruído: antes de ligarmos a perturbação, uma trajetória típica

passa pelo espaço de fases e fura sucessivamente a seção de Poincaré  $(x, p_x)$  de tal forma que os pontos na seção caem sobre um círculo (ou elipse). A propagação desse círculo pelo espaço de fases gera o toro, como já mostramos na figura (3.8). Quando dizemos que, ao ligar a perturbação, o toro foi destruído, queremos dizer que a trajetória não se propaga mais sobre essa superfície toroidal, mas ocupa um pequeno volume em torno do antigo toro, como ilustrado na figura (4.5). A sequência de interseções forma agora um padrão irregular (caótico!).

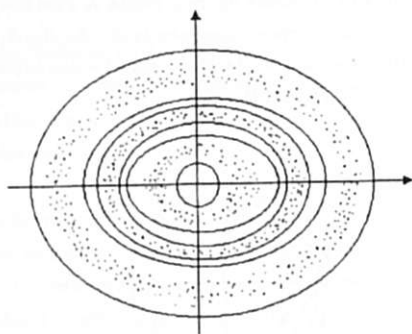


Figura 4.5 - Seção de Poincaré típica para os osciladores acoplados, mostrando órbitas sobre toros e órbitas caóticas.

Voltemos agora a pergunta anterior: qual a porcentagem dos toros que sobrevive à perturbação? Sabemos que só os irracionais têm chances de sobreviver, já que os racionais se quebram de acordo com o Teorema Poincaré-Birkhoff. A resposta a essa questão é dada pelo famoso Teorema KAM (Kolmogorov, Arnold e Moser). Esse teorema garante que, contrariamente ao que possa parecer, a grande maioria dos toros irracionais sobrevive, sendo que a porcentagem destruída vai a zero quando  $\epsilon$  vai a zero. Os toros destruídos são só aqueles muito próximos dos racionais, onde o critério de proximidade tem a ver com o quão bem se consegue aproximar o ângulo de rotação  $\alpha$  do toro em questão por um número racional. Apesar dessa discussão sobre teoria de números ser fascinante, não vamos entrar nesse tópico aqui, mas o leitor deve consultar os trabalhos de Berry<sup>[21]</sup> e Keating<sup>[22]</sup> para uma leitura didática sobre o assunto, e os livros de Arnold e Avez<sup>[25]</sup> e Ozorio de Almeida<sup>[9]</sup>, para mais detalhes técnicos.

Mostraremos a seguir que nas regiões dos toros destruídos instala-se o movimento caótico. Mas va-

mos primeiro ver um exemplo concreto de osciladores anarmônicos.

### IV.3 Um Exemplo Numérico

Vamos ilustrar a discussão sobre movimentos acoplados com um exemplo simples bastante discutido na literatura<sup>[26]</sup>. Os gráficos de seções de Poincaré que mostramos abaixo foram obtido por S.D. Prado<sup>[27,28]</sup> por integração direta das equações de Hamilton pelo método Runge-Kutta de quarta ordem. A Hamiltoniana que utilizaremos aqui é dada por

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{0.1x^2}{2} + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2$$

O termo de acoplamento é  $-x^2y$ , e não aparece multiplicado por um parâmetro pequeno  $\epsilon$ . Nesse exemplo é a própria energia total  $E$  quem faz o papel de parâmetro pequeno. Para  $E$  pequeno os termos  $x^2y$  e  $\frac{\epsilon^4}{4}$  são pequenos e o problema é essencialmente harmônico. Conforme  $E$  aumenta, tanto o termo de acoplamento  $x^2y$  quanto o termo anarmônico  $\frac{\epsilon^4}{4}$  ficam importantes. As figuras (4.6) abaixo mostram seções de Poincaré para vários valores de  $E$ . Para  $E = 0.01$  observa-se 11 curvas correspondendo a 11 trajetórias distintas. Conforme  $E$  aumenta algumas trajetórias passam a ocupar uma região maior na seção de Poincaré, pipocando por toda uma faixa de forma bastante errática, até que para  $E = 0.08$  uma grande parte da seção é constituída por órbitas do tipo caótico. As sequências de 3 e 4 ilhas que observa-se para  $E \geq 0.03$  correspondem às órbitas periódicas estáveis (em torno das quais o movimento é circular) previstas pelo teorema Poincaré-Birkhoff. As curvas contínuas, que aparecem em todas as energias, são os toros irracionais sobreviventes, também chamados de toros KAM.

### IV.4 Emaranhados Homoclínicos e Estruturas Fractais

Vamos finalmente entender porque o movimento aparentemente caótico das órbitas mostradas nas figuras (4.6) é *realmente* caótico. Para isso temos que voltar à seção 4.2 e olhar com mais detalhe as vizinhanças dos pontos fixos instáveis **C** e **D** que aparecem



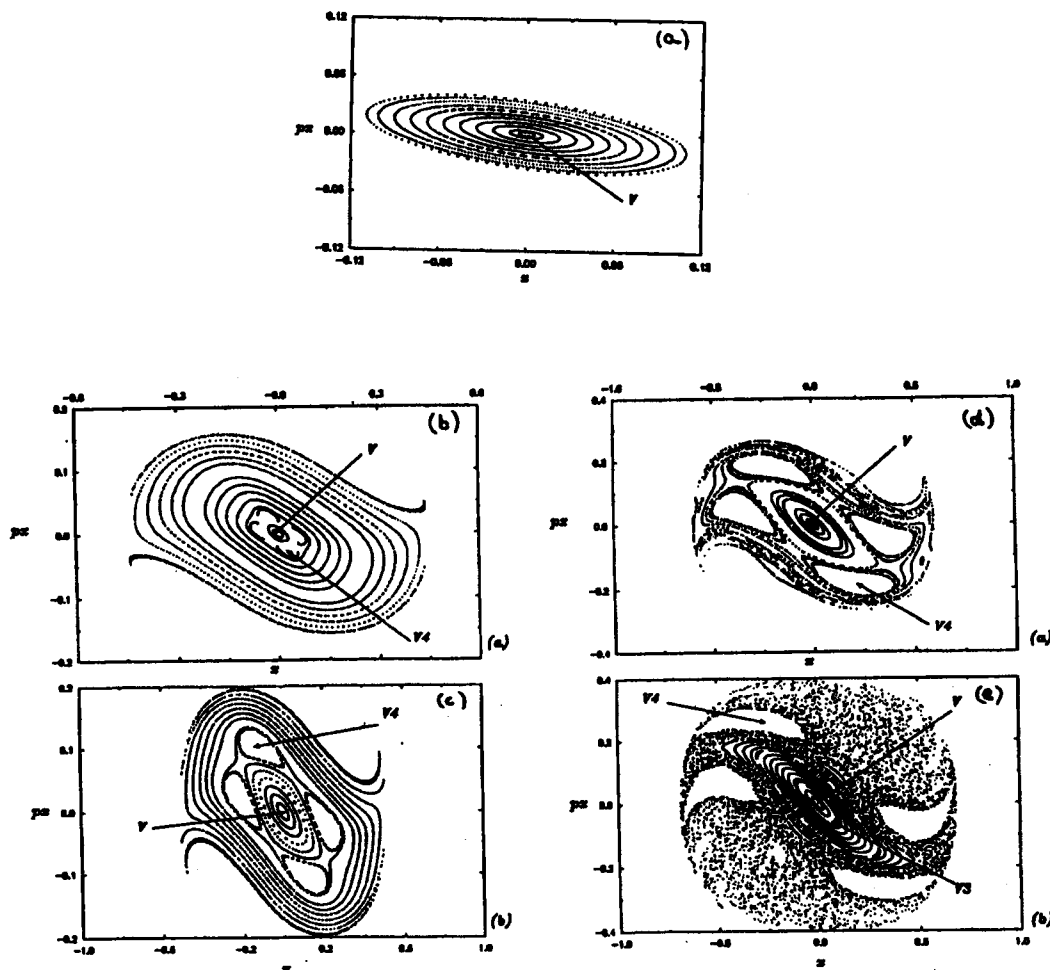


Figura 4.6 - Seção de Poincaré para a hamiltoniana da seção 4.3. A energia em cada seção é: (a)  $E = 0.01$ ; (b)  $E = 0.02$ ; (c)  $E = 0.03$ ; (d)  $E = 0.05$  e (e)  $E = 0.08$ .

na figura (4.3) ( ou os pontos  $B_1, B_2, \dots, B_5$  que aparecem em 4.4). O fluxo na vizinhança de um desses pontos é reproduzido na figura (4.7). As linhas pontilhadas são chamadas de *variedade estável*  $W^e$  e *variedade instável*  $W^i$ , dependendo se o fluxo vai em direção ao ponto fixo ou afasta-se dele respectivamente (compare o movimento indicado por essa figura com aquele nas vizinhanças dos pontos  $B$  na figura 4.4 e certifique-se que são qualitativamente iguais). De fato, por definição, a curva  $W^e$  é constituída dos pontos que tendem assintoticamente ao ponto fixo instável, enquanto que  $W^i$  é formada pelos pontos que tendem ao ponto fixo se revertermos o sentido do tempo. É claro que tanto  $W^e$  quanto  $W^i$  são curvas invariantes, no sentido de que pontos sobre elas são mapeados novamente sobre elas, como indicado pela seqüência de pontos 1,2,3 e 4 na mesma figura. Além disso, como o ponto fixo aparece na intersecção dessas variedades, ele só é atin-

gido assintoticamente pela seqüência de mapeamentos da variedade estável, pois o fluxo é estacionário sobre ele. Esses pontos fixos funcionam como o ponto de equilíbrio instável de um pêndulo em  $\theta = \pi$ : qualquer perturbação o faz sair dali e oscilar com grande amplitude, como mostramos na figura (4.8) [14]. Na verdade, a analogia com o pêndulo vai mais longe: redesenhando a figura (4.4) sem as curvas  $C_e$  e  $\tilde{C}_e$  mas com as variedades  $W^e$  e  $W^i$  de cada ponto fixo instável, vemos que o mapa de Poincaré se parece com uma seqüência de "pêndulos", figura (4.9). Perto dos pontos fixos estáveis o movimento é de *libração*, enquanto que  $W^e$  e  $W^i$  funcionam como separatrizes além das quais o movimento é de *rotação*, como no pêndulo da figura (4.8).

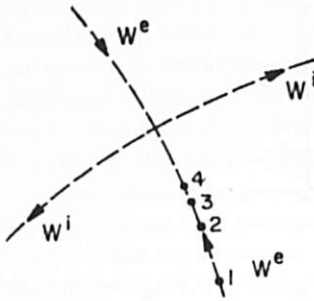


Figura 4.7 - Fluxo nas vizinhanças de um ponto fixo instável mostrando as variedades estáveis  $W^e$  e instáveis  $W^i$ .

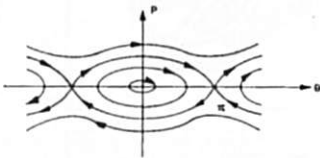


Figura 4.8 - Espaço de fases de um pêndulo ( $H = \frac{p^2}{2m} - A \cos \theta$ ).

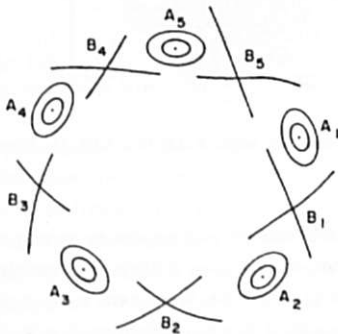


Figura 4.9 - Seção de Poincaré análoga à figura 4.4 mostrando as variedades  $W^e$  e  $W^i$  emanando de cada ponto estável e o movimento circular em torno dos pontos estáveis.

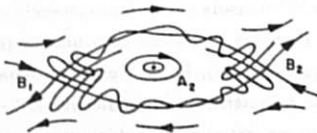


Figura 4.10 - Detalhe da figura 4.9 mostrando o emaranhado homoclínico.

e o segundo não-integrável. A consequência disso é que enquanto no pêndulo as separatrizes que emanam de  $\pi$  e  $-\pi$  coincidem, as separatrizes dos pontos fixos instáveis não se juntam suavemente umas com as outras, mas elas se *cruzam* transversalmente. Os pontos de cruzamento são chamados de *pontos homoclínicos* e são responsáveis pelo aparecimento de caos. Como um ponto homoclínico  $h$  está por definição sobre uma variedade estável  $W^e$  e outra instável  $W^i$  (pois está no cruzamento), e essas curvas são invariantes, quando mapearmos  $h$  por  $T_t^g$  ele deve cair novamente em  $W^e$  e  $W^i$ , ou seja,  $T_t^g h$  deve cair num novo cruzamento. Da mesma forma,  $T_t^{2g} h$ ,  $T_t^{3g} h$ , etc., serão todos cruzamentos. Então, a existência de um ponto homoclínico implica na existência de infinitos, obrigando  $W^e$  e  $W^i$  a fazerem um zig-zag extremamente complexo que Poincaré "não ousou desenhar"<sup>[1]</sup>. Esse zig-zag é o *emaranhado homoclínico*, esboçado na figura (4.10). Como o mapa de Poincaré preserva áreas, as alças formadas esse zig-zag acabam ficando mais alongadas e retorcidas conforme nos aproximamos dos pontos fixos, pois ali os cruzamentos entre  $W^e$  e  $W^i$  ficam cada vez mais próximos uns dos outros. Assim, é necessário aumentar o comprimento das alças para preservar suas áreas. Esse alongamento e torção das variedades faz com que pontos inicialmente próximos sejam levados a posições distantes, ou seja, produzindo o que é conhecido como *sensibilidade às condições iniciais*, e que é a assinatura do caos determinístico. Dessa forma, se acompanharmos o movimento de uma única condição inicial, como por exemplo um ponto na extremidade de uma alça, veremos que a cada iteração ele é mapeado em posições distantes umas das outras que parecerão aleatórias. De fato, para um subconjunto de condições iniciais próximas a um ponto homoclínico, pode-se mostrar que existe uma correspondência um-a-um entre as trajetórias geradas pelo mapa  $T_t^g$  e seqüências (infinitas) de caras e coroas obtidas pelo lançamento de um moeda<sup>[9]</sup>. No entanto, a demonstração desse resultado, conhecido como *Ferradura de Smale*, escapa ao escopo deste trabalho.

A diferença crucial entre o pêndulo e nosso mapa de Poincaré gerado por  $T_t^g$  é que o primeiro é integrável

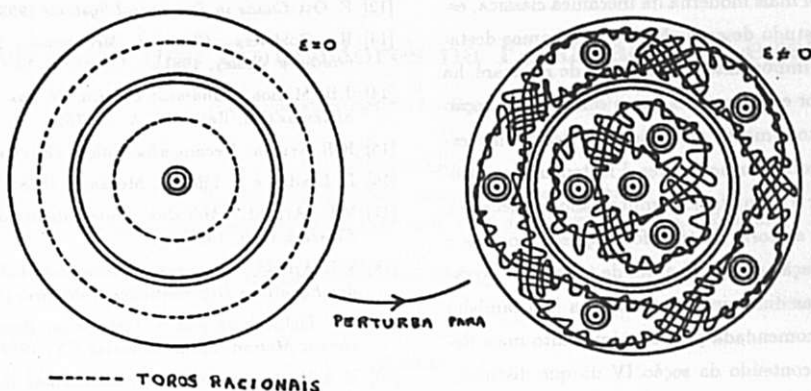


Figura 4.11 - Seção de Poincaré completa, mostrando os emaranhados homoclínicos e estruturas fractais.

Finalmente notamos que as 'ilhas' que rodeiam os pontos fixos estáveis são também toros, dito secundários, pois aparecem na seção de Poincaré como círculos deformados. Esses toros também ocorrem em famílias a um parâmetro, com a razão de suas frequências variando continuamente. Aplicando a mesma análise das seções precedentes vemos que os toros secundários racionais devem também ter sido destruídos e substituídos por cadeias de ilhas estáveis separadas por pontos fixos instáveis, com seus pequenos emaranhados homoclínicos a rodeá-los. Dentro dessas ilhas estáveis, por sua vez, surgem toros terciários e assim por diante, numa estrutura extremamente rica em detalhes, conhecida como *fractal*, como ilustrado na figura (4.11). Fractais<sup>[29]</sup>, são estruturas autosimilares, ou seja, que reproduzem sua forma em escalas cada vez menores, como o conhecido *conjunto de Cantor* ou o *floco de neve de Koch*<sup>[3]</sup>. Na verdade a figura (4.11) é apenas aproximadamente um fractal, pois a repetição de ilhas e emaranhados ocorre de forma complicada e a autosimilaridade não é exata, mas de qualquer forma essa figura resume a complexidade e riqueza da dinâmica dos osciladores acoplados.

Aumentando a intensidade da perturbação as regiões caóticas aumentam e, eventualmente, dominam quase todo o espaço de fases, como no exemplo da seção IV.3.

## V. Conclusões

A constatação de que sistemas determinísticos possam se comportar de forma aleatória traz importantes consequências tanto do ponto de vista filosófico quanto prático. Do lado filosófico, a questão da imprevisibilidade mesmo dentro do universo clássico (não quântico) faz com que nossa visão de mundo mude completamente e coloca dúvidas sobre a estabilidade (à longo prazo) de sistemas antes considerados como protótipos da regularidade, como o próprio sistema solar, por exemplo<sup>[30]</sup>. Do lado prático, uma vez constatada a existência de caos, podemos nos perguntar: o que fazer com ele? Diferentes respostas tem sido dadas a essa pergunta em diferentes situações. No caso de batimentos cardíacos, por exemplo, o caos dever ser evitado (ou melhor, controlado)<sup>[2,31]</sup>, enquanto que em processos difusivos<sup>[32]</sup> quanto mais caos melhor (de fato, pesquisas recentes sugerem que o comportamento sadio dos batimentos cardíacos envolve um certo grau de caoticidade; a periodicidade rígida levaria a um comportamento pouco flexível).

Procuramos ao longo deste trabalho dar uma introdução à teoria de caos dirigida aos estudantes de ciências exatas. A sequência de problemas discutidos na seção III teve a intenção de introduzir o leitor à

uma linguagem mais moderna da mecânica clássica, essencial para o estudo de caos. Embora tenhamos destacado conceitos importantes como seções de Poincaré, há ainda muito por estudar antes que o conteúdo da seção IV possa ser totalmente absorvido. O leitor interessado em se aprofundar nessa área é fortemente aconselhado a estudar o formalismo hamiltoniano da mecânica (em particular a teoria de transformações canônicas e as variáveis de ação e ângulo) antes de prosseguir no estudo de sistemas dinâmicos. A referência [21] também é altamente recomendada pois contém muito mais detalhes sobre o conteúdo da seção IV do que discutido aqui.

## References

- [1] H. Poincaré *Les Méthodes Nouvelle de la Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1899)
- [2] A.V. Holden, *Chaos* (1986) Princeton Un. Press
- [3] J. Gleick, *Caos - Construindo Uma Nova Ciência* 1990, Editora Campus
- [4] I. Stewart *Será que Deus Joga Dados? - A nova Matemática do Caos* (Ed. Jorge Zahar, 1991)
- [5] D. Ruelle *Caos e Acaso* 1993 Ed. UNESP
- [6] La Recherche, Junho de 1991
- [7] Ciência Hoje, volume 14, n. 80, (1992) Ed. SBPC
- [8] M. Tabor *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* 1989 Ed. Wiley
- [9] A.M. Ozorio de Almeida *Caos em Sistemas Hamiltonianos* (Ed. Unicamp, 1988)
- [10] M.C. Gutzwiller *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, NY, 1990)
- [11] M.C. Gutzwiller *Quantum Chaos*, Scientific American (Janeiro, 1992) 26
- [12] E. Ott *Chaos in Dynamical Systems* 1993 Ed. CUP
- [13] H. Goldstein *Classical Mechanics*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1981)
- [14] J.B. Marion, *Dinâmica Clássica De Las Partículas Y Sistemas* (Ed. Reverté S.A. , 1975)
- [15] K.R. Symon, *Mecânica* 5a. Edição (Ed. Campus, 1982)
- [16] L. Landau e E. Lifchitz, *Mecânica* 1978 Ed. MIR
- [17] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, (Mir, 1988)
- [18] V.I. Arnold, *Chapitres Suplementaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires* (Mir, 1980)
- [19] A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, NY, 1983)
- [20] M.A.M. de Aguiar *Caos em Sistemas Hamiltonianos* Notas de Física IFGW n.4 (1992) - Unicamp
- [21] M.V. Berry, in *Topics in Nonlinear Dynamics* (Ed. S. Jorna) Am. Inst. Conf. Proc. 46 (1978) 16
- [22] J.P. Keating *Physics and the Queen of Mathematics* in *Physics World* (April, 1990) 46
- [23] V. Khinchin *Mathematical Foundations of Statistical Physics* (Dover, 1949)
- [24] J.L. Mc Cauley , *Physica Scripta* T20 (1988) 1
- [25] V.I. Arnold e A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, Reading, MA, 1968)
- [26] M. Baranger, K.T.R. Davies e J.H. Mahoney, *Ann. Phys.* 186 (1988) 111
- [27] S.D. Prado, (1992) tese de Mestrado, Unicamp
- [28] S.D. Prado e M.A.M. de Aguiar, *Ann. Phys.* 230 (1994) no prelo
- [29] B.B. Mandelbrot *The Fractal Geometry of Nature* (1982) Ed. Freeman, NY
- [30] J. Wisdom, *Icarus* 72 (1987) 241
- [31] E. Ott, C. Grebogi e J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 1196
- [32] R. Fleischmann, T. Geisel e R. Ketzmerick, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 1367