

# Sistemas Caóticos em Física - Uma Introdução\*

(Chaotic systems in physics - an introduction)

Ildeu de Castro Moreira

*Instituto de Física - Universidade Federal do Rio de Janeiro*

*Cx. Postal 68528, 21945 Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido para publicação em 28 de Julho de 1992;

Aceito para publicação em 13 de Novembro de 1992

## I. Introdução

Em todos os ramos da ciência um dos conceitos centrais no entendimento dos fenômenos naturais é o de evolução no tempo. A descrição dinâmica, na qual o tempo exerce o papel essencial de parâmetro de referência, é utilizada nas mais variadas áreas da física, da astronomia, da matemática aplicada e da engenharia. O tempo é considerado, nessa visão, como um parâmetro unidimensional, contínuo, representado matematicamente pela reta dos números reais e fluindo independentemente de seu entorno. Essa concepção do tempo, expressa claramente por Newton nos Principia, tornou-se profundamente enraizada na física e em outras áreas da ciência, especialmente após o surgimento da mecânica clássica. Mesmo com o advento da teoria da relatividade, que quebrou o conceito de um tempo absoluto e independente do observador, a continuidade do tempo e seu papel de parâmetro evolucionário básico permanece.

Com o sucesso da mecânica newtoniana, nos séculos XVIII e XIX, onde a evolução temporal dos sistemas é representada matematicamente pelas chamadas leis de Newton, estabeleceu-se um paradigma descritivo para as outras áreas do conhecimento. Esse modelo básico constituiu o ponto de partida para o que se chama hoje de "teoria dos sistemas dinâmicos". Um sistema dinâmico é descrito por qualquer conjunto de grandezas (chamadas variáveis dependentes) que variam no tempo (variável independente). O estado do sistema

é representado pelos valores, num dado instante de tempo, do conjunto completo de variáveis dependentes. O espaço de estados possíveis para o sistema é denominado espaço de fase. A evolução de um tal sistema é descrita por um conjunto de equações discretas ou contínuas (diferenciais) que constituem a regra que permite prever o seu comportamento futuro, global ou parcialmente, uma vez conhecido o seu estado inicial. Se as variáveis dependentes e o tempo forem contínuos essas regras serão equações diferenciais ordinárias; caso existam outras variáveis independentes, também contínuas - como as coordenadas espaciais, no caso da física dos meios contínuos ou nas teorias de campo - teremos as equações diferenciais parciais. A existência de alguma variável discreta leva a regras com diferenças finitas, genericamente denominadas de mapeamentos. Note-se que, na física, as leis da dinâmica (regra) e as condições iniciais constituem ingredientes essenciais para a possibilidade de previsão no futuro; mas, enquanto as leis dinâmicas são obtidas através da criação científica e da experimentação, sobre as condições iniciais não incidem regras (com a possível exceção do cosmos como um todo) e elas possuem um grau de arbitrariedade restrito apenas pela preparação do sistema. É verdade que restrições importantes foram aqui impostas pela mecânica quântica.

A concepção determinista da mecânica clássica, exposta claramente por Laplace, em 1814, pretendia a previsibilidade quantitativa absoluta para um sistema clássico, se o seu estado inicial fosse conhecido com exatidão. Nada melhor do que repetir o próprio Laplace

\*Palestras proferidas na Escola de Inverno da Sociedade Brasileira de Física/RJ, Nova Friburgo, 1991.

enunciando a utopia determinista:

"Devemos, portanto, considerar o estado presente do universo como o resultado de seus estados anteriores e como a causa dos que virão. Uma inteligência superior que, em um dado instante, conhecesse todas as forças pelas quais o mundo natural se move e a posição de cada uma de suas partes componentes [assim como suas velocidades], e que tivesse também a capacidade de submeter todos esses dados à análise matemática, englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também aqueles dos menores átomos; nada seria incerto para ela e o futuro, assim como o passado, estaria todo presente ante seus olhos."

O extraordinário sucesso da mecânica newtoniana na previsão do movimento dos corpos celestes, sua aplicabilidade no estudo dos movimentos dos corpos sólidos terrestres e o desenvolvimento das máquinas, aparatos construídos para terem um comportamento estritamente previsível e periódico, contribuíram para o fortalecimento das concepções mecanicistas. Essa visão determinista estrita começou a ser abalada pela introdução da mecânica estatística na física do final do século XIX, embora a origem dos estudos probabilísticos tenha tido início já no século XVII, especialmente no âmbito das aplicações matemáticas às ciências sociais. A emergência da mecânica quântica, no primeiro quartel deste século, atingiu com muito maior intensidade as concepções vigentes sobre o determinismo ao atribuir um caráter essencialmente probabilístico à descrição dos fenômenos microscópicos. Em anos recentes o avanço das idéias e das técnicas levou a um grande desenvolvimento no estudo de sistemas não-lineares, o que veio também chacoalhar pressupostos deterministas longamente acalentados na mecânica clássica e nas áreas da matemática aplicada baseadas em seu modelo paradigmático.

Na física clássica dois grandes paradigmas descritivos se afirmaram: a mecânica, baseada nas leis de Newton e impregnada da idéia de uma descrição absolutamente precisa em princípio, e a termodinâmica - mecânica estatística, desenvolvida no século XIX e que introduziu uma ordem no comportamento dos sistemas com muitas partículas (os gases, em especial)

através de hipóteses estatísticas e da análise do comportamento médio. No caso da mecânica o conhecimento das condições iniciais permitiria a previsão do comportamento individual de cada componente do sistema físico; já na descrição estatística abandonava-se a análise individual, devido à ignorância das condições iniciais e ao grande número de partes envolvidas, e, a partir da hipótese de uma desordem "democrática" (hipótese ergódica), podiam ser feitas previsões, com boa precisão, sobre o comportamento médio do sistema.

Maxwell, já em 1873, com aguda sensibilidade e intuição físicas, alertava para as limitações da visão determinista laplaciana e mostrava a existência de sistemas que, mesmo com poucas partículas, exigiam uma descrição probabilística em função de apresentarem grande sensibilidade à variação das condições iniciais. Ou seja, uma variação extremamente pequena nas condições iniciais - e incertezas sempre estarão presentes em qualquer medida física - induziria variações grandes no comportamento futuro desses sistemas, tornando o determinismo absoluto uma "hipótese metafísica". Poincaré, cerca de vinte anos depois, estenderia essas idéias e, partindo de trabalhos matemáticos importantíssimos sobre o problema de três corpos interagindo gravitacionalmente, começaria a vislumbrar os contornos do caos nos sistemas determinísticos. Mas essas idéias não empolgaram seus contemporâneos e só com advento dos computadores e com a geração recente de novos conceitos, provenientes de diversas áreas do conhecimento, o estudo dos sistemas com comportamento caótico viria se ampliar enormemente. O leitor interessado em maiores detalhes sobre a história do caos determinístico poderá consultar a referência [1].

Mas precisemos um pouco melhor o significado do caos determinístico. Por sistemas caóticos entenderemos sistemas determinísticos - ou seja, possuidores de uma regra unívoca que permite determinar o valor das variáveis que descrevem o sistema a partir dos valores dessas mesmas variáveis em instantes anteriores - que apresentam grande sensibilidade à variação das condições iniciais. Isso significaria que, para grande parte das condições iniciais no domínio considerado, uma pequena incerteza no estado inicial do sistema po-

derá conduzir a estados muito diferentes, a partir de certo instante futuro. Se medirmos a incerteza nas condições iniciais do sistema por  $\epsilon_0$  e denominarmos de  $\epsilon(t)$  a incerteza em um tempo  $t$  posterior, poderemos visualizar essa grande sensibilidade à variação das condições iniciais pela representação da figura 1.

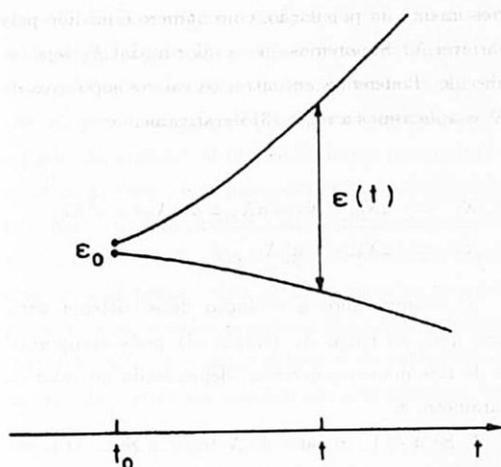


Figura 1: Trajetória instável. Uma pequena incerteza inicial cresce exponencialmente no tempo.

Podemos resumir as principais características dos sistemas caóticos determinísticos:

- \* São sistemas dinâmicos possuidores de uma regra bem definida para a evolução, sem a presença de qualquer flutuação ou elemento aleatório externo;

- \* As regras são não-lineares, sejam elas equações diferenciais ou equações de diferença finita (discretas);

- \* Grande parte das trajetórias desses sistemas são instáveis (na região analisada), ou seja, uma pequena incerteza nas condições iniciais cresce exponencialmente com o tempo;

- \* Esses sistemas apresentam, em razão disso, dificuldades para a previsibilidade de seu comportamento a longo prazo. Uma descrição probabilística será necessária, em geral, para que previsões quantitativas possam ser feitas.

Vimos, então, que o quadro descritivo proveniente da física clássica se tornou bem mais complexo. As

duas descrições paradigmáticas iniciais, a mecânica newtoniana e a mecânica estatística, são apenas parte de um espectro descritivo possuidor de vários graus de "caoticidade". Os sistemas integráveis tradicionais da mecânica clássica não apresentam comportamento caótico, enquanto que os sistemas ergódicos podem apresentar um tal grau de "caoticidade" que passam a admitir uma descrição probabilística razoavelmente simples. Esses são dois casos particulares dentre uma gama grande de comportamentos possíveis para os sistemas dinâmicos não-lineares. É importante destacar que o comportamento caótico, e isto demorou a ser percebido claramente, pode ocorrer também em sistemas com poucas partículas. O reconhecimento de que comportamentos complexos não requerem modelos matemáticos complicados - isto é, com muitas partículas - uma das contribuições mais significativas desses estudos. Isso sugere, em particular, que fenômenos naturais complexos poderiam vir a ser descritos através de modelos simples, com poucos graus de liberdade.

Algumas questões importantes e de caráter geral surgem quando começamos a estudar os sistemas com comportamento caótico:

- \* Como medir (quantificar) o "caos" ?
- \* Como prever se o sistema terá ou não comportamento caótico?
- \* Como testar experimentalmente se os nossos modelos são adequados para descrever sistemas físicos reais?
- \* Como interpretar o significado do caos e como fazer previsões para o comportamento futuro desses sistemas?
- \* Como tirar proveito das características dos sistemas com esse tipo de comportamento?
- \* Será que estamos diante da emergência de um novo paradigma na ciência ?

Neste texto introdutório apenas tocaremos superficialmente em algumas destas questões, mesmo porque não existem ainda respostas gerais para muitas delas.

Muitas aplicações dessas idéias, em física e em matemática aplicada, têm sido feitas nas últimas duas décadas. Citamos algumas: no estudo do movimento de planetas e cometas (mecânica celeste), na análise

de reações químicas oscilantes (química), nos modelos para o surgimento da turbulência (mecânica dos fluidos), em modelos biológicos e ecológicos para o comportamento das populações, na ótica dos lasers e meios não-lineares, no estudo incipiente do "caos quântico" (física atômica e nuclear), etc. Nas referências, no final deste texto, você encontrará uma gama grande, embora ainda muito parcial, de artigos científicos que tratam dessas aplicações nas áreas mais diversas.

## II. Sistemas discretos

Consideremos um dos casos mais simples de sistemas com comportamento evolutivo: os mapeamentos ou aplicações, termo este mais utilizado pelos matemáticos. Consistem fundamentalmente em uma regra determinista que permite a obtenção direta das variáveis que descrevem o sistema em função de seus valores em instantes anteriores. O parâmetro de evolução, usualmente o tempo, é suposto discreto, assumindo valores inteiros. A forma genérica desse tipo de mapeamento é:

$$X_{i+1} = F(X_i, X_{i-1}, \dots, a_1, \dots, a_m), \quad (1)$$

onde os  $a_k$  são parâmetros do sistema.

Na maioria dos casos considera-se que os valores de  $X_{i+1}$  dependerão apenas dos  $X_i$ , ou seja, dos valores das variáveis  $X$  no instante imediatamente anterior. Esse tipo de mapeamento surge na discretização de equações diferenciais de primeira ordem. Veja o exemplo seguinte:

$$dx/dt = f(x) \Rightarrow x_{i+1} = x_i + f(x_i)\Delta t. \quad (2)$$

Analisaremos aqui apenas mapeamentos unidimensionais; apesar dessa restrição veremos que, mesmo estes mapeamentos simples, podem apresentar um comportamento muito rico e variado, podendo servir como modelos aproximados para sistemas naturais razoavelmente complexos. Em ecologia matemática, por exemplo, interessantes modelos para o crescimento do número de indivíduos de uma espécie, a cada geração, podem ser criados com esses mapeamentos. Tomemos, de início, o mapeamento mais simples: o linear.

### A. Mapeamento linear

Nesse caso suporemos que a regra de evolução do sistema é a seguinte:

$$X_{i+1} = aX_i, \quad (3)$$

onde  $a$  é uma constante positiva que mede a taxa de crescimento da população, cujo número é medido pela variável  $X$ . Suporemos que o valor inicial  $X_0$  seja conhecido. Poderemos encontrar os valores sucessivos de  $X$  se aplicarmos a regra (3) iterativamente:

$$X_1 = aX_0; \quad X_2 = aX_1 = a(aX_0) = a^2X_0; \dots$$

$$X_n = aX_{n-1} = a^nX_0.$$

Se examinarmos a evolução desse sistema veremos que, ao longo do tempo, ele pode comportar-se de três maneiras diversas, dependendo do valor do parâmetro  $a$ :

\* Se  $a < 1$ : o valor de  $X$  tende a zero. O ponto zero, nesse caso, é um "atrator" dos pontos vizinhos;

\* Se  $a = 1$ : o valor de  $X$  fica constante e igual a  $X_0$ ;

\* Se  $a > 1$ : o valor de  $X$  tende para infinito.

As limitações da aplicação desse modelo à ecologia são fáceis de serem percebidas.

Para analisar os mapeamentos é essencial que você utilize um microcomputador que lhe permite calcular, de maneira extremamente rápida, milhares de iterações; além disso, com o seu uso constante você começará a desenvolver uma "intuição" sobre o comportamento não-linear. Tente fazer programas para calcular o mapeamento linear e os outros modelos que trataremos a seguir. Se tiver interesse poderá receber uma cópia do programa CAOS que foi feito para acompanhar este texto<sup>2</sup>.

Examinemos agora o que ocorre com o mapeamento linear se houver uma incerteza inicial  $\epsilon_0$  na determinação de  $X_0$ :

$$X_1 + \epsilon_1 = a(X_0 + \epsilon_0) = aX_0 + a\epsilon_0, \dots$$

$$X_n + \epsilon_n = a^nX_0 + a^n\epsilon_0.$$

Portanto, a incerteza inicial  $\epsilon_0$  varia no tempo segundo a regra  $\epsilon_n = a^n \epsilon_0$ . Crescerá se  $a > 1$  e diminuirá se  $a < 1$ .

Uma maneira muito simples e extremamente útil de representarmos uma iteração desse tipo é construirmos o gráfico  $X_{i+1}$  versus  $X_i$  (figura 2). Uma vez construído esse gráfico traçamos nele a reta auxiliar  $X_{i+1} = X_i$ , reta que deixa a origem e tem uma inclinação de  $45^\circ$ . A determinação de  $X_1$  pode ser feita diretamente do gráfico, a partir do conhecimento do valor de  $X_0$ . Ficamos agora com um problema: como determinar  $X_2$  a partir do gráfico? Muito fácil! Basta transportar o valor de  $X_1$  para o eixo horizontal, e isto pode ser feito refletindo-o na reta auxiliar, e encontrar diretamente do gráfico o valor de  $X_2$ . Veja a figura 2 para a ilustração desse procedimento. Esse processo pode ser repetido sucessivamente e todos os valores  $X_i$  podem ser encontrados a partir do mesmo gráfico e do conhecimento de  $X_0$ . Isso pode ser simplificado pelo processo "em escada" indicado na figura 2.

### B. Deslocamento de Bernoulli

Vamos analisar agora um processo determinístico simples que leva a um comportamento complexo, no qual os ingredientes básicos do comportamento caótico já se fazem presentes. A sensibilidade às condições iniciais, como veremos, é muito grande. Os erros ou incertezas iniciais são grandemente amplificados ao longo do tempo. Consideremos o mapeamento unidimensional:

$$X_{i+1} = 2X_i \pmod{1}. \quad (4)$$

Nessa iteração o segundo membro de (4) significa que, para obtermos  $X_{i+1}$  devemos multiplicar  $X_i$  por 2 e retirar a parte inteira, ficando apenas com a parte decimal do número encontrado. Trabalharemos, portanto, apenas no intervalo  $[0,1]$ . Esse mapeamento leva o intervalo  $[0,1]$  nele mesmo. A solução formal de (4) pode ser expressa na forma:

$$X_n = 2^n X_0 \pmod{1}, \quad (5)$$

o que leva a um crescimento exponencial de uma incerteza inicial arbitrariamente pequena:

$$\epsilon_n = 2^n \epsilon_0 = \epsilon_0 e^{n(\ln 2)}. \quad (6)$$

O número  $\ln 2$  que aparece medindo a taxa de crescimento de um pequeno desvio inicial é o *expoente de Lyapounov*. Quando esse número for positivo a "trajetória" será altamente instável; se isso ocorrer para grande parte das trajetórias de uma certa região o sistema terá aí um comportamento "caótico", isto é, altamente sensível à variação das condições iniciais. Para o mapeamento acima descrito podemos estimar quantas iterações serão necessárias para que uma incerteza inicial, da ordem de  $10^{12}$  digamos, cresça até atingir o tamanho do intervalo  $[0,1]$ :

$$1 = 10^{12} e^{n(\ln 2)} \Rightarrow n = 12(\ln 10)/(\ln 2) \approx 40.$$

Isso quer dizer que após apenas 40 iterações (lembre-se que os computadores podem fazer milhões de operações semelhantes rápida e facilmente) não saberemos onde estará localizado o ponto no intervalo  $[0,1]$ .

O mapeamento de Bernoulli está representado na figura 3. Você poderá verificar que o comportamento nesse caso é muito diverso do que ocorria com um mapeamento linear simples. Enquanto que, naquele caso, o sistema tendia para infinito ou para zero (e, em um caso bem particular, quando  $a = 1$ , o valor permanecia constante), neste caso os valores ficam limitados no intervalo  $[0,1]$  e não tendem para nenhum valor fixo. Isso ocorre porque quando  $X$  tem um valor maior do que  $1/2$ , o mapeamento multiplica esse número por 2 e diminui 1, o que obriga o número a permanecer no intervalo unitário. Essa operação de multiplicar por 2 e tirar a parte inteira está representada na figura 4. O mapeamento é muito sensível à variação das condições iniciais devido ao processo repetido de esticar e dobrar o intervalo considerado. Dois pontos que estavam, no início, arbitrariamente próximos ficarão muito separados após um pequeno número de iterações.

Uma forma muito ilustrativa e interessante de representar esse mapeamento aparece quando escrevemos os números na base binária. Se começamos com um valor inicial  $X_0$  nessa base:

$$X_0 = 0,11001001101... \text{ (por exemplo)}$$

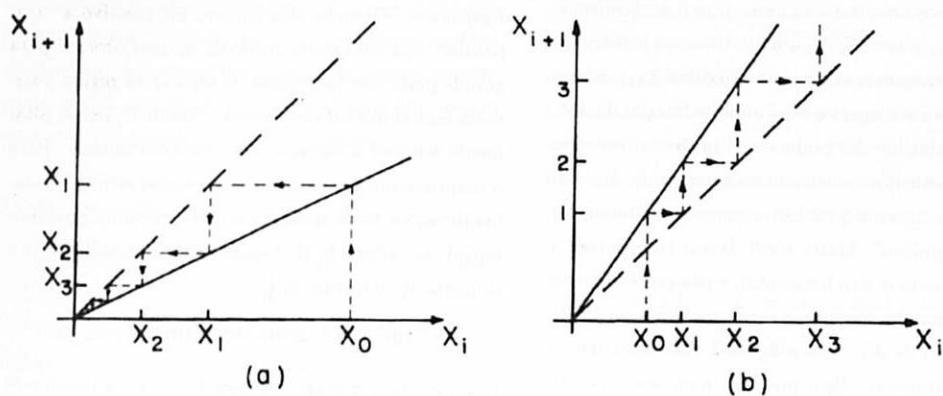
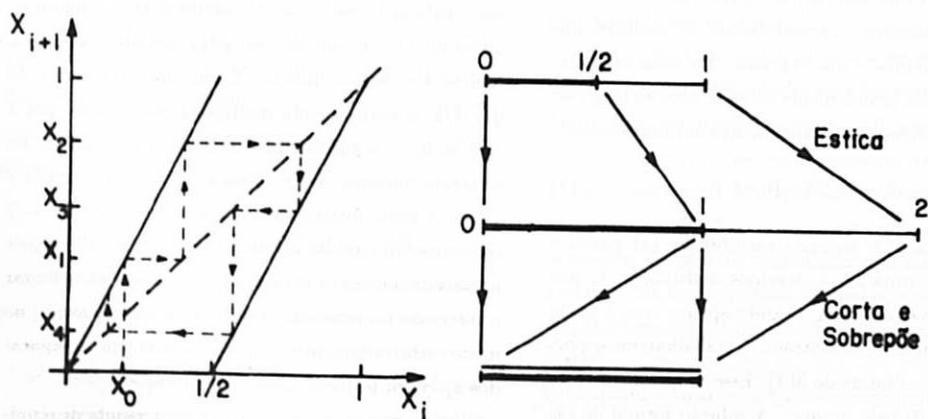


Figura 2: Mapeamento linear. (a)  $a < 1$ ; (b)  $a > 1$ .



Figuras 3 e 4

a iteração (4) resume-se em, a cada vez, andar a vírgula uma casa para a direita (o que significa multiplicar por dois, na base binária, de maneira análoga à multiplicação por dez na base decimal) e retirar a parte inteira à esquerda da vírgula (operação de tomar módulo 1). Teremos para esse caso:

$$X_1 = 0,1001001101\dots; X_2 = 0,001001101\dots$$

$$X_3 = 0,01001101\dots; X_4 = 0,1001101\dots$$

Vê-se claramente que, se utilizarmos um computador que pode armazenar 50 dígitos para cada número, após 50 iterações obteremos 0 ou 1, aleatoriamente, dependendo da configuração da máquina. Esse mapeamento pode funcionar, portanto, como um gerador de números aleatórios, com algumas limitações que você pode descobrir.

A representação binária deixa claro que, se o número inicial  $X_0$  for racional - e, portanto, representado por um número que, após um conjunto inicial de dígitos, tem uma estrutura periódica - o comportamento futuro do mapeamento fica previsível, sendo possuidor de determinado período. No entanto, para um número irracional não existe nenhuma periodicidade e o comportamento futuro, ou seja, se surgirá 0 ou 1 na próxima iteração, passa a ter características aleatórias.

Resumindo o comportamento desse mapeamento:

- \* É extremamente sensível variação das condições iniciais;
  - \* A sequência de iterações tem, em geral, as mesmas propriedades aleatórias do lançamento de uma moeda (0 e 1 para cara e coroa);
  - \* O mecanismo de geração do caos, que aparecerá em sistemas mais complexos, já surge aqui claramente pelo processo de esticar e superpor o intervalo unitário.
- Como um exercício você poderá estudar o chamado "mapeamento do toldo". A expressão matemática que representa esse mapeamento é:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= 2aX_i, \text{ se } 0 < X_i \leq 1/2 \\ &= 2a(1 - X_i), \text{ se } 1/2 < X_i \leq 1. \end{aligned}$$

O parâmetro  $a$  varia entre 0 e 1 e fornece a altura do "toldo". Você poderá verificar que o comportamento desse mapeamento passa de regular a caótico quando o parâmetro  $a$  ultrapassa o valor  $1/2$ . A utilização de um microcomputador para ajudá-lo na tarefa é essencial.

Um exemplo muito mais importante de mapeamento unidimensional, o chamado mapeamento logístico, e que tem a forma

$$X_{i+1} = \lambda X_i(1 - X_i),$$

não será analisado neste texto - embora tenha sido nas palestras que lhe deram origem - por razões de limitação de espaço e por estar extensivamente discutido em muitos e bons artigos de revisão. Cito um artigo excelente, de autoria de M. Feigenbaum, um físico americano que realizou trabalhos importantíssimos, na década de 70, sobre este mapeamento. A variação do parâmetro  $\lambda$  conduz ao surgimento da chamada "rota para o caos por dobra de período" que apresenta importantes características universais. O leitor interessado é altamente estimulado a ler a referência [3] ou algum dos artigos de revisão sobre este tema.

### III. Sistemas contínuos

Para sistemas mecânicos, descritos pela segunda lei de Newton (equação diferencial de segunda ordem), o espaço mais adequado para representar o estado do sistema é o espaço de fase, constituído pelas coordenadas de posição e pelas coordenadas de velocidade correspondente - ou, mais precisamente, pelas coordenadas generalizadas e pelos momentos canônicos associados. Um ponto nesse espaço caracteriza completamente o estado do sistema; por ele passa, se satisfeitas as condições do teorema de Cauchy-Lipschitz, apenas uma trajetória, o que garante o comportamento determinístico do sistema. Para um sistema com  $N$  graus de liberdade o espaço de fase terá, portanto,  $2N$  dimensões. Nas figuras 5, 6 e 7 representamos o espaço de fase para um oscilador harmônico simples, para um oscilador harmônico

com dissipação (atrito variando linearmente com a velocidade) e para um pêndulo. Observe que, no caso do pêndulo, aparecem trajetórias que correspondem a movimentos de rotação do pêndulo em uma direção ou outra e, para energias mais baixas, trajetórias correspondentes a oscilações em torno da posição de equilíbrio estável.

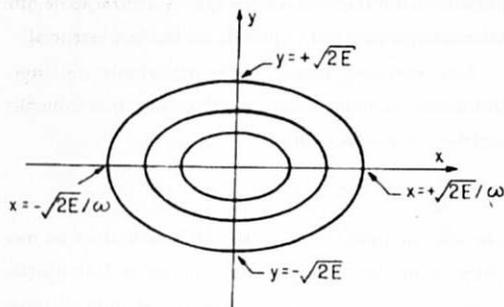


Figura 5: Oscilador harmônico simples.

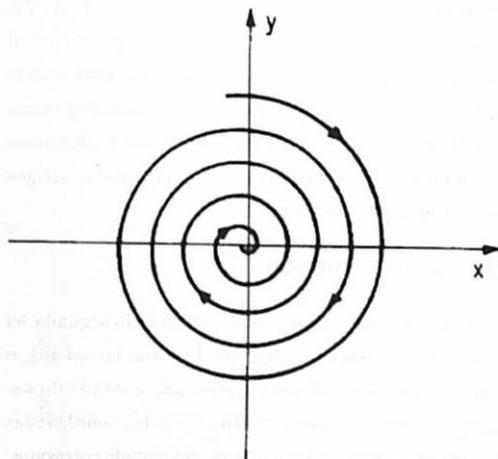


Figura 6: Oscilador com atrito linear.

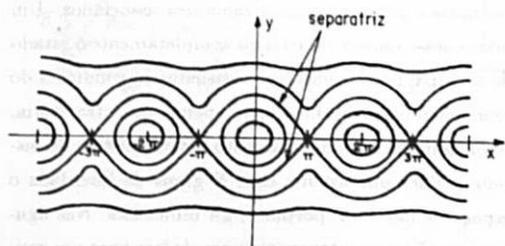


Figura 7: Espaço de fase do pêndulo.

Uma categoria de sistemas dinâmicos particularmente importante na física é constituída pelos sistemas hamiltonianos. Para esses sistemas as equações de evolução podem ser postas na forma (7), as chamadas equações de Hamilton:

$$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i ; \quad dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i \quad (7)$$

A função hamiltoniana  $H$  é a energia do sistema expressa em função das coordenadas do sistema e de seus momentos associados. O volume no espaço de fase é conservado para os sistemas hamiltonianos - este resultado, devido a Liouville, pode ser demonstrado, sem maiores dificuldades, a partir das equações (7). A descrição hamiltoniana é mais simples do que a newtoniana porque, neste caso, a quantidade dinâmica essencial, a função hamiltoniana ou, simplesmente hamiltoniano, é um escalar. Já na formulação newtoniana a dinâmica do sistema é determinada pelas forças que agem no sistema e estas são quantidades vectoriais. Além disso, o espaço de fase dos sistemas hamiltonianos apresenta uma estrutura geométrica, denominada estrutura simplética, bem mais simples do que a dos outros sistemas dinâmicos. O sistema de  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem em (7) é equivalente, no caso dos sistemas hamiltonianos, às  $N$  equações diferenciais, newtonianas, de segunda ordem.

Entre os sistemas que não podem ser colocados na forma hamiltoniana incluem-se a grande maioria dos sistemas dissipativos, ou seja, aqueles que não conservam a energia. Um volume inicial no espaço de fase, para esse tipo de sistema, não se conserva e sofre uma contração ao longo do tempo. Devido à contração do volume surgirão regiões no espaço de fase para as quais os pontos de determinados domínios tenderão, com o correr do tempo. Essas regiões, que funcionam como bacias de atração, são denominadas de atratores. Os atratores mais simples são pontos (dimensão zero) ou curvas fechadas, os ciclos-limite, de dimensão um. Da figura 6 vemos que o ponto zero (origem) é um atrator para o oscilador com atrito. A figura 8 mostra o ciclo-limite que ocorre para a equação de van der Pol, introduzida na década de 20 para descrever um circuito

eletrônico e também como um modelo simples para o funcionamento do coração:

$$d^2x/dt^2 + \lambda(1-x^2)dx/dt + kx = 0. \quad (8)$$

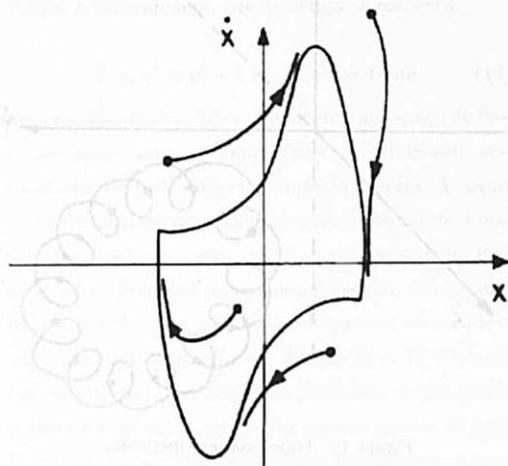


Figura 8: Espaço de fase da equação de van der Pol.

Alguns tipos de atratores são bem mais complicados, podendo apresentar dimensão fracionária. Abriremos agora um parênteses para definir a noção de dimensão fractal que nos permitirá calcular a dimensão desses tipos de figuras geométricas. Na realidade existem várias definições, nem sempre equivalentes, de dimensão. A definição talvez mais simples é a chamada dimensão (ou capacidade) de Hausdorff:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \ln N(\epsilon) / \ln(1/\epsilon) \}, \quad (9)$$

onde  $N(\epsilon)$  é o número de "hipercubinhos"  $n$ -dimensionais necessários para cobrir o objeto considerado e  $\epsilon$  é o comprimento de lado do hipercubinho. Um exercício simples é mostrar que, com essa definição de dimensão, a reta tem dimensão um, o plano tem dimensão dois e o espaço habitual dimensão três. Nas figuras 9 e 10 você poderá ver como se calcula esta dimensão para duas figuras fractais muito simples: o conjunto de Cantor e o conjunto de Koch. Os fractais são objetos geométricos "fracionados" que apresentam dimensão fracionária e que têm, em geral, a propriedade de apresentarem a mesma forma em cada escala em que são observados. Essa propriedade é denominada

de autosimilaridade. Os fractais têm sido usados como modelos aproximados para muitos fenômenos e formas observadas na natureza: linhas costeiras, formação de nuvens, crescimento de cristais, corrosão, formações geológicas, etc [4].

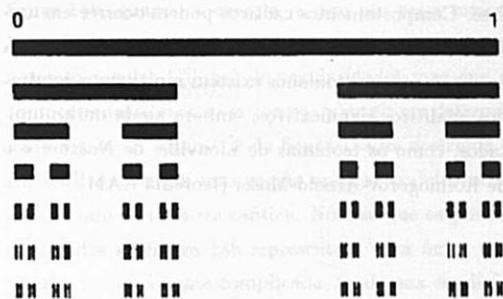


Figura 9: O conjunto de Cantor, chamado também 'poeira de Cantor', é construído dividindo-se o intervalo unitário em três partes. Remove-se, em seguida, a parte central e se repete o processo indefinidamente para cada segmento remanescente. Sua dimensão fractal é  $d = \log 2 / \log 3 = 0,63\dots$



Figura 10: Primeiros estágios da construção da curva de Koch (periferia da figura). Sua dimensão fractal é  $d = \log 4 / \log 3 = 1,26\dots$

Como vimos, no caso dos mapeamentos, comportamentos caóticos surgem quando a divergência exponencial das trajetórias no espaço de fase é acompanhada por um confinamento global. O mesmo poderá ocorrer para sistemas contínuos não-lineares. A divergência das trajetórias acarreta um esticamento local do espaço de fase mas, devido à imposição do confinamento, este esticamento não pode continuar indefinidamente. Isso implica na ocorrência de "dobras" no espaço de fase. Dobras sucessivas produzem um comportamento muito complicado que caracteriza o "caos" do sistema. Para

sistemas hamiltonianos, que mantêm constante o volume no espaço de fase, o esticamento em uma direção é compensado por uma contração em outra direção, de modo que área (ou o volume) seja conservado. Nos sistemas dissipativos não existe essa compensação e não existirá, portanto, conservação do volume no espaço de fase. Comportamentos caóticos podem ocorrer em ambos os tipos de sistemas, diferindo em detalhes. Para os sistemas hamiltonianos existem muito mais resultados analíticos significativos, embora ainda muito limitados, como os teoremas de Liouville, de Noether e o de Kolmogorov-Arnold-Moser (teorema KAM)<sup>[5]</sup>.

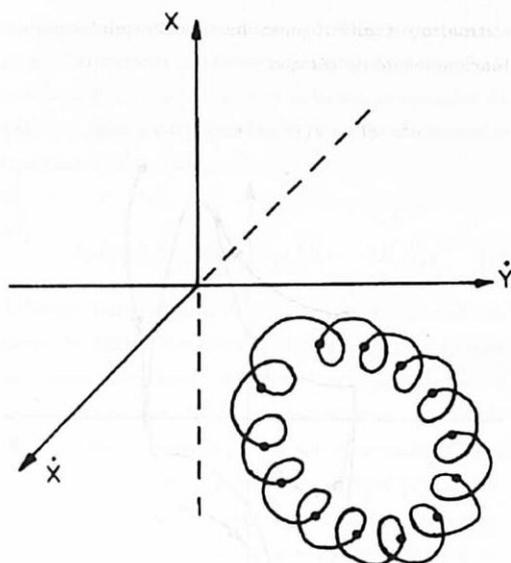


Figura 12: Trajetória multi-periódica.

#### A. Sistemas conservativos: o modelo de Hénon-Heiles

Trataremos agora do aparecimento do caos em sistemas conservativos, analisando um exemplo clássico introduzido, em 1963, por M. Hénon e C. Heiles<sup>[6]</sup>. Em um artigo muito interessante e original, recomendável com ênfase para todos os interessados em sistemas caóticos, estudaram um modelo para o movimento de uma estrela no campo gravitacional de uma galáxia com simetria axial (ou seja, uma estrela movendo-se dentro de uma galáxia pela ação gravitacional de todas as outras estrelas da mesma galáxia). A energia potencial da estrela, neste campo gravitacional médio, pode ser escrita na seguinte forma:

$$V = x^2/2 + y^2/2 + x^2y - y^3/3, \quad (10)$$

e as equações de movimento são

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= -x - 2xy \\ d^2y/dt^2 &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (11)$$

O sistema tem, portanto, dois graus de liberdade,  $x$  e  $y$ , enquanto que o espaço de fase do sistema terá quatro dimensões:  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $y$ , e  $\dot{y}$ . Não é fácil representar

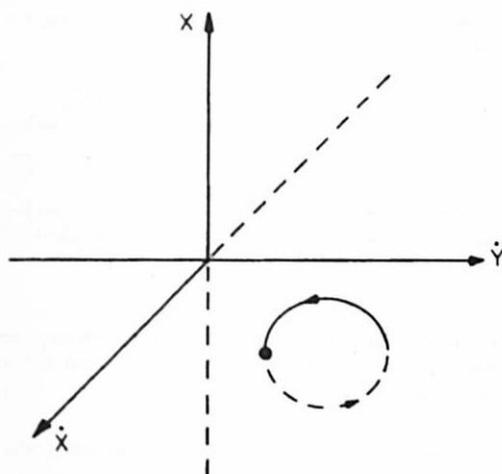


Figura 11: Trajetória com período 1.

o movimento dessa estrela em um espaço de fase com quatro dimensões. Para podermos analisar como esse movimento ocorre usaremos alguns truques que nos permitam reduzir a dimensão do espaço analisado. Observemos, primeiramente, que a energia se conserva:

$$E = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + V(x, y) = \text{constante.} \quad (12)$$

Essa relação implica que o movimento no espaço de fase ocorre sobre uma "hipersuperfície" de dimensão três, caracterizada pelo valor constante da energia. A seguir podemos utilizar uma idéia simples e genial de Poincaré para reduzir nossa análise a um espaço de duas dimensões. Poincaré imaginou representar a trajetória tridimensional pelo efeito que ela produz ao perfurar um plano determinado. As figuras 11 e 12 ilustram bem essa idéia. Uma trajetória periódica, de período 1, perfurará o plano  $(x, y)$  apenas em um ponto. Já uma trajetória mais complicada, ainda periódica mas com períodos múltiplos, perfurará o plano em vários pontos, mas estes pontos estarão dispostos sobre uma curva fechada. As trajetórias "regulares", portanto, formarão curvas fechadas e suaves quando interceptarem o plano (chamado de seção de Poincaré). Isso é proveniente do fato de que estão dispostas sobre "toros" no espaço de fase. As trajetórias "irregulares", existentes nas regiões caóticas, perfurarão o plano de forma muito complicada e que não pode ser disposta sobre uma curva suave fechada. É claro que, nessa visão "seccionada" introduzida por Poincaré, perdemos a informação sobre a trajetória global, mas a descrição fica muito mais simples e adequada para uma representação geométrica e o elemento essencial que queremos analisar, o comportamento qualitativo regular ou caótico das trajetórias, fica preservado.

Quando Hénon e Heiles introduziram o modelo descrito pelas equações (11) no computador, e esta foi uma das primeiras aplicações dos computadores para este tipo de problema, obtiveram um resultado extremamente significativo, retratado na figura 13. O plano  $(y, \dot{y})$  foi o escolhido por eles para constituir a seção de Poincaré no espaço de três dimensões  $(x, y, \dot{y})$ . Podemos perceber, da figura 13a, que, para baixas energias ( $E = 0,08333$ ), todas as trajetórias têm comportamento

regular, estando dispostas sobre toros que perfuram o plano e geram as curvas fechadas. Cada condição inicial, para esse valor da energia, gera uma curva fechada. Valores iniciais próximos geram curvas fechadas vizinhas. Observa-se a presença de uma trajetória instável (separatriz) delimitando regiões diversas no plano. Na figura 13b, quando a energia já tem um valor maior,  $E = 0,12500$ , vemos que existem regiões de comportamento regular ("ilhas" de regularidade) mas que o comportamento caótico já começa a surgir em determinada região. A separatriz da figura 13a foi destruída e em seu lugar surgiu uma região onde as trajetórias se comportam de maneira caótica. Note-se que os pontos espalhados na figura 13b representam uma única trajetória, extremamente complicada, tendo sua condição inicial na região caótica. Na última figura, 13c, quando a energia já atinge 0,16667, sobrevivem apenas ilhas diminutas de regularidade e, em quase todo o espaço de fase, o comportamento é caótico. A área da seção de Poincaré ocupada pelas trajetórias caóticas cresce de maneira abrupta com a variação da energia.

Esse sistema, aparentemente muito simples, por se tratar do movimento bidimensional, conservativo, de uma partícula, mostra já a complexidade resultante do aparecimento do caos. Mostra também que a separação entre regularidade e caos não é, em absoluto, bem demarcada; com a variação da energia, domínios regulares tornam-se caóticos em um processo bem complicado.

Como um exercício você poderá analisar, usando um microcomputador e as técnicas empregadas por Hénon e Heiles, o potencial bidimensional  $V = x^2 y^2$ .

## B. Sistemas dissipativos: o modelo de Lorenz

Em 1963, o meteorologista de formação matemática E. N. Lorenz escreveu um artigo memorável<sup>[7]</sup>. A partir de uma análise simplificadora do problema de um fluido colocado entre duas placas mantidas a temperaturas diferentes, desenvolveu um modelo dissipativo muito interessante. A sua idéia motivadora foi construir um modelo rudimentar para o comportamento da atmosfera. Desde o século passado uma situação experimental simplificada é estudada para se tentar entender a essência desse tipo de fenômeno natural. No esquema

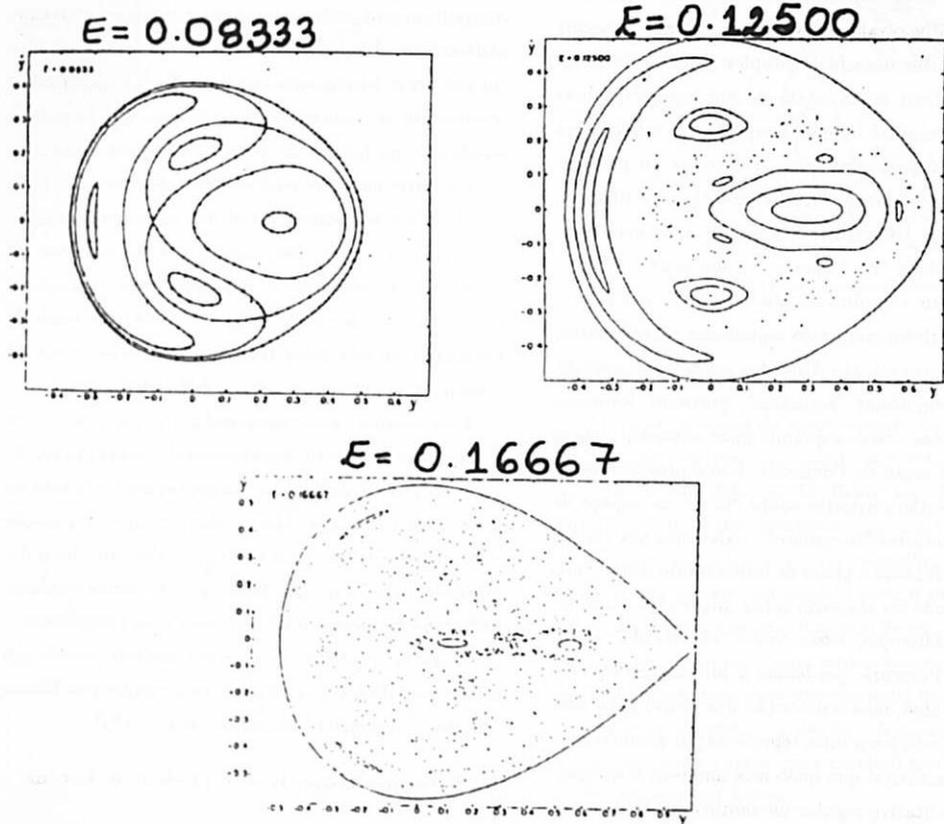


Figura 13: Seção de Poincaré do sistema de Hénon-Heiles (a)  $E = 0,08333$  ; (b)  $E = 0,12500$  ; (c)  $E = 0,16667$ .

experimental um fluido é colocado entre duas placas, sendo que a placa inferior é progressivamente aquecida enquanto a placa superior é mantida a uma temperatura fixa. De início a transmissão de calor ocorre apenas através da condução térmica, sem transporte de matéria; à medida que a diferença de temperatura aumenta começa a surgir um movimento de convecção, com o fluido ascendendo em certas regiões e descendo em outras. Formam-se "células de convecção" (convecção de Rayleigh-Bénard), como ilustrado na figura 14. Aumentando-se ainda mais a diferença de temperatura entre as placas o movimento do fluido torna-se extremamente complicado (turbulento). Uma panela com água fervendo nos fornece uma imagem da complexidade desse tipo de comportamento. É interessante observar que para que as células de convecção fossem formadas ocorreu uma "quebra de simetria", situação esta muito importante na física, e que aparece em várias outras circunstâncias.

Para modelar matematicamente o problema descrito acima Lorenz partiu das equações descritivas gerais para um fluido (equações de Navier-Stokes), acrescentou a equação para a condução térmica e as condições de contorno. O conjunto formidável de equações não-lineares obtido desestimulava qualquer tentativa de resolução exata. Buscando simplificar o sistema ao máximo, mas mantendo ainda algumas das características das equações originais, entre as quais a não-linearidade, Lorenz fez uma expansão em série de Fourier e considerou apenas os três primeiros modos obtidos. O sistema de equações a que chegou era constituído de três equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} dW/dt &= -aW + aU \\ dU/dt &= -WZ + bW - U \\ dz/dt &= -cZ + WU, \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $W$  = amplitude do movimento de convecção;

$U$  = diferença de temperatura entre as correntes descendentes e ascendentes;

$Z$  = variação de temperatura em relação à variação linear.

Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes sendo que

$b$  dependerá da diferença de temperatura entre as placas, da viscosidade do fluido, do coeficiente de expansão térmica, etc.

Lorenz tomou os valores fixos de  $a = 10$  e  $c = 8/3$  e variou o parâmetro  $b$  a partir de zero. Utilizando um computador desenhou as trajetórias obtidas no espaço de fase (de coordenadas  $W$ ,  $U$  e  $Z$ ). As características que observou, na medida em que  $b$  era variado, foram as seguintes:

$0 < b < 1$ : A origem é um ponto fixo estável (atrator);

$1 < b < 24,7$ : A origem é um ponto fixo instável; existem dois pontos fixos estáveis;

$b > 24,7$ : Os dois pontos tornam-se instáveis e surge um atrator mais complicado (atrator "estranho").

Como já vimos um atrator é uma região do espaço de fase que atrai os pontos de regiões vizinhas, à medida que o tempo passa. O atrator de Lorenz, representado na figura 15, faz exatamente isso, mas possui algumas características diferentes dos atratores sobre os quais já falamos (ponto, ciclo-limite):

1. Possui dimensão fracionária. A figura do atrator não preenche um volume, mas não pode também ser contida em um plano: sua dimensão é intermediária, valendo 2,03 aproximadamente;

2. É um atrator caótico, ou seja, as trajetórias dentro do atrator apresentam grande sensibilidade à variação das condições iniciais. A origem disso está no mecanismo, já comentado, de esticar e dobrar, existente no espaço de fase;

3. O movimento dentro do atrator é aperiódico.

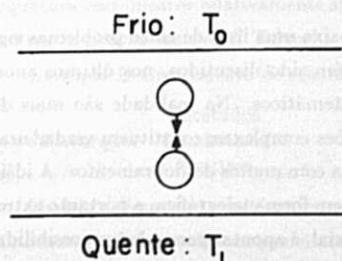


Figura 14: Surgimento das células de convecção.

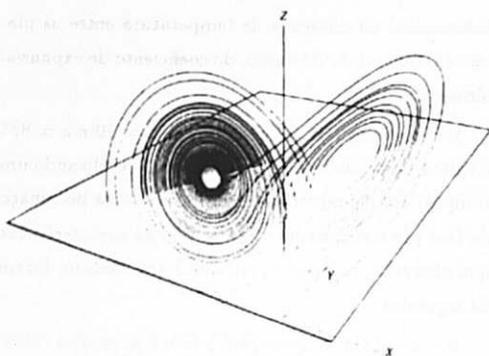


Figura 15: Atrator de Lorenz.

Muitos outros exemplos de atratores estranhos, caóticos ou não, têm sido estudados nos últimos anos. Em particular, as equações de Lorenz aplicam-se também a alguns modelos de lasers. Um modelo possível para certas reações químicas, e que produz também um atrator estranho, é dado pelas equações de Rossler:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z; \\ dy/dt &= x + 0,2y; \\ dz/dt &= 0,2 + xz - cz. \end{aligned} \quad (14)$$

Quando o parâmetro  $c$  é variado, uma sequência de bifurcações de ciclos-limite ocorre até que o atrator estranho apareça para o valor de  $c = 4,2$  (aproximadamente). Com um microcomputador você poderá analisar facilmente este comportamento das equações (14) e obter o atrator de Rossler.

#### IV. Algumas questões e problemas importantes

Apresento abaixo uma lista de cinco problemas significativos que têm sido discutidos, nos últimos anos, por físicos e matemáticos. Na realidade são mais do que meras questões complexas; constituem verdadeiras linhas de pesquisa com muitos desdobramentos. A idéia de apresentá-los em forma telegráfica, e portanto extremamente superficial, é apontar para o leitor possibilidades interessantes de pesquisa decorrentes do estudo dos sistemas não-lineares. Se o resumo abaixo servir para

motivá-lo a refletir sobre as novas idéias e a buscar pela bibliografia citada, terá atingido seu objetivo.

#### A. Integrabilidade X não-integrabilidade

*Questão:* Uma pergunta significativa do ponto de vista matemático, e importante do ponto de vista físico, é saber, a priori, se as equações que modelam o sistema analisado terão comportamento regular ou caótico. Em termos matemáticos, um problema particular, derivado dessa questão, se refere ao estabelecimento de critérios analíticos que permitam determinar se o sistema é ou não integrável.

*Dificuldades:* A determinação de critérios analíticos que garantam a integrabilidade (ou a não-integrabilidade) de sistemas dinâmicos padece de muitas dificuldades. Existem mesmo razões fortes, fundamentadas no teorema de Godel, para suspeitar-se que, no caso geral, tais critérios globais, baseados em algoritmos finitos, não existam<sup>[8]</sup>. Recorre-se frequentemente à análise computacional para se tentar caracterizar o sistema como integrável ou não-integrável. Diversos métodos têm sido propostos para se medir o grau de "caoticidade" de um sistema: o cálculo dos expoentes de Lyapounov, a análise do espectro de potência, o cálculo das correlações, etc. No entanto, na análise numérica existe sempre a possibilidade de erros cumulativos, ainda mais em se tratando de sistemas com possível comportamento caótico, e os resultados devem sempre ser tomados com cuidado. Na discussão sobre critérios analíticos para se estudar a integrabilidade vamos nos limitar aos sistemas hamiltonianos; sobre eles existe um conhecimento matemático mais amplo.

*Resultado:* Um sistema hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade será completamente integrável (por quadraturas), se possuir  $N$  integrais de movimento (quantidades conservadas) analíticas e em involução. Duas quantidades estão em involução se seu comutador (parênteses de Poisson) se anula

$$\begin{aligned} [F, G] &= \sum_{i=1}^N \{ (\partial F / \partial p_i) (\partial G / \partial q_i) - \\ &\quad - (\partial F / \partial q_i) (\partial G / \partial p_i) \} = 0. \end{aligned}$$

Esse resultado, devido a Liouville, nos dá uma idéia geométrica acerca dos sistemas integráveis. Se o sistema hamiltoniano possuir um número suficiente de integrais de movimento a dimensão do espaço de fase pode ser reduzida (de duas dimensões para cada quantidade conservada) até que o sistema possa ser resolvido via integrações por quadratura. Um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade, por exemplo, será integrável se existir uma segunda quantidade conservada além da energia. Vários processos tem sido imaginados para se identificar integrais de movimento e, em consequência, sistemas integráveis. Citamos alguns, remetendo o leitor interessado para artigos de revisão correspondentes:

\* Identificação direta de integrais de movimento<sup>[9]</sup>

\* Uso das simetrias das equações diferenciais (simetrias de Lie) ou das simetrias da ação clássica (simetrias de Noether) <sup>[10,11]</sup>;

\* Aplicação do teste de Kowalevskaia-Painlevé, que se baseia na análise das singularidades das equações no plano complexo<sup>[12]</sup>;

\* Uso dos teoremas de Ziglin-Yoshida que permitem o estabelecimento de critérios analíticos para se garantir a não-integrabilidade de certas classes de sistemas hamiltonianos, a partir da análise do comportamento da solução vizinha de uma solução particular conhecida<sup>[13,14]</sup>;

\* Método de Nelnikov, que explora o comportamento das trajetórias próximas das chamadas "trajetórias homoclínicas"<sup>[15]</sup>.

## B. Controlando o caos

*Fato:* Os sistemas caóticos têm um comportamento muito sensível à variação das condições iniciais. Eles possuem uma grande riqueza em trajetórias instáveis no espaço de fase. Isso, dependendo do ponto de vista, pode ser uma característica negativa. Por outro lado, essa riqueza de órbitas instáveis permite a eles uma grande flexibilidade. Sob condições ligeiramente diferentes o sistema pode ser usado para finalidades bastante diversas. A construção de máquinas "caóticas" inteligentes (adaptativas e dotadas de grande

flexibilidade) é uma especulação interessante que decorre dessas considerações. Outra possibilidade significativa surge quando notamos que uma das características básicas dos seres vivos é a capacidade adaptativa; possivelmente os resultados matemáticos provenientes do estudo dos sistemas caóticos poderão ter importância para um melhor entendimento do comportamento dos seres vivos.

*Idéia:* Aproveitar a riqueza de trajetórias instáveis dos sistemas caóticos e, através de perturbações bem programadas, levar o sistema a se comportar da maneira que se deseja (ou aproximadamente). *Estratégia:* 1) Escolhe-se uma órbita que permita ao sistema realizar a performance exigida; 2) Estabiliza-se essa órbita através de uma pequena perturbação adequadamente escolhida.

*Resultados:* 1. Teóricos e numéricos: O primeiro artigo a discutir recentemente essas idéias foi escrito por Celso Grebogi (cientista brasileiro), James Yorke e Edward Ott<sup>[16]</sup>. Veja também a referência [17];

2. Experimentais :

\* lâmina magnetoelástica<sup>[18]</sup>; convecção<sup>[19]</sup>;

\* ondas de spin, experimento realizado por Sérgio Rezende e Antonio Azevedo, em Recife<sup>[20]</sup>;

\* circuitos eletrônicos<sup>[21]</sup>.

## C. Formas na natureza

*Fato:* Os sistemas com comportamento caótico, mesmo com poucos graus de liberdade, podem apresentar uma estrutura extremamente complexa e variada.

*Pergunta:* Será que formas complicadas presentes na natureza poderiam ser descritas adequadamente por equações não-lineares relativamente simples, isto é, envolvendo poucas variáveis? Talvez!

Exemplo 1: Crescimento de cristais

	Facetados
Hierarquia	Dendríticos
	Fractais

Modelo discreto: autómatos celulares. Os autómatos celulares são mapeamentos  $n$ -dimensionais que modelam equações diferenciais parciais. Têm sido empregados no estudo do crescimento de cristais,

na análise do comportamento de fluidos, em modelos biológicos, etc. Do mesmo modo que os mapeamentos unidimensionais podem apresentar comportamento periódico, multiperódico e caótico, e podem levar também a estruturas ainda mais complicadas. Para uma revisão sobre o tema veja a referência [22].

**Exemplo 2:** Turbulência nos fluidos (caos espaço-temporal).

Os fluidos em regime turbulento apresentam um comportamento extremamente complicado que tem desafiado os teóricos e experimentais. Até hoje nenhum modelo teórico abrangente e satisfatório foi construído para explicar esse tipo de comportamento. Certos tipos de estruturas ordenadas são observadas quando um fluido passa de um comportamento regular (laminar) para o turbulento:

- \* células de convecção
- \* camadas-limite
- \* movimentos tipo "cogumelo" ou palmeira".

**Modelos:** Ao longo deste século vários cenários (modelos simplificados) foram bolados para a passagem do comportamento regular para o caótico e tenta-se aplicá-los à emergência da turbulência nos fluidos. As principais "rotas para o caos" são:

- \* Teoria de Landau-Hopf (década de 40)
- \* Teoria de Ruelle-Takens (~ 1970)
- \* Bifurcações por dobra de período (~ 1977)
- \* Intermittência (~ 1979).

Veja a referência [23] para uma discussão introdutória sobre essas rotas.

#### D. Indecidibilidade e não-computabilidade

**Pergunta:** Quais as possíveis repercussões na análise matemática, na física e na computação do Teorema de Gödel (e de extensões similares)? A existência de sistemas não-computáveis e de questões indecidíveis nesses domínios é certa.

**Complexidade algorítmica:** é um dos conceitos mais interessantes para a análise da complexidade de uma sequência qualquer de números. Pode ser utilizado para se medir o grau de "caoticidade" de uma série temporal. Por definição a complexidade algorítmica de uma sequência de  $N$  dígitos binários é dada por :

$K_N$  = número de dígitos binários do programa de computador mais curto que permite achar a sequência analisada.

Ou seja,  $K_N$  mede a "compressibilidade da informação" contida na sequência. Esta poderá ser aleatória ou ordenada:

Aleatória:  $K_N \sim N$

Sequência

Ordenada:  $K_N \ll N$

Para uma sequência infinita a complexidade é definida como:

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N/N.$$

A sequência será aleatória se  $K > 0$  e ordenada se  $K = 0$ . Para os sistemas algoritmicamente integráveis as trajetórias têm  $K = 0$ . Na referência [24] você encontrará uma discussão muito instigante sobre essas idéias.

#### E. Um caos quântico?

**Pergunta:** O quê ocorre quando quantizamos um sistema classicamente caótico? O sistema quântico será também caótico? Quais são as propriedades especiais de sistemas quânticos quando os sistemas clássicos correspondentes exibem comportamento caótico?

**Resultado:** Os sistemas quânticos conservativos, finitos e limitados têm complexidade nula. Logo existe uma "supressão quântica do caos"! Mas os sistemas classicamente caóticos, quando quantizados, levam suas marcas para a mecânica quântica:

- \* A distribuição probabilística é diferente para o espaçamento entre os níveis de energia de sistemas integráveis e de sistemas caóticos. Veja a figura 16. Existe a hipótese-consulte a referência [25]- de que esta diferença poderia explicar os diferentes modelos usados para descrever o comportamento coletivo dos núcleos (modelo da gota líquida, modelo de camadas);

- \* Diferente evolução ao longo do tempo. Note, no entanto, que as restrições quânticas provenientes das desigualdades de Heisenberg (que, de certo modo, discretizam o espaço de fase) impedem a separação exponencial dos "trajetos" a longo prazo. Estranhamente (ou não?) a incerteza quântica intrínseca impede o crescimento ilimitado da incerteza proveniente da caoticidade do sistema!

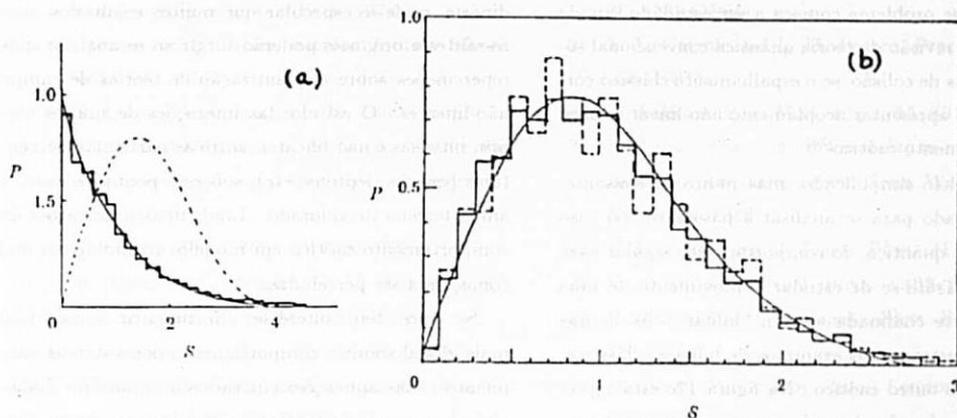


Figura 16: Distribuição estatística dos níveis de energia (a) Sistema regular (distribuição de Poisson); (b) Sistema caótico (distribuição de "matrizes randômicas").

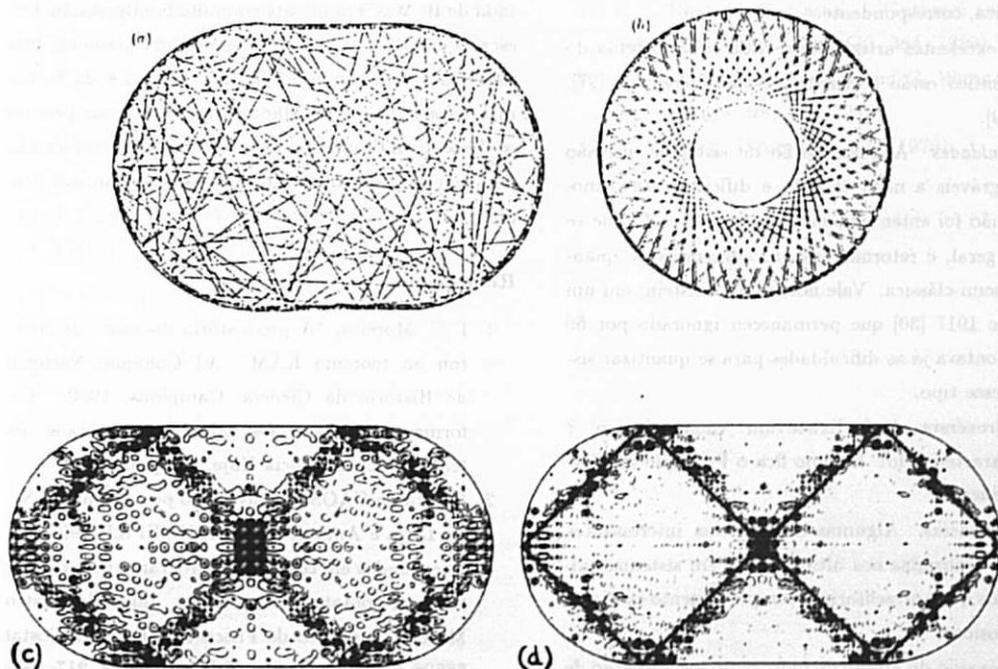


Figura 17: (a) Comportamento das trajetórias clássicas no bilhar regular; (b) Trajetória clássica no bilhar caótico (tipo "estádio"); (c) e (d) Autofunções quânticas altamente excitadas para o bilhar tipo "estádio".

\* Comportamento diverso para o espalhamento caótico. Esse problema começa a ser estudado e pode levar a uma revisão da teoria quântica convencional sobre processos de colisão, se o espalhamento clássico correspondente apresentar acoplamento não-linear intenso e comportamento caótico<sup>[26]</sup>.

Um modelo simplificado, mas muito interessante, tem sido usado para se analisar a passagem, no caso clássico e no quântico, do comportamento regular para o caótico. Trata-se de estudar o movimento de uma partícula livre confinada em um "bilhar". As figuras 17a e 17b ilustram dois exemplos de bilhares clássicos, um regular e outro caótico. Na figura 17c está representada uma função de onda quântica, altamente excitada, para o bilhar caótico. As estruturas quânticas com amplitude grande, que aparecem na figura, são denominadas cicatrizes e surgem na região de trajetórias clássicas instáveis, porém periódicas. A figura 17d mostra uma dessas cicatrizes e a trajetória clássica, instável e periódica, correspondente.

Três excelentes artigos de revisão sobre o tema do caos quântico estão relacionados nas referências [27], [28] e [29].

*Dificuldades:* A quantização de sistemas que são não-integráveis a nível clássico é difícil e, até o momento, não foi entendida satisfatoriamente. O que se faz, em geral, é retornar aos procedimentos de quantização semi-clássica. Vale notar que Einstein, em um artigo de 1917 [30] que permaneceu ignorado por 60 anos, apontava já as dificuldades para se quantizar sistemas desse tipo.

*Controvérsia atual:* Existe um "caos quântico"? Como caracterizá-lo? E como fica o Princípio da Correspondência?

*Experiências:* Algumas experiências interessantes têm sido realizadas nos últimos anos em sistemas microscópicos que apresentariam comportamento caótico a nível clássico:

\* Ionização do átomo de hidrogênio sob radiação de microondas<sup>[31]</sup>;

\* Átomo de hidrogênio (ou de Rydberg) submetido a campo magnético intenso<sup>[32]</sup>.

*Especulações:* Desta discussão superficial sobre a

"caologia quântica", baseada na mecânica quântica ordinária, pode-se especular que muitos resultados interessantes e originais poderão surgir ao se analisar suas repercussões sobre a quantização de teorias de campo não-lineares. O estudo das interações de muitos corpos, intensas e não-lineares, entre as partículas elementares (quarks, leptons, etc), sob esse ponto de vista, é ainda terreno inexplorado. Também as implicações do comportamento caótico em modelos cosmológicos mal começam a ser percebidas.

Se você tem interesse em adquirir uma visão mais global sobre o comportamento dos sistemas não-lineares, suas aplicações em vários domínios do conhecimento e possíveis implicações gerais sobre nossas concepções de determinismo e acaso, não deixe de consultar os números especiais sobre o caos determinístico das revistas *Ciência Hoje*, março de 1992, e *Recherche*, maio de 1991.

Por tudo isso termino com uma frase bastante citada de R. May, em um artigo muito bonito e influente, escrito em 1976 [33]: "Não somente na pesquisa, mas também no mundo cotidiano da política e da economia, estaríamos em melhor situação se mais pessoas se dessem conta que sistemas não-lineares simples não possuem necessariamente propriedades dinâmicas simples."

## Referências

1. I. C. Moreira, "A pré-história do caos: de Newton ao teorema KAM", VI Colóquio Nacional de História da Ciência, Campinas, 1990. Em forma resumida: "Os primórdios do caos determinístico", *Ciência Hoje*, março de 1992.
2. Programa CAOS, desenvolvido por Alexandre Sales Lima e Amauri Moreira, IF/UFRJ, 1992. Os interessados em cópia deste programa poderão entrar em contato com o autor: Ildeu de Castro Moreira, Instituto de Física-UFRJ, Caixa Postal 68528, CEP 21945, Rio. Tel: 2701191 R. 217; Fax: (021) 2807693; E-mail: IFT1001@UFRJ
3. M. Feigenbaum, *Physica D7*, 16 (1983).
4. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco, 1983.

5. S. V. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*. Springer, New York, 1978.
6. M. Hénon and C. Heiles, *Astron. Journal* **69**, 73 (1964).
7. E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
8. N. C. A. da Costa and F. A. Dória, "Undecidability and incompleteness in classical mechanics", preprint, 1990.
9. J. Hietarinta, *Phys. Rep.* **147**, 87 (1987).
10. L. P. Bueno, I. C. Moreira, O. M. Ritter e F. C. Santos, *Rev. Bras. Fis.* **16**, 559 (1986).
11. I. C. Moreira, *Rev. Bras. Fis.* **21**, 60 (1991).
12. T. Bountis, B. Grammaticos and A. Ramani, *Phys. Reports* **180**, 159 (1989).
13. H. Yoshida, *Physica D* **29**, 128 (1987).
14. M. A. Almeida, I. C. Moreira and H. Yoshida, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, L227 (1992).
15. A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, Springer, New York, 1983.
16. C. Grebogi, J. Yorke and E. Ott, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3215 (1990).
17. T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3215 (1990).
18. W. L. Ditto, S. N. Rausero, M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3211 (1990).
19. J. Singer, Y. Z. Wang and H. H. Bau, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1123 (1991).
20. A. Azevedo and S. M. Rezende, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1342 (1991).
21. T. L. Carroll and L. M. Pecora, *Proc. IEEE* **38**, 453 (1991).
22. S. Wolfram, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 601 (1983).
23. M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics - An introduction*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
24. C. J. Chaitin, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 941 (1982).
25. W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys. A* **488**, 375c (1988).
26. R. Blumel and U. Smilansky, *Phys. Rev. Lett* **60**, 477 (1988).
27. M. Berry, *Proc. Roy. Soc. London A* **413**, 183 (1987).
28. M. C. Gutzwiller, *Scientific American*, p. 26, janeiro de 1992.
29. R. V. Jensen, *Nature* **335**, 311 (1992).
30. A. Einstein, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917).
31. J. E. Bayfield, C. Casati, I. Guarneri and D. W. Sokol, *Phys. Rev. Lett.* **G3**, 364 (1989).
32. H. Hagesawa, M. Robnik and C. Wunner, *Prog. Theor. Phys.* **98**, 198 (1989).
33. R. M. May, *Nature* **261**, 459 (1976).