

# Aproximação WKB e Propagação de Ondas em Meios Não - Homogêneos

(WKB approximation and wave propagation in inhomogeneous media)

O. C. Castellani\*, M. G. Gonçalves† e A. J. Santiago

*Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro*

*20550 Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido para publicação em 11 de Agosto de 1992; revisados pelos autores em 10 de Novembro de 1992;  
Aceito para publicação em 26 de Novembro de 1992

## Resumo

Estuda-se a propagação de ondas em meios não-homogêneos utilizando a aproximação WKB. É mostrado que a função de onda, a velocidade e outras quantidades características do movimento ondulatório dependem fortemente da distribuição de densidade do meio não-homogêneo. Por completudeza uma breve revisão da aproximação WKB é apresentada.

## Abstract

The wave propagation in inhomogeneous media is studied by using the WKB approximation which is shown to be a very useful approach. It is seen that the wave function, velocity, and other quantities depend significantly on the details of the density distribution of the inhomogeneous medium. For the sake of completeness a brief revision of the WKB approximation is also included.

## I. Introdução

Até o princípio do século XX o método utilizado para descrever a evolução de um sistema físico, consistia em associar a este sistema um conjunto de grandezas e de variáveis dinâmicas e, com estas, então, encontrar as equações de movimento que prevêm a evolução de tal sistema. Em tal caso, conhecendo-se o estado inicial do sistema (um ponto no espaço de fase, no caso de uma partícula) podia-se obter sua dinâmica em qualquer instante. Em outras palavras, podíamos determinar, simultaneamente, a posição e o momento de tal partícula com precisão absoluta, no sentido de que, seguindo-se a trajetória no espaço de fase, a dinâmica desta partícula em qualquer instante, estaria determinada. Cada nova

descoberta experimental podia ser bem estruturada do ponto de vista teórico da física clássica (FC) através da introdução de novas variáveis, novas equações ou por modificações das equações anteriores. A matéria era suposta ser formada por corpúsculos cujos 'estados' podiam ser encontrados da maneira acima descrita. Por outro lado, as radiações (o Universo era suposto ser formado por dois 'objetos' distintos - *matéria e radiações*) apresentavam um comportamento ondulatório que se manifestava nos fenômenos conhecidos como interferência e difração, e obedeciam as equações de Maxwell.

Todavia, nas primeiras décadas do presente século, iniciou-se o estudo de sistemas microscópicos e algumas características de tais sistemas mostraram-se não se comportar de acordo com as leis da física clássica<sup>1</sup>. Surgia então, a física quântica (FQ), que apresentaria

\* Bolsista (IC) do Centro de Produção da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (CEPUERJ/SR-2).

† Bolsista (GD) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

um formalismo matemático (mecânica quântica) para descrever o comportamento de tais sistemas. A formulação de Schrödinger (existem outras) para a mecânica quântica tem por base os trabalhos de de Broglie sobre as ondas de matéria. De fato Schrödinger descobriu a equação de propagação da função de onda que representa um dado sistema quântico e, desta maneira, estabeleceu uma teoria não-relativística para a FQ. Ao contrário da FC, os sistemas descritos pela FQ são, inerentemente, inacessíveis a uma observação experimental direta. Por outro lado, é difícil resistir à 'tentação' de procurar 'visualizar' os resultados da teoria quântica, e estas visualizações são muito úteis no sentido de que facilitam a compreensão intuitiva da teoria.

Assim, é sempre desejável que alguns exercícios sejam realizados e divulgados, com o objetivo principal de, se possível, estabelecer uma 'visualização clássica' de problemas quânticos. Neste sentido, a formulação de Schrödinger é sem dúvida a mais indicada para um curso introdutório de FQ, porque utiliza uma notação muito usual, a do movimento ondulatório clássico; e muitos problemas quânticos podem ser discutidos em analogia com casos clássicos<sup>2</sup>, possibilitando uma comparação mais direta com o, por assim dizer, análogo clássico. Não pretendemos neste trabalho estudar as implicações didático-pedagógicas de tais comparações, o que, ainda hoje, constitui um abrangente campo de pesquisa sobre Ensino de Física<sup>3</sup>. Entretanto, o método que seguiremos poderá ser utilizado em sala de aula e as analogias (FQ - FC) serem feitas da mesma maneira que as analogias entre circuitos e osciladores, por exemplo, vem sendo utilizadas em física básica.

Neste trabalho nós utilizamos uma técnica muito usual em FQ, a aproximação WKB para estudar o problema de ondas mecânicas que se deslocam em meios não homogêneos (corda).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção II, a aproximação WKB como solução da Equação de Schrödinger unidimensional é brevemente revisada, na Seção III, utilizamos a aproximação WKB

na solução da equação da onda para uma corda não-homogênea cuja densidade varia com a posição, na Seção IV, nós finalizamos com os resultados e as discussões.

## II. A aproximação WKB como solução da equação de Schrödinger

A Equação de Schrödinger (E-S) unidimensional, para uma partícula de massa sujeita a um potencial  $V(x)$  dependente apenas da posição é dada por<sup>4</sup>

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde  $\Psi(x,t)$  é a função de onda e  $\hbar$  é a constante de Planck racionalizada.

Separando-se as variáveis na Eq.2.1 (o que é sempre possível se  $V$  é uma função apenas de  $x$ ) e resolvendo-se a parte dependente do tempo,  $\Psi(x,t) = \Phi(x)T(t) = \Phi(x)e^{iEt/\hbar}$ , obtemos facilmente a (E-S) independente do tempo

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\Phi(x) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $E$  é a energia da partícula. Se  $V(x)$  é um potencial que varia lentamente com a posição, podemos admitir que a parte espacial da função de onda possa ser escrita como<sup>4</sup>

$$\Phi(x) = A(x)e^{S(x)/\hbar} \quad (2.3)$$

onde

$$S(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m[E - V(x)]} K(x)x \quad (2.4)$$

Levando-se a Eq.2.3 para a Eq.2.2, obtemos duas equações que devem ser satisfeitas separadamente

$$\frac{dS}{dx} = \frac{C}{A^2} \quad (2.5)$$

onde  $C$  é uma constante de integração e,

$$\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2} - \frac{C^2}{\hbar^2 A^4} + \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2} = 0 \quad (2.6)$$

Fazendo-se a aproximação

$$\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2} \ll \frac{C^2}{\hbar^2 A^4} \quad (2.7)$$

a Eq.2.5b pode ser reescrita como  $\frac{C^2}{\lambda^2} = 2m[E - V(x)]$ , logo, utilizando-se a Eq.2.5a, obtemos

$$S(x) = \int_x dx \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (2.8)$$

e então, a função de onda  $\Psi(x, t)$ , solução da Eq.2.1 é facilmente obtida, sendo dada por

$$\Psi(x, t) = A(x)e^{i \int_x dx \sqrt{2m[v(x) - E]x + Et} / \hbar} \quad (2.9)$$

Este método para encontrar soluções da E-S é devido a Wentzel - Kramers - Brillouin e por isto, denominado de aproximação WKB.

A aproximação (Eq.2.6) será válida se  $V(x)$  variar lentamente num comprimento de onda, o qual, por sua vez, varia de ponto a ponto. Observe-se que o comprimento de onda racionalizado  $\lambda$  pode ser escrito como

$$\lambda(x) = \frac{\hbar}{p(x)} = \frac{\hbar}{[2m(E - V(x))]^{1/2}} \quad (2.10)$$

onde  $p$  é o momento de Broglie. Nos pontos  $x \rightarrow x'$ , onde  $E - V(x') = 0$ , a aproximação não é 'boa', e estes pontos são chamados *pontos de retorno*, devido ao fato de que uma partícula clássica não pode ir além deste ponto  $x'$ , i.é., ela só pode se deslocar na região  $x \leq x'$  ou seja, onde  $E - V(x) \geq 0$ . Como pretendemos utilizar este formalismo para o caso de uma onda clássica, por simplicidade, não nos preocuparemos com a região  $E < V(x)$  (para maiores detalhes, veja por exemplo a Ref.4).

### III. A aproximação WKB para a equação da onda

Consideremos uma corda cuja densidade  $\mu$  varie com a posição, i.é.,  $\mu = \mu(x)$  e que esteja sujeita a uma tensão  $F$ . A função de onda  $u$  que descreve o movimento ondulatório por sobre esta corda, deve satisfazer uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v(x)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

onde a velocidade  $v$  é uma função da posição ao longo da corda

$$v = \sqrt{F/\mu(x)}. \quad (3.2)$$

A rigor, as soluções da Eq.3.1 não podem mais ser chamadas de ondas, pois não podem ser escritas na forma da solução de d'Alembert ( $u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ ). Além disto, Eq.3.1 é difícil de ser resolvida. Todavia, se as propriedades do meio variam lentamente com a posição, podemos utilizar de aproximações. Vejamos.

A função de onda, para ondas que se propagam da esquerda para a direita, num meio com características constantes, pode ser escrita como<sup>5</sup>

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.3)$$

onde  $k = \omega/v$ . Se as propriedades do meio variam muito pouco com a posição, é razoável assumir que a função de onda  $u$ , pode ainda, ser escrita na mesma forma, só que, talvez, com as quantidades  $A$  e  $k$  variando 'lentamente' com a posição, i.é., nós podemos admitir, em analogia com a Eq.2.3, uma solução do tipo

$$u(x, t) = A(x)e^{i[k(x) - \omega t]}. \quad (3.4)$$

Escrevendo-se  $S = k(x)$ , a Eq.3.4 fica

$$u(x, t) = A e^{i(S - \omega t)}. \quad (3.5)$$

Tomando-se as derivadas parciais da solução dada pela Eq.3.5, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 A}{dx^2} e^{i(S - \omega t)} + i2 \frac{dA}{dx} \frac{dS}{dx} e^{i(S - \omega t)} \\ &+ iA \frac{d^2 S}{dx^2} e^{i(S - \omega t)} - A \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 e^{i(S - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A \omega^2 e^{i(S - \omega t)}. \quad (3.7)$$

Levando-se as Eq.3.6 e Eq.3.7 à Eq.3.1 e tomando apenas a parte real, vemos que

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2 A}{dx^2} + \left[ - \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right] A \right\} \cos(S - \omega t) \\ &- \left\{ 2 \frac{dA}{dx} \frac{dS}{dx} + A \frac{d^2 S}{dx^2} \right\} \sin(S - \omega t) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como esta Eq.3.8 deve valer para toda a posição  $x$  e instante  $t$ , e como as funções seno e cosseno são simétricas

no sentido de que o máximo de um é o mínimo do outro, os coeficientes dos termos seno e cosseno devem se anular separadamente, para que o lado esquerdo da Eq.3.8 seja igual a zero. Consequentemente, as funções  $A(x)$  e  $S(x)$  devem satisfazer as seguintes equações diferenciais acopladas (simultaneas)

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \left[ -\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \frac{w^2}{v^2} \right] A = 0 \quad (3.9)$$

e

$$2 \frac{dA}{dx} + \frac{dS}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} = 0. \quad (3.10)$$

A Eq.3.9 é tão difícil de ser resolvida quanto a Eq.3.1. Entretanto, se estivéssemos trabalhando em um meio homogêneo ( $\mu = cte$ ), o termo  $d^2 A/dx^2$  seria nulo, então, ele deve ser pequeno no meio cuja densidade varie lentamente. Assim, em uma primeira aproximação, nós podemos fazê-lo igual a zero e, então, obter

$$\frac{dS}{dx} \approx \frac{w}{v(x)} \approx k(x), \quad (3.11)$$

i.é.,

$$S \approx \int_{x_0}^x dx \frac{w}{v(x)}. \quad (3.12)$$

Da Eq.3.10, podemos obter o valor de  $A(x)$ . De fato

$$A^2 \frac{d^2 S}{dx^2} = A^2(x_0) \frac{dS}{dx} \Big|_{x_0}. \quad (3.13)$$

onde o termo do lado direito da igualdade é uma constante. Então, trazendo se para a Eq.3.13 o valor de  $dS/dx$  como dado pela Eq.3.11, temos que

$$A(x) = A(x_0) \left[ \frac{v(x)}{v(x_0)} \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

onde  $x_0$  é um ponto de referência no qual a 'onda' tem amplitude  $A(x_0)$  e velocidade  $v(x_0)$ .

Levando o valor  $A(x)$  (Eq.3.14) e  $S(x)$  (Eq.3.12) para a Eq.3.5, a função de onda fica

$$u(x,t) \approx A(x_0) \left( \frac{v(x)}{v(x_0)} \right)^{1/2} e^{i \left[ \int_{x_0}^x dx \frac{dx}{v(x)} - wt \right]}. \quad (3.15)$$

Repare na semelhança matemática entre a Eq.3.5 e a Eq.2.8.

Finalmente, tomando-se apenas a parte real de  $u$ , obtemos

$$u(x,t) \approx A(x_0) \left[ \frac{v(x)}{v(x_0)} \right]^{1/2} \cos \left[ \int_{x_0}^x dx \frac{w}{v(x)} - wt \right]. \quad (3.16)$$

Isto é, dentro desta aproximação, a variação na amplitude é proporcional a raiz quadrada da razão entre a velocidade local da 'onda' e a velocidade  $v(x_0)$  e ainda, o fator espacial da fase ( $kx$ ) não é constante e deve ser trocado para  $\int dx k(x)$ .

A pergunta natural neste momento, seria - quando podemos utilizar a aproximação WKB, isto é, o que significa as propriedades físicas do meio variarem lentamente para que a aproximação utilizada possa ser justificada? Vejamos como responder a esta questão.

Para tal, seja a Eq.3.9, que desprezando-se o termo de derivada superior, pode ser escrita na forma dada pela Eq.3.11. Todavia, levando-se em conta este termo, a Eq.3.11 deve ser modificada para

$$\frac{dS}{dx} = \frac{w}{v(x)} [1 + \epsilon(x)], \quad (3.17)$$

onde o termo  $\epsilon(x)$  é a correção devido à primeira integração.

Levando se as Eq.3.17 e Eq.3.14 para a Eq.3.9, obtemos,

$$\epsilon \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) = -\frac{1}{8w^2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{v}{4w^2} \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (3.18)$$

Como em um meio cujas propriedades variem lentamente o termo que contém a derivada segunda  $d^2 v/dx^2$  é, geralmente, desprezível comparado com aquele que contém  $(dv/dx)^2$ , temos que a solução dada pela Eq.3.16 será uma boa aproximação se

$$\|\epsilon\| \ll 1, \quad (3.19)$$

e, neste caso,  $\|\epsilon\|^2 \approx 0$ ; e ainda da Eq.3.18, vemos que

$$\|\epsilon\| \approx \frac{1}{8w^2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \ll 1, \quad (3.20)$$

para que a aproximação seja justificável.

#### IV. Resultados e Discussões

Nós utilizamos o formalismo discutido na seção anterior, para estudar a propagação de 'ondas' em cordas cujas densidades apresentam diversos tipos de dependência com a posição  $x$ . Em particular, aqui nós

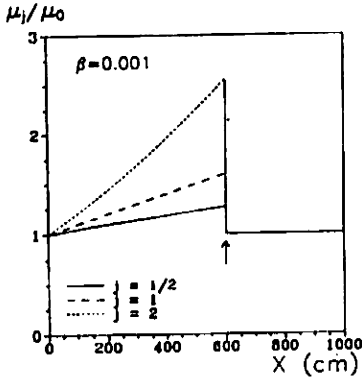


Figura 1: A dependência da razão  $\mu_j/\mu_0$  com a posição  $x$  é ilustrada. A linha cheia corresponde à corda cuja densidade é dada por  $\mu_{1/2}$ , a tracejada  $\mu_1$ , e a pontilhada  $\mu_2$  (veja o texto para detalhes).

consideraremos cordas de 1000cm de comprimento, cujas distribuições de densidades são dadas por

$$\mu_j = \begin{cases} \mu_0(1 + \beta x)^j & 0 \leq x \leq 600\text{cm} \\ \mu_0 & x > 600\text{cm} \end{cases} \quad (4.1)$$

com  $j = 1/2, 1$  e  $2$  e onde  $\beta \geq 0$  é um parâmetro (coeficiente de não-homogeneidade) tal que se  $\beta = 0$ , a densidade da corda é constante e igual a  $\mu_0$ . No gráfico da Fig.1, nós ilustramos a dependência de  $\mu_j$  com  $x$  tomando  $\beta = 0.001$  e plotando a razão  $\mu_j/\mu_0$ . Três valores de  $j$  são considerados;  $j = 1/2$  (linha cheia),  $j = 1$  (linha tracejada) e  $j = 2$  (linha pontilhada). A linha sólida indicada por seta corresponde ao ponto de descontinuidade em  $x = 600\text{cm}$ , a partir do qual a corda se torna homogênea e a razão  $\mu_j/\mu_0$  é igual a 1. Note que quando  $j = 2$ ,  $\mu_j$  cresce muito rapidamente com  $x$ .

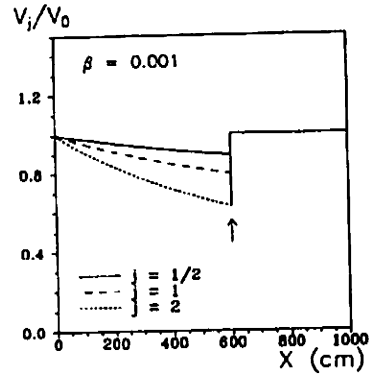


Figura 2: A dependência da razão  $v_j/v_0$  com a posição  $x$  é ilustrada. A linha cheia corresponde à velocidade  $v_{1/2}$ , a tracejada  $v_1$ , e a pontilhada  $v_2$  (veja o texto para detalhes).

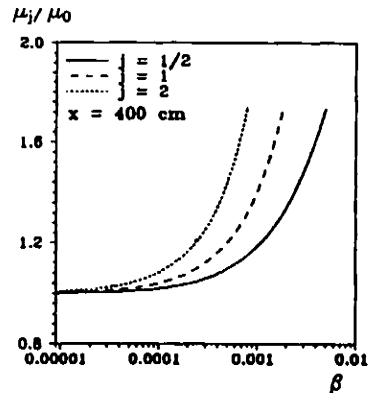


Figura 3: A dependência da razão  $\mu_j/\mu_0$  com o parâmetro  $\beta$  é ilustrada tomando-se o ponto  $x = 400\text{cm}$  sobre a corda. A linha cheia corresponde à  $j = 1/2$ , a tracejada  $j = 1$ , e a pontilhada  $j = 2$ .

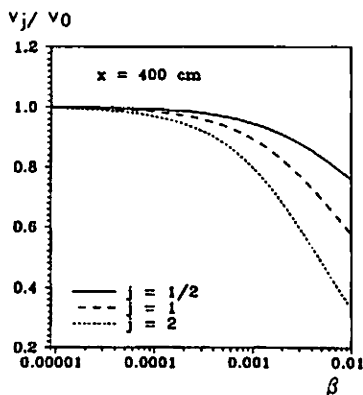


Figura 4: A dependência da razão  $v_j/v_0$  com o parâmetro  $\beta$  é ilustrada tomando-se o ponto  $x = 400\text{cm}$  sobre a corda. A linha cheia corresponde à  $j = 1/2$ , a tracejada  $j = 1$ , e a pontilhada  $j = 2$ .

As velocidades  $v_j = \sqrt{F/\mu_j}$  das 'ondas' que se propagam em meios cujas densidades são dadas pela Eq.4.1 serão dependentes da posição. A razão  $v_j/v_0$  entre as velocidades  $v_j(x)$  com  $0 \leq x \leq 600\text{cm}$  e a velocidade  $v_0$  na região onde a densidade é constante e igual a  $\mu_0 (x > 600\text{cm})$  é vista na Fig.2 como uma função de  $x$  para os três valores de  $j$ . A linha cheia representa  $v_{1/2}/v_0$ , a tracejada  $v_1/v_0$  e a pontilhada  $v_2/v_0$ . O valor da tensão  $F$  e da densidade  $\mu_0$  são  $F = 10^5\text{dyn}$  e  $\mu_0 = 10\text{g/cm}$  e serão utilizados em todo este trabalho. O parâmetro  $\beta$  foi tomado como 0.001. Pode ser visto que a velocidade  $v_j$  na região de não homogeneidade decresce com  $x$  e este decréscimo é maior a medida que  $j$  aumenta. A seta indica a região a partir da qual a razão  $v_j/v_0$  torna-se constante e igual a 1. Dependências semelhantes são também esperadas para  $\mu_j$  e  $v_j$ , com relação ao parâmetro  $\beta$ . De fato, nós tomamos um ponto sobre a corda ( $x = 400\text{cm}$ ), na região de não homogeneidade, e estudamos a dependência destas quantidades com  $\beta$ . Na Fig.3 e Fig.4, os gráficos de  $\mu_j/\mu_0$  versus  $\beta$  e  $v_j/v_0$  versus  $\beta$  são apresentados para um extenso intervalo de valores de  $\beta$  (a escala é logarítmica), respectivamente. Na Fig. 3 pode ser visto que  $\mu_j$  cresce com  $\beta$ , chegando a aumentar cerca de 60% de seu valor inicial se  $j = 2$  e  $\beta \approx 0.0006$ . Já a velocidade  $v_j$  decresce com  $\beta$  caindo para cerca de 70%

de seu valor inicial quando  $\beta \approx 0.006$  e  $j = 2$ .

Para as distribuições de densidade dada pela Eq.4.1 as integrais da Eq.3.16 são fáceis e analíticas. As respectivas funções de onda no intervalo  $0 < x < 600\text{cm}$  são

$$u_{1/2}(x, t) = A(x_0) \left[ \frac{v_{1/2}}{v_0} \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{4w}{5\beta} \sqrt{\frac{\mu_0}{F}} (1 + \beta x)^{5/4} \Big|_x - wt \right] \quad (4.2)$$

$$u_1(x, t) = A(x_0) \left[ \frac{v_1}{v_0} \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{2w}{3\beta} \sqrt{\frac{\mu_0}{F}} (1 + \beta x)^{3/2} \Big|_x - wt \right] \quad (4.3)$$

$$u_2(x, t) = A(x_0) \left[ \frac{v_2}{v_0} \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{w}{2\beta} \sqrt{\frac{\mu_0}{F}} (1 + \beta x)^2 \Big|_x - wt \right] \quad (4.4)$$

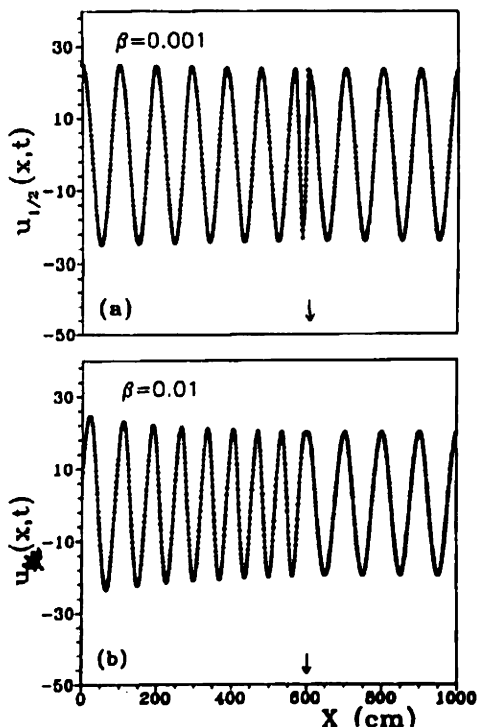


Figura 5: O comportamento da função de onda  $u_{1/2}$  é ilustrado como uma função da posição  $x$  e tomando-se  $\beta$  igual 0.001 (a) e 0.01 (b). Veja o texto para detalhes.

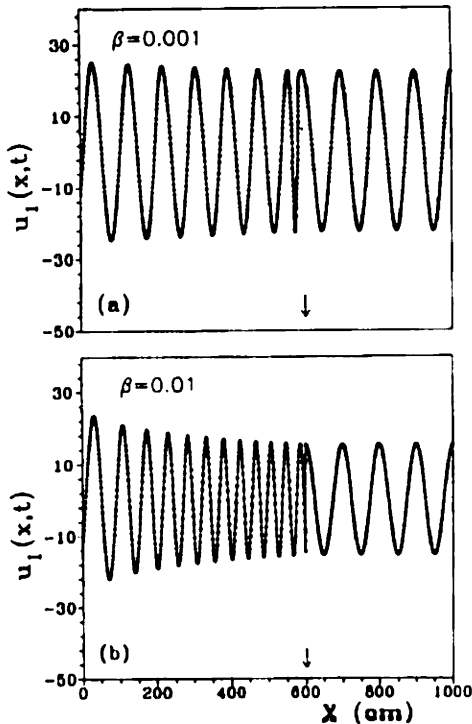


Figura 6: O comportamento da função de onda  $u_1$  é ilustrado como uma função da posição  $x$  e tomando-se  $\beta$  igual 0.001 (a) e 0.01 (b). Veja o texto para detalhes.

Na Fig.5, o comportamento da função de onda  $u_{1/2}$  é ilustrado como uma função de  $x$  (o comprimento da corda) para  $A(x_0) = 25\text{cm}$  e  $\omega = 6.28\text{Hz}$ . Duas situações são consideradas;  $\beta = 0.001$  (Fig.5a) e  $\beta = 0.01$  (Fig.5b). Pode ser visto que quando  $\beta = 0.01$ , a amplitude e o comprimento de onda decrescem com  $x$ . Todavia, quando  $\beta$  é pequeno (0.001) e  $j = 1/2$ , a variação na densidade é muito pequena e seu efeito sobre a função de onda é desprezível. Por outro lado, aumentando-se o valor de  $j$ , Fig.6 ( $j = 1$ ) e Fig.7 ( $j = 2$ ), o decréscimo na amplitude da função de onda e no comprimento de onda é muito mais nítido. Na realidade, se  $\beta$  e  $j$  são grandes, a variação no comprimento de onda é muito grande. Isto significa, que neste caso,  $\lambda$ , só tem sentido localmente, i.e., o caráter ondulatório é perdido embora a perturbação continue a se propagar. Nas Figs. 5, 6 e 7, as setas indicam a posição sobre a corda a par-

tir da qual a densidade é constante e igual a  $\mu_0$ ; para onde após percorrer o meio não-homogêneo a 'onda' é transmitida.

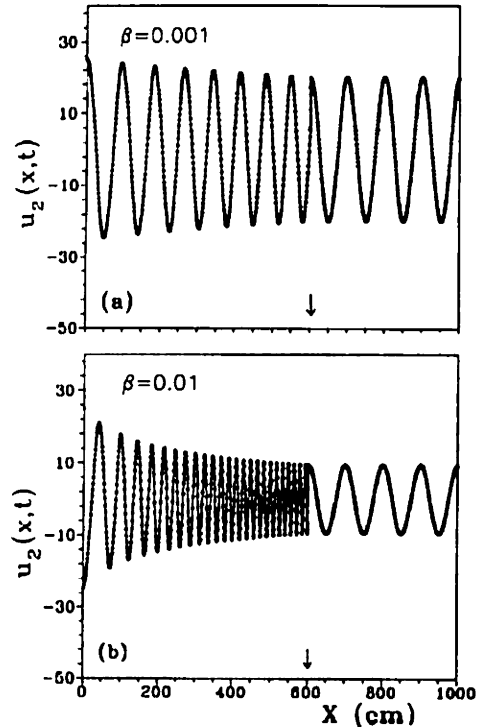


Figura 7: O comportamento da função de onda  $u_2$  é ilustrado como uma função da posição  $x$  e tomando-se  $\beta$  igual 0.001 (a) e 0.01 (b). Veja o texto para as discussões.

É conveniente ressaltar que o método WKB que utilizamos, não leva em conta a possibilidade de reflexão parcial, o que é uma característica de meios não-homogêneos, entretanto, é muito útil em mecânica quântica e física nuclear, em problemas de espalhamento por potenciais centrais e penetração de barreira em potencial (decaimento  $\alpha$ , por exemplo) e ainda na óptica geométrica quando esta é interpretada como uma aproximação da óptica ondulatória. Para uma recente aplicação da aproximação WKB em física nuclear veja por exemplo a Ref. 6.

Em suma, nós utilizamos a aproximação WKB para estudar a propagação de ondas em meios não-homogêneos e unidimensionais e verificamos que a não-homogeneidade exerce uma forte influência sobre as características do movimento ondulatório. Em particular

a velocidade de propagação da 'onda' o comprimento de onda e a amplitude da função de onda são fortemente determinadas pelas características do meio.

#### Agradecimento

Nós gostaríamos de agradecer a T. Kodama, D. Portes Jr. e E. L. Medeiros por muitos comentários e estimulantes discussões.

#### Referências

1. T. Kodama (1985), *Mecânica Quântica I* - Notas de Aula, PG/CBPF. Eisberg e Resnick (1983), *Física Quântica*, 2a edição, Cap. 1,2 e 3, Ed. Campus. J. Leite Lopes (1992), *A Estrutura Quântica da Matéria - Do Átomo Pré-Socrático às Partículas Elementares*, 1a edição, Ed. UFRJ.
2. A. D. Tavares, A. J. Santiago, C. A. de Azevedo e R. A. Gonçalves Ledo, *Cordas Vibrantes como Introdução à Realidade Quântica*, Revista de Ensino de Física, 11, 49 (1989).
3. F. L. Silveira (1992), comunicação privada, *Uma Epistemologia Racional-Realista e o Ensino da Física*, Tese de Doutorado, PUCRGS.
4. Albert Messiah (1983), *Mecânica Quântica*, Cap. VI, 1a edição, Ed. Tecnos S.A..
5. H. Moysés Nussenzveig (1981), *Curso de Física Básica*, Vol. 2, Cap. 5, Ed. Edgar Blücher Ltda..
6. M. G. Gonçalves (1992), *Modelo de Pré - Cisão para Desintegrações Nucleares Raras*, Tese de Mestrado, Departamento de Física Nuclear e Altas Energias, DNE/CBPF.