Equivalência Entre os Propagadores de Feynman para Sistemas Quadráticos Dependentes do Tempo e as Partículas Livres

(Equivalence between the Feynman propagators for time-dependent quadratic systems and the free particles)

José Maria Filardo Bassalo e Paulo de Tarso Santos Alencar
Departamento de Física da Universidade Federal do Pará
66075-900, Guamá, Belém, Pará, Brasil

Recebido para publicação em 8 de Janeiro de 1993; Aceito para publicação em 26 de Outubro de 1993

Resumo

Neste trabalho calculamos exatamente o propagador de Feynman para uma Lagrangiana quadrática dependente do tempo, resolvendo a equação de Schrödinger. Por intermédio de uma transformação dilatação-rotação, demonstramos que tal propagador pode ser obtido a partir do propagador da partícula livre em um sistema de coordenadas espaço-temporal. Esse resultado é comparado aos obtidos por Khandekar e Lawande (1986) e por Nassar, Bassalo, Santos Neto e Alencar (1986).

Abstract

In this paper we calculate exactly the Feynman propagator for a time-dependent quadratic Lagrangian, solving Schrödinger's equation. Through a dilation-rotation transformation, we demonstrate that this propagator can be obtained from the propagator of the free particle in a spece-time system of coordinates. This finding is compared with those obtained by Khandekar and Lawande (1986) and by Nassar, Bassalo, Santos Neto e Alencar (1986).

I. Introdução

O cálculo do propagador para lagrangianos quadráticos dependentes do tempo é, em princípio, obtido por intermédio da integral de caminho de Feynman[1,2], via equação de van Vleck-Pauli[3,4]:

$$K(q_f,q_0;t_f,t_0) = \left[\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_c}{\partial q_0 \partial q_f}\right]^{1/2} \cdot \exp\cdot\left[\frac{i}{\hbar}S_c(q_f,q_0;t_f,t_0)\right], \quad (1)$$

onde S_c é a ação clássica.

Muito embora o método da integral de caminho de Feynman tenha uma grande versatibilidade, a obtenção do propagador para alguns sistemas quadráticos dependentes do tempo, usando esse método, tem sido realizada depois de longos e tediosos cálculos[5-13]. Por outro lado, esse mesmo propagador foi calculado por intermédio da solução exata da equação de Schrödinger, usando-se uma transformação matemática espaço-temporal, diretamente[14-18] ou através da representação hidrodinâmica da Mecânica Quântica[19-22].

Neste artigo, calculamos o propagador para um sistema quadrático geral dependente do tempo, resolvendo a correspondente equação de Schrödinger, usando uma transformação dilatação-rotação. Esse cálculo é feito diretamente e por intermédio da representação hidrodinâmica da Mecânica Quântica. O principal objetivo do trabalho é o de mostrar que esse propagador pode ser obtido do propagador da partícula livre em um novo sistema de coordenadas espaço-temporal e que os dois resultados são equivalentes.

II. Obtenção do propagador diretamente da equação de Schrödinger

O Lagrangiano para nosso sistema é dado por[13]:

$$L = \frac{1}{2}\,[a(t)\dot{q}^2 - b(t)q^2] + c(t)q\,. \qquad (2)$$

Então, a correspondente equação de Schrödinger resulta em (com $\hbar = 1$):

$$i\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2a(t)}\frac{\partial^2\psi(q,t)}{\partial q^2} + \left[\frac{1}{2}b(t)q^2 - c(t)q\right]\psi(q,t)\,. \qquad (3)$$

Agora, façamos a seguinte transformação[24,25]:

$$q(t) = s(\tau)\bar{q}(t) + p(\tau) \qquad (4)$$

onde τ é dado por:

$$\tau = \int^t \mu(t')dt'\,; \qquad (5)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \mu(t)\,. \qquad (6)$$

Em termos das novas variáveis $\bar{q}$ e τ, a equação (3) ficará:

$$i\mu\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \left(\frac{p'}{p} + \bar{q}\frac{s'}{s}\right)\frac{\partial}{\partial q}\right]\phi(\bar{q},\tau) = -\frac{1}{2as^2}\frac{\partial^2\phi(\bar{q},\tau)}{\partial\bar{q}^2} + \left[\frac{1}{2}b(s^2\bar{q}^2 + p^2 + 2s\bar{q}p) - c(s\bar{q} + p)\right]\phi(\bar{q},\tau)\,. \qquad (7)$$

Usando-se o ansatz WKB[26-28]:

$$\phi(\bar{q},\tau) = \exp[if(\bar{q},\tau)]\chi(\bar{q},\tau)\,. \qquad (8)$$

Então, substituindo a eq.(8) na eq.(7), virá:

$$\left[i\mu\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{2as^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{q}^2}\right]\chi - i\frac{\partial\chi}{\partial\bar{q}}\left[\mu\frac{p'}{s} + \bar{q}\mu\frac{s'}{s} - \frac{1}{as^2}\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right] + \left(\frac{1}{2as^2}\left[i\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{q}^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)^2\right] + \mu\frac{p'}{s}\frac{\partial f}{\partial\bar{q}} + \bar{q}\mu\frac{s'}{s}\frac{\partial f}{\partial\bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial\tau} - \frac{1}{2}bs^2\bar{q}^2 - bsp\bar{q} + cs\bar{q} + cp\right)\chi = 0\,. \qquad (9)$$

Escolhendo-se adequadamente a função f, e impondo-se condiçoes sobre as funções s, p e μ[18], isto é:

$$f = \frac{1}{2}as\dot{s}\bar{q}^2 + as\dot{p}\bar{q} + i\ln\sqrt{s} + \frac{1}{2}ap\dot{p} + \frac{1}{2}\int^t c(t')p(t')dt'\,, \qquad (10)$$

$$\ddot{s} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{s} + \frac{b}{a}s = 0\,; \qquad (11)$$

$$\ddot{p} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{p} + \frac{b}{a}p = \frac{c}{a}\,, \qquad (12)$$

e

$$a\mu s^2 = M_0 \quad (M_0 = \text{const.})\,, \qquad (13)$$

$$\Rightarrow 2\frac{\dot{s}}{s} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0\,, \qquad (14)$$

a eq. (9) transformar-se-á na equação de Schrödinger para a partícula livre:

$$\frac{1}{2M_0}\frac{\partial^2\chi(\bar{q},\tau)}{\partial\bar{q}^2} + i\frac{\partial\chi(\bar{q},\tau)}{\partial\tau} = 0\,. \qquad (15)$$

Portanto, a solução dessa equação será dada por:

$$\chi(\bar{q},\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{livre}}(\bar{q}_f,\bar{q}_0;\tau,\tau_0)\chi(\bar{q}_0,\tau_0)d\bar{q}_0\,, \qquad (16)$$

onde $K_{\text{livre}}(\bar{q}_f, \bar{q}_0; \tau, \tau_0)$ é dado por[1,2]:

$$K_{\text{livre}}(\bar{q}_f, \bar{q}_0; \tau, \tau_0) = \\ = \left[\frac{M_0}{2\pi i\hbar(\tau-\tau_0)}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\frac{(\bar{q}_f-\bar{q}_0)^2}{(\tau-\tau_0)}\right] \quad (17)$$

com $\hbar$ trazido de volta.

Usando-se esses resultados, teremos:

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = (\exp[if(\bar{q}_f, \tau)] K_{\text{livre}}(\bar{q}_f, \bar{q}_0; \tau, \tau_0) \exp[-if^*(\bar{q}_0, \tau_0)]) \ , \quad (18)$$

onde $f^*(\bar{q}_0, \tau_0)$ significa complexo conjugado.

Por fim, substituindo-se as eqs. (10, 17) na eq. (18), obteremos:

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \left[\frac{M_0}{2\pi i\hbar s_f s_0(\tau-\tau_0)}\right]^{1/2} \cdot \\ \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}(a_f s_f \dot{s}_f \bar{q}_f^2 - a_0 s_0 \dot{s}_0 \bar{q}_0^2) + (a_f s_f \dot{p}_f \bar{q}_f - a_0 s_0 \dot{p}_0 \bar{q}_0) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}(a_f p_f \dot{p}_f - a_0 p_0 \dot{p}_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} c(t)p(t)dt + \frac{M_0}{2(\tau-\tau_0)}(\bar{q}_f - \bar{q}_0)^2\right]\right) \ , \quad (19)$$

onde:

$$x_y \equiv x(t_y) \ ; \quad (20)$$

$$\dot{x}_y \equiv \dot{x}(t_y) \ , \quad (21)$$

com $x = a$ ou s ou p; $y = f$ ou o.

Resolvendo-se as eqs. (11) e (12), com as respectivas transformações[13]:

$$S(t) = s(t)\sqrt{a(t)} \ , \quad (22)$$

$$P(t) = p(t)\sqrt{a(t)} \ , \quad (23)$$

com $P(t)$ e $S(t)$, dados, respectivamente, por:

$$P(t) = \rho(t) sen[\phi(t, t')] \ , \quad (24)$$

$$S(t) = \rho(t)\cos[\phi(t, t')] \ , \quad (25)$$

onde $\rho(t)$ satisfaz à equação de Pinney[29] e $\phi(t, s)$ é definido por:

$$\phi(t, s) = \nu(t) - \nu(s) = \int_s^t \rho^{-2}(t')dt' \ . \quad (26)$$

Com essas transformações, demonstra-se que[18]:

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar\sigma_f\sigma_0 sen[\phi(t_f, t_0)]}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\left[\frac{a_f\dot{\sigma}_f q_f^2}{\sigma_f} - \frac{a_0\dot{\sigma}_0 q_0^2}{\sigma_0}\right]\right) \\ \cdot \exp\left(\frac{i}{2\hbar\, sen[\phi(t_f, t_0)]}\left[\left(\frac{q_f^2}{\sigma_f^2} + \frac{q_0^2}{\sigma_0^2}\right) cos[\phi(t_f t_0)] - \frac{2q_0 q_f}{\sigma_0\sigma_f} + \right.\right. \\ + \frac{2q_f}{\sigma_f}\int_{t_0}^{t_f} G(t) sen[\phi(t, t_0)]dt + \frac{2q_0}{\sigma_0}\int_{t_0}^{t_f} G(t) sen[\phi(t_f, t)]dt + \\ \left.\left. -2\int_{t_0}^{t_f}\int_{t_0}^{t_f} G(s)G(t) sen[\phi(s, t_0)] sen[\phi(t_f, t)] ds\, dt\right]\right) \ . \quad (27)$$

onde:

$$\sigma(s) \equiv \sigma_s = \frac{\rho(s)}{\sqrt{a(s)}} , \tag{28}$$

$$G(s) = \sigma_s(s) . \tag{29}$$

A eq. (27) é justamente a eq. (3.2.5) da referência (13).

III. Obtenção do propagador por intermédio da representação Hidrodinâmica da Mecânica Quântica

Seguindo-se Feynman e Hibbs[1], a solução da equação de Schrödinger dada pela eq. (3), será:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + -\frac{1}{2a(t)}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \left[\frac{1}{2}b(t)q^2 - c(t)q\right]\right) K(q,t;q_0,t_0) = 0 , \tag{30}$$

onde

$$\lim_{t\to t_0} K(q,q_0;t,t_0) = \delta(q-q_0) . \tag{31}$$

Para sistemas quadráticos cujo Lagrangiano é dado pela eq. (2), o propagador $K(q,t;q_0,t_0)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$K(q,t;q_0,t_0) = \phi(t,t_0)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(q,t;q_0,t_0)\right] \tag{32}$$

onde $S(q,t;q_0,t_0)$ é a ação ao longo de um caminho real ligando (q_0,t_0) a (q,t), conforme veremos mais adiante.

Levando-se a eq. (32) na eq. (30), e separando-se as partes real e imaginária, obtém-se[19-23]:

$$PR: \ \frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{1}{a(t)}\frac{\partial S}{\partial q}\right]\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{1}{2a(t)}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{2}b(t)q^2 + c(t)q , \tag{33}$$

$$PI: \ \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2a(t)}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} . \tag{34}$$

Definindo-se:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial q} , \tag{35}$$

$$v \equiv \frac{1}{a(t)}\frac{\partial S}{\partial q} , \tag{36}$$

onde o conjunto específico de caminhos $Q(t')$ obedecem à equação;

$$\dot{Q}(t) \equiv \left[\frac{dQ(t')}{dt'}\right]_{t'=t} = \frac{1}{a(t)}\frac{\partial S}{\partial q} , \tag{37}$$

com:

$$Q(t'=t_0) \equiv q_0 , \quad Q(t'=t) \equiv q . \tag{38a, b}$$

Desse modo, a eq. (33) ficará:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}a(t')\dot{Q}^2(t') - \frac{1}{2}b(t')Q^2(t') + c(t')Q(t') , \tag{39}$$

cuja integração ao longo da trajetória $Q(t')$ dará:

$$\begin{aligned} S(q,t;q_0,t_0) = S[Q(t)] &= \\ &= \int_{q_0,t_0}^{q,t} dt' \left[\frac{1}{2}a(t')\dot{Q}^2(t') - \frac{1}{2}b(t')Q^2(t') + c(t')Q(t')\right] . \end{aligned} \tag{40}$$

Por outro lado, integrando-se a eq. (34), resultará:

$$\phi(t,t_0)=\phi_0(t_0)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt'\frac{1}{a(t')}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}\right], \quad (41)$$

onde a constante $\phi_0(t_0)$ é introduzida na equação acima em virtude da condição inicial dada pela eq. (31).

Agora, derivando-se a eq. (33) (ou a eq. (39)) em relação à variável q (ou à variável Q) e usando-se as definições dadas pelas eqs. (35 - 38), virá:

$$\ddot{Q}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{Q}+\frac{b}{a}Q=\frac{c}{a}. \quad (42)$$

Usando-se a transformação espaço-tempo dada pela eq. (4), teremos:

$$Q(t)=\bar{Q}(\tau)s(t)+p(t), \quad (43)$$

onde $\tau(t)$ é dado pelas eqs. (5, 6).

Substituindo-se a eq. (43) na eq. (42), obteremos:

$$\begin{aligned} &s\mu\bar{Q}''+\left(2\dot{s}\mu+s\dot{\mu}+\frac{\dot{a}}{a}s\mu\right)\bar{Q}' \\ &+\left(\ddot{s}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{s}+\frac{b}{a}s\right)\bar{Q} \\ &+\left(\ddot{p}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{p}+\frac{b}{a}p-\frac{c}{a}\right)=0, \quad (44) \end{aligned}$$

onde $Q'(\tau)$ indica derivada em relação à variável τ.

A fim de que a eq. (44) se transforme na equação de movimento de uma partícula livre, isto é:

$$\bar{Q}''=0, \quad (45)$$

verifica-se que as funções $s(t)$, $p(t)$ e $\mu(t)$ satisfazem às normas equações (11, 12, 13, 14).

Desse modo, a correspondente ação $\bar{S}$ para a eq. (45) será dada por:

$$\bar{S}(\bar{Q},\tau;\bar{Q}_0,\tau_0)=\int_{\bar{Q}_0,\tau_0}^{\bar{Q},\tau}\bar{L}[\bar{Q}'(\tau^*)]d\tau^*, \quad (46)$$

onde o Lagrangiano $\bar{L}$ é dado por:

$$\bar{L}=\frac{1}{2}\bar{Q}'^2. \quad (47)$$

Sendo equivalentes as respectivas variações $\delta S=0$ e $\delta\bar{S}=0$, então:

$$S=\bar{S}+[g(q,t)-g(q_0,t_0)], \quad (48)$$

onde $\delta g=0$, uma vez que g é uma função que depende somente dos pontos inicial e final.

Usando-se as eqs. (6, 13), a eq. (48) poderá ser reescrita como:

$$\int L\,dt^*=\int\frac{\bar{L}}{as^2}dt^*+\int\frac{dg}{dt^*}dt^*, \quad (49)$$

o que implica:

$$L[Q(t^*),\dot{Q}(t^*),t]=\left(\frac{\bar{L}[\bar{Q}'(t^*)]}{as^2}\right)_{\bar{Q}'(t^*)=\frac{d}{dt^*}\left[\frac{1}{s(t^*)}[Q(t^*)-p(t^*)]\right]}+\frac{dg}{dt^*}. \quad (50)$$

Substituindo-se as equações (2, 5, 6, 10-13, 47) na eq. (50), virá:

$$\frac{dg}{dt^*}=\frac{d}{dt^*}\left[\frac{1}{2}(as\dot{s}\bar{Q}^2+as\dot{p}\bar{Q})+\frac{1}{2}ap\dot{p}+\frac{1}{2}\int^{t^*}p(t)c(t)dt\right]. \quad (51)$$

Agora, usando-se as equações (40, 41, 46-48, 51), a ação S terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(q,t;q_0,t_0)=&\frac{1}{2}\frac{(\bar{q}-\bar{q}_0)^2}{(\tau-\tau_0)}+\left[\frac{1}{2}(as\dot{s}\bar{q}^2-a_0s_0\dot{s}_0\bar{q}_0^2)+\right. \\ &\left.+(as\dot{p}\bar{q}-a_0s_0\dot{p}_0\bar{q}_0)+\frac{1}{2}(a_fp_f\dot{p}_f-a_0p_0\dot{p}_0)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}c(t')p(t')dt'\right]. \quad (52) \end{aligned}$$

Portanto, o propagador procurado será obtido usando-se as equações (32, 41, 52)[30]:

$$
\begin{aligned}
K(q_f, q_0; t_f, t_0) = & \left[\frac{M_0}{2\pi i\hbar s_f s_0(\tau - \tau_0)}\right]^{1/2} \cdot \\
& \cdot \exp\left(\left[\frac{1}{2}(a_f s_f \dot{s}_f \bar{q}_f^2 - a_0 s_0 \dot{s}_0 \bar{q}_0^2) + (a_f s_f \dot{p}_f \bar{q}_f - a_0 s_0 \dot{p}_0 \bar{q}_0) + \right.\right. \\
& \left.\left. \cdot \frac{1}{2}(a_f p_f \dot{p}_f - a_0 p_0 \dot{p}_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} c(t)p(t)dt + \frac{M_0}{2(\tau - \tau_0)}(\bar{q}_f - \bar{q}_0)^2\right]\right) .
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Conforme havíamos dito na introdução, verifica-se que a eq. (53) coincide com a eq. (19) e, portanto, os dois formalismos são equivalentes.

Referências

1. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
2. L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley, 1981.
3. J. H. Van Vleck, Proc. Nat. Acad. Sci., **14**, 178 (1928).
4. W. Pauli, *Ausgewahlte Kapitel Der Feldquantisierung*, Lectures Notes Zurich, 1952.
5. D. C. Khandekar, and S. V. Lawande, J. Math. Phys., **16**, 384 (1975); J. Math. Phys., **20**, 1870 (1979).
6. I. Moreira, Lett. N. Cim., **23**, 294 (1978).
7. A. D. Jannussis, G. N. Brodimas, and A. Streclas, Phys. Lett., **74A**, 6 (1979).
8. B. K. Cheng, Rev. Bras. Fis., **13**(1), 220 (1983a); Rev. Bras. Fis., **13**(2), 360 (1983b); Phys. Lett., **101**A(9), 464 (1984a); J. Math. Phys., **25**(6), 1804 (1984b); J. Phys. A: Math. Gen., **17**, 2475 (1984c); Phys. Lett., **110**A(7,8), 347 (1985a); Phys. Lett., **113**A(6), 293 (1985b); J. Math. Phys., **27**(1), 217 (1986a); Lett. Math. Phys., **14**, 7 (1987).
9. H. Kohl, and R. M. Dreizler, Phys. Lett., **98A**, 95 (1983); J. de Phys., **45**. c6-35 (1984).
10. C. C. Gerry, J. Math. Phys., **25**, 1820 (1984).
11. A. K. Dhara, and S. W. Lawande, Phys. Rev. **A30**, 560 (1984a); J. Phys., **A17**, 2423 (1984b).
12. G. Junker, and A. Inomata, Phys. Lett., **110A**, 195 (1985).
13. D. C. Khandekar, and S. V. Lawande, Phys. Rep., **137**(2,3), 116 (1986).
14. C. Farina de Souza, and A. S. Dutra, Phys. Lett., **123A**, 297 (1987).
15. J. M. F. Bassalo, L. C. L. Botelho, H. S. Antunes Neto, and P. T. S. Alencar, Rev. Bras. Fis., **19**, 598 (1989).
16. J. M. F. Bassalo, *Essays in Honour of Jayme Tiomno: Frontier Physics*, World Scientific, 1991.
17. J. M. F. Bassalo, and P. T. S. Alencar, Rev. Bras. Ens. Fis., **14**(1), 16 (1992).
18. J. M. F. Bassalo, 1992. CCEN/DF-PPP001.
19. A. B. Nassar, J. Math. Phys., **27**, 755 (1986).
20. A. B. Nassar, and R. T. Berg, Phys. Rev. **A34**, 2462 (1986).
21. A. B. Nassar, J. M. F. Bassalo, and P. T. S. Alencar, Phys. Lett., **113A**, 365 (1986).
22. A. B. Nassar, J. M. F. Bassalo, H. S. Antunes Neto, and P. T. S. Alencar, Il. N. Cim., **93A**, 195 (1986a); J. Phys. A: Math. Gen., **19**, L891 (1986b).
23. A. B. Nassar, Physica **141A**, 24 (1987).
24. J. R. Burgan, J. Gutierrez, A. Munier, E. Fijazkow, and M. R. Feix, Phys. Lett., **74A**, 11 (1979).
25. J. R. Ray, and J. L. Reid, J. Math. Phys., **38**, 91. (1926).
26. G. Wentzel, Z. Phys., **22**, 518 (1981).
27. H. A. Kramers, Z. Phys., **39**, 829 (1926).
28. L. Brillouin, Comp. rend., **183**, 24 (1926).
29. E. Pinney, Proc. Am. Math. Soc., **1**, 681 (1950).
30. J. M. F. Bassalo, 1992. *Métodos da Física Teórica IV*. EUFPA (mimeo).