

# Dependência Entre a Distância Percorrida, num Meridiano, e a Variação na Altura da Estrela Poláris

(Dependence between the distance traveled, along a meridian, and the  
variation of the height of the North Star)

Wilson Lopes

*Universidade de Guarulhos, Praça Tereza Cristina 01, 07020, Guarulhos, SP*  
*Universidade de Mogi das Cruzes, Caixa Postal 411, 08780, Mogi das Cruzes, SP*

Recebido para publicação em 16 de Janeiro de 1992; Revisado em 11 de Setembro de 1992  
Aceito para publicação em 8 de Janeiro de 1993

## Resumo

Estando-se a uma certa latitude, na superfície terrestre, que distância se deve percorrer sobre um meridiano, no rumo norte, para aumentar a altura da estrela Poláris, que se supõe localizada no eixo de rotação da Terra, de  $1^\circ$ ? Relacionam-se, neste trabalho as distâncias percorridas com os ângulos de latitude geocêntrica e de curvatura.

## Abstract

If we are located at certain latitude, on terrestrial surface, what distance have we to travel on a meridian, in the north direction, in order to increase the height of the North Star, which we assume located on the Earth's axis of rotation, of the  $1^\circ$ ? In this work we related the distances of this travel with the angles of geocentric latitude, and curvature.

## I. Introdução

Devido ao movimento de rotação em torno de seu eixo e de sua densidade, principalmente de suas camadas superficiais, um planeta apresenta um achatamento polar, de tal maneira que seu raio equatorial,  $a$ , é maior que seu raio polar,  $b$ <sup>[1]</sup>. Para a Terra, que gira em torno de seu eixo com período de cerca de 23h 56min 04s, seus meridianos apresentam, aproximadamente, forma elíptica, de semi-eixo maior  $a = 6,3781 \times 10^6$ m, que é seu raio equatorial, e semi-eixo menor  $b = 6,3568 \times 10^6$ m, que é seu raio polar, conforme a Figura 1<sup>[2]</sup>.

A estrela Polar ou, então, a Poláris, que é, atualmente, a estrela  $\alpha$  da constelação da Ursa Menor, é uma boa indicadora de posição e encontra-se, praticamente, no pólo norte celeste. Um viajante que estivesse sobre a linha do equador, veria a estrela Polar sobre a linha do horizonte. À medida que se deslocasse, sobre um

meridiano, no rumo norte, a estrela iria aumentando a sua altura. Quando atingisse o pólo norte, veria a Poláris com a altura de  $90^\circ$  (Neste trabalho faremos a suposição de que a Poláris se encontre, exatamente, no pólo norte celeste e desprezaremos os efeitos da refração atmosférica sobre as posições da estrela).

Se a Terra fosse perfeitamente esférica, a cada variação de  $1^\circ$ , na altura da estrela Polar, corresponderia sempre a mesma distância percorrida, pelo viajante, sobre um meridiano terrestre (uma variação na altura da Poláris corresponderia a uma igual variação de latitude). Sendo, contudo, a Terra achatada nos pólos, a cada variação de  $1^\circ$ , na altura da estrela, correspondem diferentes distâncias percorridas, sobre um meridiano. Suponha que, a partir da linha do equador, o viajante comece a viajar para o norte, sobre um meridiano. Quando a Poláris se elevar de  $1^\circ$ , acima do horizonte, a distância percorrida pelo viajante terá sido de 110,57km. A meio caminho entre o pólo norte e o

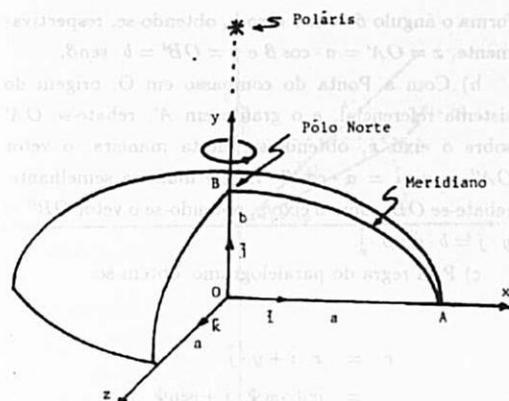


Figura 1. A Figura mostra a Terra, exageradamente, achatada nos pólos. Seus meridianos são de forma, aproximadamente, elíptica, apresentando semi-eixo maior  $a$  e semi-eixo menor  $b$ . Vê-se, também, a estrela Polar que se supõe, neste trabalho, localizada no eixo de rotação da Terra.

equador, a variação de  $1^\circ$ , na altura da estrela, corresponde a uma distância de 111,14km. Aproximando-se do pólo, para elevar a altura da estrela de  $89^\circ$  a  $90^\circ$ , terá percorrido e distância de 111,70km<sup>[3]</sup>.

## II. Uma equação para o raio de curvatura

A curva  $C$ , na Figura 2, pertence ao plano  $xOy$ . O vetor tangente à curva  $C$ , no ponto  $P$ , pode ser definido por:

$$d\hat{r}/d\beta = |d\hat{r}/d\beta| \cdot \hat{T}, \quad (1)$$

onde

$$\hat{T} = \cos \alpha \cdot \hat{i} + \sin \alpha \cdot \hat{j} \quad (2)$$

representa o vetor unitário, tangente à curva  $C$ , também no ponto  $P$ .

Derivando-se a expressão (1), em relação ao ângulo  $\beta$ , tem-se

$$d^2\hat{r}/d\beta^2 = |d^2\hat{r}/d\beta^2| \cdot \hat{T} + |d\hat{r}/d\beta| \cdot d\hat{T}/d\beta. \quad (3)$$

A derivada do vetor unitário tangente,  $\hat{T}$ , em relação a  $\beta$ , fornece:

$$d\hat{T}/d\beta = d\alpha/d\beta \cdot (-\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j}). \quad (4)$$

Pode-se provar que o vetor entre parênteses, na equação (4), representa o vetor  $\hat{N}$ , vetor unitário normal à curva no ponto  $P$ , da Figura 2, a saber:

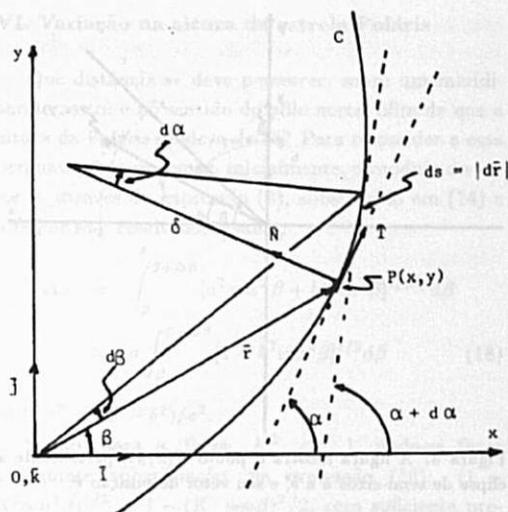


Figura 2. Vê-se a curva  $C$ , pertencente ao plano  $xOy$ ; o vetor de posição  $\hat{r}$ , do ponto  $P$ ; os vetores unitários  $\hat{T}$  e  $\hat{N}$ ; o raio de curvatura  $\delta$  e o ângulo  $d\alpha$ , correspondente ao comprimento de arco  $ds = |d\hat{r}|$ .

a) O vetor entre parênteses deverá ser unitário. De fato:

$$\begin{aligned} |(-\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j})| &= [(-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha]^{1/2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) O vetor entre parênteses deverá ter direção perpendicular a  $\hat{T}$ . Verifica-se este fato se o produto escalar entre eles for igual a zero. Efetuando-se o produto escalar, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{T} \cdot (-\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j}) &= (\cos \alpha \cdot \hat{i} + \sin \alpha \cdot \hat{j}) \cdot \\ & \quad (-\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j}) = 0. \end{aligned}$$

c) Finalmente, efetua-se o produto vetorial entre  $\hat{T}$  e o vetor entre parênteses. Se o resultado for o vetor  $\hat{k}$ , então, realmente, o vetor entre parênteses é o vetor  $\hat{N}$ . Efetuando-se o produto vetorial, obtém-se:

$$\hat{T} \times (-\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}$$

Conclui-se, portanto, que

$$\hat{N} = -\sin \alpha \cdot \hat{i} + \cos \alpha \cdot \hat{j}, \quad (5)$$

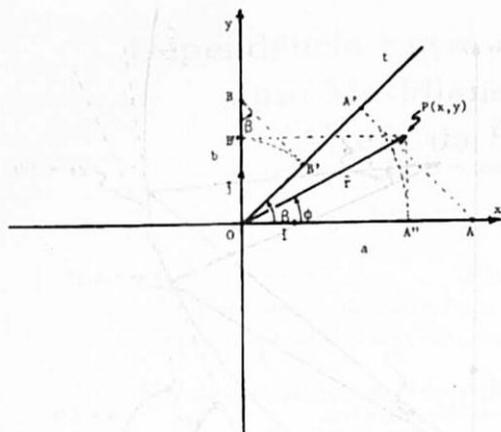


Figura 3: A figura mostra o ponto  $P(x, y)$ , pertencente à elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$ , e seu vetor de posição  $\vec{r}$ .

podendo-se escrever a (4) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d\hat{T}/d\beta &= da/d\beta \cdot \hat{N} \\ &= |d\vec{r}/d\beta| \cdot da/dr \cdot \hat{N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo-se (6) em (3), e levando-se em conta que  $da/dr = 1/\delta$ , onde  $\delta$  representa o raio de curvatura em  $P$ , tem-se:

$$d^2\vec{r}/d\beta^2 = |d^2\vec{r}/d\beta^2| \cdot \hat{T} + (|d\vec{r}/d\beta|^2/\delta) \cdot \hat{N}. \quad (7)$$

Efetuando-se o produto vetorial entre as expressões (1) e (7), tomando-se o módulo do resultado e explicitando-se tem-se:

$$\delta = |d\vec{r}/d\beta|^3 / |d\vec{r}/d\beta \times d^2\vec{r}/d\beta^2|, \quad (8)$$

que representa o raio de curvatura, da curva  $C$ , no ponto  $P$ <sup>[4]</sup>.

### III. Receita para se construir uma elipse com régua e compasso

Para se obter um ponto da elipse, de semi-eixo maior  $a$  e semi-eixo menor  $b$ , deve-se proceder da seguinte maneira:

a) Projetam-se o semi-eixo maior  $a$  e o semi-eixo menor  $b$ , perpendicularmente à direção da reta  $t$ , que

forma o ângulo  $\beta$  com o eixo  $x$ , obtendo-se, respectivamente,  $x = OA' = a \cdot \cos \beta$  e  $y = OB' = b \cdot \sin \beta$ .

b) Com a Ponta do compasso em  $O$ , origem do sistema referencial, e o grafite em  $A'$ , rebate-se  $OA'$  sobre o eixo  $x$ , obtendo-se, desta maneira, o vetor  $OA'' = x \cdot \hat{i} = a \cdot \cos \beta \cdot \hat{i}$ . De maneira semelhante, rebate-se  $OB'$  sobre o eixo  $y$ , obtendo-se o vetor  $OB'' = y \cdot \hat{j} = b \cdot \sin \beta \cdot \hat{j}$ .

c) Pela regra do paralelogramo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} \\ &= |\vec{r}|(\cos \Phi \cdot \hat{i} + \sin \Phi \cdot \hat{j}) \\ &= a \cdot \cos \beta \cdot \hat{i} + b \sin \beta \cdot \hat{j}, \end{aligned} \quad (9)$$

que representa o vetor de Posição do Ponto  $P(x, y)$ , pertencente à elipse de semi-eixos maior e menor, respectivamente,  $a$  e  $b$ .

Variando-se a inclinação da reta  $t$  e repetindo-se a receita acima pode-se construir uma elipse, ponto a ponto, com régua e compasso.

### IV. Raio de curvatura num ponto de um meridiano terrestre

O vetor de posição de um ponto  $P(x, y)$ , de um meridiano terrestre de forma, aproximadamente, elíptica, pode ser definido através de expressão (9), onde  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$  e  $\Phi$  são, respectivamente, o raio equatorial, o raio polar, a pseudolatitute e a latitude geocêntrica. Igualando-se os coeficientes desse vetor, obtém-se:  $\cos \beta = |\vec{r}| \cdot \sin \Phi / a$  e  $\sin \beta = |\vec{r}| \cdot \cos \Phi / b$ . Dividindo-se estas relações, vem:

$$tg \beta = (a/b) \cdot tg \Phi, \quad (10)$$

que relaciona a pseudolatitute com a latitude geocêntrica.

Sendo, para a Terra,  $a/b = 1,0034$ , pode-se assumir, praticamente, através da equação (10), a igualdade entre os ângulos de pseudolatitute e de latitude geocêntrica (A partir deste ponto, admitiremos  $\beta$  como sendo uma aproximação suficiente para a latitude geocêntrica, e passaremos a confundir  $\Phi$  com  $\beta$ .)

Derivando-se a expressão (9), em relação a latitude geocêntrica  $\beta$ , até a derivada de segunda ordem, obtém-se:

$$d\vec{r}/d\beta = -a \cdot \sin \beta \cdot \hat{i} + b \cdot \cos \beta \cdot \hat{j} \quad (11)$$

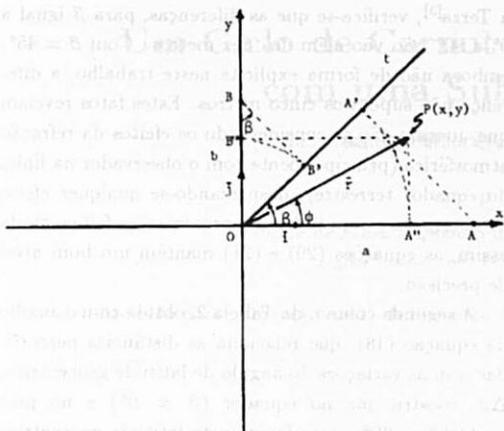


Figura 4: A figura mostra um meridiano terrestre, de forma elíptica, o vetor de posição  $\hat{r}$ , a latitude geocêntrica  $\beta$ , o raio de curvatura  $\delta$  e o ângulo de curvatura  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} d^2\hat{r}/d\beta^2 &= -a \cdot \cos\beta \cdot \hat{i} - b \cdot \sin\beta \cdot \hat{j} \\ &= -\hat{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

Levando-se em conta que

$$|d\hat{r}/d\beta| = [a^2 \cdot \sin^2\beta + b^2 \cdot \cos^2\beta]^{1/2} \quad (13)$$

$$|d\hat{r}/d\beta \times d^2\hat{r}/d\beta^2| = a \cdot b \quad (14)$$

substituindo-se em (8), obtém-se:

$$\delta = [a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta]^{3/2} / (a \cdot b) \quad (15)$$

que representa o raio de curvatura do meridiano terrestre, no ponto  $P$ , à latitude geocêntrica  $\beta$ .

## V. Relação entre os ângulos infinitesimais de latitude geocêntrica e de curvatura

Pode-se ver, através das figuras 2 e 4, que:

$$\begin{aligned} ds &= \delta \cdot d\alpha \\ &\approx |\hat{r}| \cdot d\beta. \end{aligned} \quad (16)$$

Desta maneira, a relação entre os ângulos infinitesimais de latitude geocêntrica e de curvatura é dada por:

$$\begin{aligned} d\beta/d\alpha &\approx \delta/|\hat{r}| \\ &\approx (a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)^{3/2} / [ab(a^2 \cos^2\beta + b^2 \sin^2\beta)^{1/2}] \end{aligned} \quad (17)$$

## VI. Variação na altura da estrela Poláris

Que distância se deve percorrer, sobre um meridiano terrestre e no sentido do pólo norte, afim de que a altura da Poláris se eleve de  $1^\circ$ ? Para responder a essa pergunta deve-se tomar, inicialmente, o módulo do vetor  $\hat{r}$ , através da expressão (9), substituí-lo em (14) e integrar-se o resultado, a saber:

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} [a^2 \cos^2\beta + b^2 \sin^2\beta]^{1/2} \cdot d\beta \\ &\approx a \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} [1 - k^2 \sin^2\beta]^{1/2} d\beta \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ .

Sendo, para a Terra,  $K^2 \ll 1$ , pode-se fazer a seguinte aproximação, na expressão (16):  $(1 - K^2 \sin^2\beta)^{1/2} \approx 1 - (K \cdot \sin\beta)^2/2$ , com suficiente precisão para o nosso caso. Obtendo-se, portanto

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx a \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} [1 - (K \cdot \sin\beta)^2/2] d\beta \\ \Delta s &\approx a \cdot \{ \Delta\beta - (K^2/4) \cdot [\Delta\beta - (1/2) \cdot (\sin^2\beta \cdot \cos^2\Delta\beta + \sin^2\Delta\beta \cdot \cos^2\beta - \sin^2\beta)] \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Pelo fato de ser  $\Delta\beta$  pequeno (da ordem de  $1^\circ$ , medido em radianos), são válidas as seguintes aproximações:  $\cos^2\Delta\beta \approx 1$  e  $\sin^2\Delta\beta \approx 2\Delta\beta$ . Desta maneira, a distância percorrida sobre um meridiano terrestre, será dada por:

$$\Delta s = a \cdot \Delta\beta [1 - (K \cdot \sin\beta)^2/2]. \quad (20)$$

Finalmente, levando-se em consideração que, para esses ângulos pequenos,  $\Delta\beta \approx \Delta\alpha \cdot \delta/|\hat{r}|$ , tem-se:

$$\Delta s \approx (a \cdot \delta \cdot \Delta\alpha/|\hat{r}|) \cdot [1 - (K \cdot \sin\beta)^2/2]. \quad (21)$$

Esta última equação responde à pergunta feita no início deste trabalho. Ela relaciona as distâncias percorridas, sobre um meridiano, para uma dada latitude geocêntrica, com as variações do ângulo de curvatura  $\Delta\alpha$ , que representa as variações na altura da Poláris.

## VII. Conclusões

Na Tabela 1,  $|\hat{r}|$ ,  $\delta$  e  $d\beta/d\alpha$  foram obtidos, respectivamente, com o auxílio das equações (9), (15) e (17). Para a latitude geocêntrica de  $0^\circ$ , o raio de curvatura é 42,5km menor que o raio equatorial terrestre, enquanto

que, para a latitude geocêntrica de  $90^\circ$ , o raio de curvatura é 42,7km maior que o raio polar. A quarta coluna, da Tabela 1, revela uma pequena diferença entre os ângulos infinitesimais de latitude geocêntrica e de curvatura: praticamente, a igualdade entre esses ângulos e, também, a igualdade entre o módulo do vetor de posição e o raio de curvatura, ocorrem na latitude de  $45^\circ$ . É importante, portanto, que se faça uma clara distinção entre esses dois ângulos infinitesimais.

Tabela 1

$\beta^\circ$	$ \vec{r}  \times 10^{-6}$ (m)	$\delta \times 10^{-6}$ (m)	$d\beta/d\alpha$
0	6,3781	6,3356	0,99333
10	6,3775	6,3375	0,99373
20	6,3756	6,3430	0,99488
30	6,3728	6,3515	0,99666
40	6,3693	6,3619	0,99884
50	6,3656	6,3730	1,0012
60	6,3621	6,3835	1,0033
70	6,3593	6,3920	1,0051
80	6,3574	6,3975	1,0063
90	6,3568	6,3995	1,0067

Tabela 2

$\beta^\circ$	$\Delta s$ (km)	$\Delta s^*$ (km)
0	111,32	110,58
10	111,31	110,61
20	111,26	110,71
30	111,23	110,86
40	111,17	111,04
50	111,10	111,23
60	111,04	111,41
70	110,99	111,56
80	110,96	111,68
90	110,95	111,69

A segunda e terceira colunas, da Tabela 2, foram contruídas, respectivamente, com o auxílio das equações (20) e (21); assumindo-se, nestas equações,  $\Delta\alpha = \Delta\beta = 1/57,296$  rad, que é equivalente a  $1^\circ$ . Com  $\beta = 0^\circ$ , a equação (21) fornece, para a distância percorrida sobre um meridiano, 110,58km. Com  $\beta = 90^\circ$ , a distância percorrida é de 111,89km. Comparando-se estes resultados com os do livro didático Investigando

a Terra<sup>[3]</sup>, verifica-se que as diferenças, para  $\beta$  igual a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  não vão além dos dez metros. Com  $\beta = 45^\circ$ , embora não de forma explícita neste trabalho, a diferença não supera os cinco metros. Estes fatos revelam que, mesmo não se considerando os efeitos da refração atmosférica (principalmente com o observador na linha do equador terrestre), desprezando-se qualquer efeito de aberração e com todas as aproximações feitas, ainda assim, as equações (20) e (21) mantêm um bom nível de precisão.

A segunda coluna, da Tabela 2, obtida com o auxílio da equação (18), que relaciona as distâncias percorridas com as variações do ângulo de latitude geocêntrica,  $\Delta\beta$ , mostra que no equador ( $\beta = 0^\circ$ ) e no pólo norte ( $\beta = 90^\circ$ ), a cada grau de latitude geocêntrica norte, caminha-se, sobre um meridiano, respectivamente, 111,32km e 110,95km. Estes resultados são discordantes da referência citada acima (Daí, então, a cada grau de latitude geocêntrica, que se caminha sobre um meridiano, não faz variar a altura da Poláris de  $1^\circ$ ).

Estes resultados mostram, portanto, que a altura da Poláris está relacionada com o ângulo de curvatura. Pode-se dizer: variação de um grau no ângulo de curvatura, caminhando-se no sentido norte e sobre um meridiano, faz a altura da Poláris se elevar de  $1^\circ$ .

## Referências bibliográficas

1. W. Lopes, Revista de Ensino de Física, vol. 11, Dezembro de 1989.
2. F. D. Stacey, *Physics of the Earth*, John Wiley & Sons, Inc., 1977 (Os raios equatorial e polar, da Terra, foram assumidos de acordo com esta referência).
3. R. E. Bisque, R. L. Heller, e outros, Investigando a Terra (Earth Science Curriculum Project - E.S.C.P.), McGraw - Hill, Vol. 1, pg. 64, 1973.
4. M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, Schaum Publishing, 1967 (Embora não de maneira explícita, na referência, a equação (8) foi obtida a moda de um livro de Mecânica. Observe que, na equação (1), se a derivada fosse em relação ao tempo teríamos o vetor velocidade da partícula).