

Espaço de Fase do Pêndulo Físico Não Linear: Experimento e Integração Numérica

(Phase space of the non-linear physical pendulum: experiment and numerical integration)

A. S. C. Esperidião*, G. P. Guedes* K. Weltner** e R. F. S. Andrade*

* Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

Campus da Federação, 40210-340, Salvador, BA, Brasil

** Institut für Didaktik der Physik, Johann Wolfgang Goethe Universität

D-6000, Frankfurt am Main, República Federal da Alemanha

Recebido para publicação em 03 de Setembro de 1991; Reformulação recebida em 18 de Maio de 1992

Acceto para publicação em 03 de Julho de 1992

Resumo

Neste trabalho exploramos um pêndulo físico acoplado a uma fonte excitadora externa. Através de uma célula foto-elétrica geramos uma corrente que depende da posição do pêndulo, e em um circuito derivador obtemos outro sinal que informa sua velocidade. Em um osciloscópio comum exibimos as órbitas do sistema no espaço de fase. Quando a amplitude da fonte externa é pequena reproduzimos as curvas conhecidas do oscilador harmônico forçado. Aumentando-se esta conseguimos passar a uma região não linear, onde se observam regimes de biestabilidade e caótico. Simulamos o modelo e integramos numericamente as equações do movimento em um programa simples, executável em um microcomputador tipo PC, e comparamos qualitativamente as órbitas com as mostradas no osciloscópio.

Abstract

We explore a physical pendulum coupled to an external periodic force. A photocell is used to generate an electric current which depends upon the position of the pendulum. A deriving RC circuit furnishes the pendulum velocity. Both signals are put into an oscilloscope, showing the trajectories in the phase space. When the amplitude of the external force is small we reproduce the known curves of the forced harmonic oscillator. Increasing the force leads us to the non-linear region, where bi-stability and chaotic phenomena are observed. We present a model for the system and integrate the equations of motion in a microcomputer. The orbits can be qualitatively compared with those displayed in the oscilloscope.

I. Introdução

É sempre importante demonstrar através de experimentos simples o conhecimento adquirido nas aulas teóricas. Além disso é oportuno estender esse conhecimento, incorporando assuntos correlatos que não são normalmente cobertos nos currículos regulares, embora sejam relevantes e, muitas vezes, de grande atualidade. Atentando a estes dois aspectos apresentamos nesse trabalho um programa integrado que consiste em estudar um pêndulo físico não linear acoplado a uma fonte excitadora externa. Com isso buscamos conseguir dois

objetivos: i) facilitar o aluno a apreensão do conceito de espaço de fase; ii) introduzir noções de dinâmica não linear. O conceito de espaço de fase é geralmente apresentado nas aulas teóricas dos cursos introdutórios de mecânica, sendo de difícil percepção para a maioria dos alunos¹. Acreditamos que o entendimento desse conceito pode ser facilitado se o aluno visualizar simultaneamente um sistema físico e sua trajetória no espaço de fase. Assim, para alcançar o nosso primeiro objetivo consideramos um pêndulo físico excitado por uma força externa. Usamos também uma célula fotoelétrica e um circuito derivador, que geram sinais dependentes

da posição e velocidade do pêndulo. Com estes sinais fazemos traçar diretamente na tela de um osciloscópio tanto posição e velocidade do pêndulo em função do tempo bem como velocidade em função de posição, explicitando assim sua trajetória no espaço de fase.

Para o segundo objetivo o sistema estudado se presta de maneira bastante adequada. Como normalmente o pêndulo linear forçado é visto no tópico de oscilações do curso básico de mecânica^{1,2}, conseguimos de forma muito satisfatória passar de uma etapa em que se busca sedimentar conhecimentos adquiridos sobre os fundamentos da física das oscilações para outra, introduzindo elementos de dinâmica não linear, verificando o aparecimento de biestabilidade e transição entre os regimes regular e caótico do sistema.

Do ponto de vista matemático a existência destes estados é possível, já que o sistema obedece a uma equação do movimento inhomogênea não linear³⁻⁶.

Veremos que com uma escolha adequada dos parâmetros do sistema pode-se encontrar seus estados caóticos. Esta mudança no comportamento do modelo, percebida através de sua observação, pode ser também usada para ilustrar o conceito de espaço de fase, exemplarmente mostrado pelas figuras qualitativamente diferentes das do regime periódico na tela do osciloscópio. Para completar esta introdução aos fenômenos não lineares procedemos à integração numérica das equações do movimento. Através de rotinas simples esta integração pode ser feita em microcomputadores.

A parte do estudo do comportamento não linear do pêndulo é bastante oportuna por dois motivos. Primeiro a pesquisa de fenômenos não lineares assumiu uma grande importância em quase todos os segmentos da física e de outras ciências, sendo portanto importante levar alguns conhecimentos sobre este assunto aos alunos de graduação. Em segundo lugar é fascinante ver um simples pêndulo realizar um movimento completamente aleatório, com uma simples variação da frequência ou da amplitude da força externa aplicada. Isto serve para mostrar que fenômenos complexos podem ser originados por modelos bastante simples, desde que não lineares. Nos últimos anos tem havido uma série de trabalhos com o aparecimento de caos em circuitos eletrônicos que modelam um pêndulo^{7,8}. No entanto a utilização do próprio pêndulo físico torna, a nosso ver, a visualização dos fenômenos não lineares mais direta.

Na próxima seção apresentamos o arranjo experimental. Na seção III uma discussão dos resultados obtidos experimentalmente, e na seção IV discutimos a derivação das equações do movimento e os resultados obtidos do ponto de vista numérico.

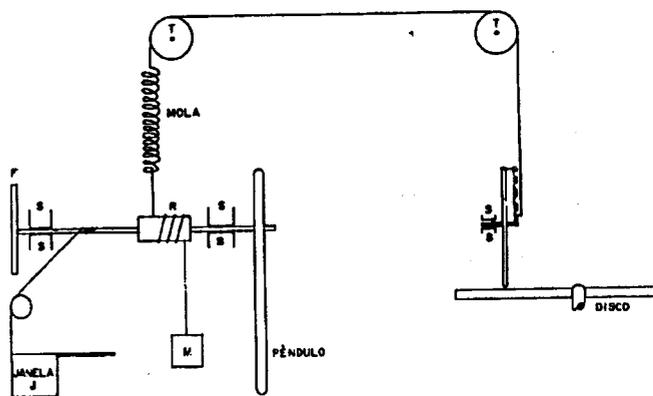
II. Aparelho Experimental

Vamos apresentar nos itens seguintes as partes constituintes do equipamento, quais sejam: mecânica,

óptica e eletrônica.

i) Parte Mecânica

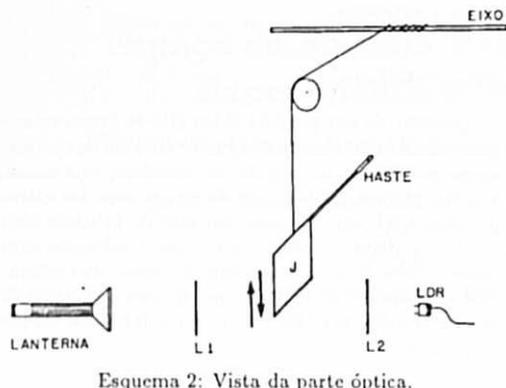
Consiste de um pêndulo físico (P) de forma retangular, construído com uma régua de 15,0 cm de comprimento por 1,8 cm de largura, de alumínio, cuja massa é de 5,5 gramas. A distância do eixo a uma das extremidades é 6,5 cm. Usamos um raio de bicicleta com 0,2 cm de diâmetro para o eixo, que é colocado num suporte como mostra o esquema 1. Nesse eixo colocamos algumas voltas de fita crepe, R, com o objetivo de aumentar o diâmetro até 0,6 cm, para dar maior torque ao pêndulo.



Esquema 1: Vista lateral da configuração do aparato experimental.

No ressalto R, enrolamos duas voltas de um fio de nylon, e na extremidade inferior desse fio, colocamos uma massa de 80 gramas. A extremidade superior é ligada a uma mola, de constante elástica $K = 20 \text{ N/m}$, que é posteriormente ligada a um dispositivo, que é capaz de variar a amplitude e a frequência da força aplicada.

O dispositivo excitador é composto de um toca disco (33, 45 e 75 rpm), que pode ser deslocado para direita e para esquerda, permitindo variar a frequência de uma roda, que gira na vertical sobre o toca disco. Nessa roda existe uma chapinha de acrílico com furos e assim podemos variar a amplitude da força aplicada. No eixo enrolamos um outro fio de nylon, que tem na sua extremidade inferior uma cartolina (janela), a qual será usada para variar o fluxo de fótons que incidirá na célula fotoelétrica (LDR). Ainda nessa janela fixamos uma haste cuja extremidade é apoiada em um suporte. Este procedimento visa apenas dar estabilidade ao movimento da janela. Na parte traseira do eixo fixamos com uma fita adesiva uma tira de papel ($\approx 2 \times 20 \text{ cm}$) que funciona como um freio de ar (F) para controle do atrito. A estabilidade do papel é aumentada se os cantos são dobrados. Neste diagrama S e T representam os suportes fixos e as roldanas respectivamente. O sistema tem uma auto-frequência de 1,12 Hz.



Esquema 2: Vista da parte óptica.

ii) Parte Ótica

Formada conforme diagrama abaixo, é constituída de uma lanterna (duas pilhas 1,5 V), a qual gera um fluxo de fótons, e esse é variado conforme a frequência do pêndulo, através da janela (J), L é uma lente do tipo convergente colocada entre o LDR e a lanterna.

iii) Parte Eletrônica

As oscilações do pêndulo fazem com que a janela (J) execute um movimento vertical com mesma frequência. Esse movimento da janela provocará modulações no feixe de fótons que chega ao LDR. Assim a posição da janela (e do pêndulo) será indicada pela tensão nos terminais do LDR. Usamos um circuito RC⁹ para tomarmos a derivada do sinal, ou seja a velocidade da oscilação. Finalmente, dois amplificadores operacionais (do tipo LM741) fazem a amplificação dos sinais da posição e velocidade para posterior exibição na tela do osciloscópio. Abaixo desenhamos o circuito RC utilizado.

Notamos que o aparato experimental é bastante simples podendo ser montado sem muito esforço com peças convencionais encontradas em laboratórios didáticos de física básica. Isto tem, a nosso ver, um aspecto importante de demonstrar para os estudantes que os conceitos aparentemente abstratos tais como espaço de fase e efeitos não-lineares e caóticos são materializados a partir de equipamentos simples que os mesmos estão acostumados a usar nas aulas de laboratório.

III. Resultados Experimentais

III.a) Movimento do Pêndulo

Uma vez montado o nosso aparato ligamos a força excitadora e observamos o comportamento do pêndulo bem como a correspondente imagem no espaço de fase na tela do osciloscópio. Para estudarmos a dependência do movimento do pêndulo com relação à frequência f da fonte excitadora variamos a posição radial da roda de

borracha vertical que gira sobre o tocadisco. Movendo-a do centro para extremidade fizemos uma varredura do regime de baixas para altas frequências. Mantendo constante a amplitude da força excitadora F_0 , medimos a amplitude do pêndulo para cada valor da frequência externa. Mostramos na Figura 1 esses resultados para amplitude F_0 da força aplicada (amplitudes 0,25 e 0,5 cm).

Notamos que quando F_0 é pequena a forma da curva é semelhante às curvas obtidas para o oscilador linear, porque para esses valores da amplitude da força externa o pêndulo comporta-se de forma linear.

Com um aumento da frequência para pequenas amplitudes, um máximo da amplitude é observado na região da auto-frequência; continuando a aumentar a frequência esta amplitude vai diminuindo.

Este é um resultado esperado^{2,3}, já que a força de atrito presente no sistema (γ) é apreciável, fazendo com que, mesmo na ressonância, a amplitude do pêndulo seja pequena (abaixo de 45°), levando a um comportamento tipicamente linear.

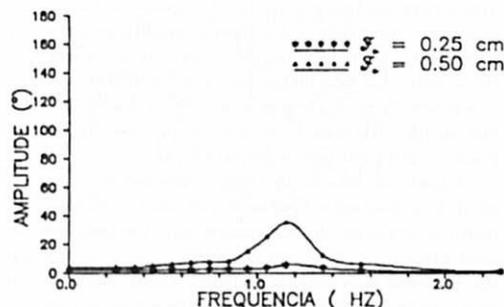


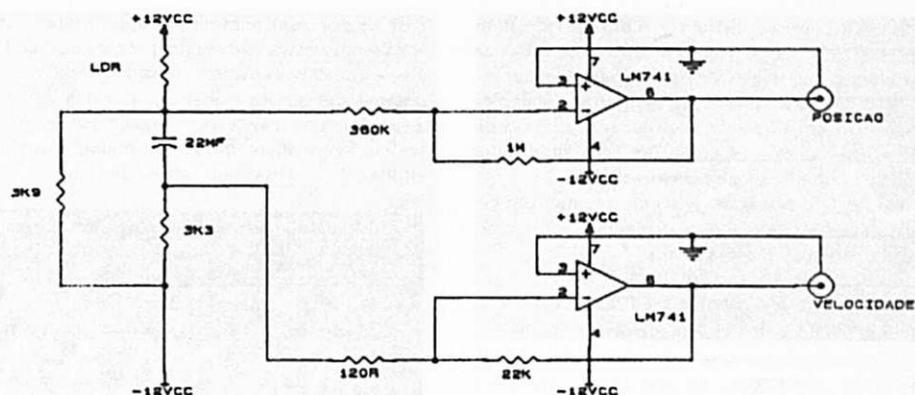
Figura 1: Amplitude versus frequência, obtida experimentalmente para pequenos valores da força externa ($F_0 = 0,25$ e $0,5$ cm.)

A seguir aumentamos a força aplicada usando os furos da placa de acrílico, com amplitudes de 2,5 e 3 cm. Os resultados são mostrados na Figura 2.

Neste caso quando começamos a variar lentamente a partir de frequências baixas, a amplitude do pêndulo aumenta com a frequência, até atingir o valor de 180°, iniciando o regime caótico.

Na figura limitamos o valor da amplitude 180°, de forma que o patamar para o valor mais alto de F_0 indica apenas que a amplitude é maior para este valor. Na realidade, uma observação do comportamento do pêndulo com relação ao tempo revela uma alteração: o movimento periódico verificado quando F_0 é pequeno cede lugar a um comportamento caótico.

Agora o pêndulo se comporta de maneira aperiódica e imprevisível: em alguns instantes aparenta ter um movimento periódico para logo em seguida alterar brusca-mente sua frequência, girando algumas vezes em torno



Esquema 3: Circuito referente a parte eletrônica.

do seu eixo e em seguida realizar novas oscilações, sem que se note qualquer regularidade no número de oscilações ou de giros completos em torno do eixo.

Nós podemos atingir o regime caótico também começando com frequências bem altas onde são observadas oscilações regulares do pêndulo. Diminuindo a frequência as amplitudes aumentam até atingir 180° , dando início o regime caótico.

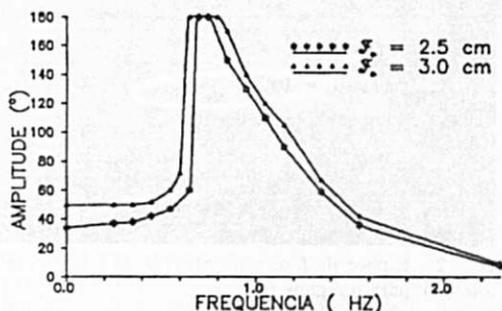


Figura 2: Amplitude versus frequência, obtida experimentalmente para grande valores da força externa ($F_0 = 0.25$ e 0.5 cm).

Por último usamos as forças intermediárias, furos com amplitudes de 1.0 até 2.0 cm, e os ruídos estão mostrados na Figura 3.

Neste caso aparecem as regiões de biestabilidade e as oscilações dependem do modo com que variamos a frequência.

A) Começando com frequências baixas a amplitude aumenta lentamente com frequência até atingirmos f_1 onde a amplitude aumenta bruscamente para um novo valor bem mais alto. Continuando a aumentar a frequência observa-se que a amplitude diminui.

B) Começamos de novo com uma frequência bem alta e diminuindo lentamente o seu valor nós observamos os mesmos valores da amplitude como antes. Porém isto não ocorre com frequências logo abaixo de f_1 : as amplitudes continuam crescendo até uma frequência $f_2 < f_1$ onde a estabilidade do estado de grande amplitude do pêndulo acaba e depois de um estado transiente a amplitude diminui até o mesmo valor já descrito no item A)

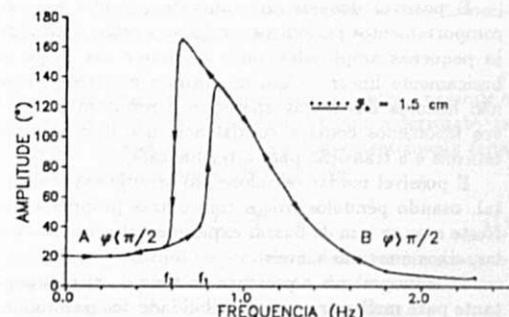


Figura 3: Amplitude versus frequência, obtida experimentalmente para um valor intermediário da força externa ($F_0 = 1.5$ cm). A frequência é variada lentamente no sentido crescente e decrescente, mostrando a região de biestabilidade entre f_2 e f_1 .

A região entre f_2 e f_1 é a região de biestabilidade³⁻⁶. Aqui coexistem dois regimes com oscilações periódicas estáveis com a mesma frequência porém com amplitudes e fases diferentes. O comportamento descrito nos itens A e B permitem, assim, identificar um loop de histerese na amplitude e fase do pêndulo.

Neste intervalo a oscilação do pêndulo depende dos valores iniciais. Fazendo os experimentos é possível de

progredir uma maneira distinta e reproduzível: Para isto é necessário começar com frequências bem baixas ou bem altas e variar as frequências muito vagarosamente. Também é necessário se manter as oscilações bem simétricas em torno da posição de equilíbrio do pêndulo. Sem simetria as oscilações com amplitudes acima de 90° tem a tendência de virar caóticas.

Abaixo de f_2 e acima de f_1 só um regime com oscilações estáveis é observado. No regime da curva A, a fase ϕ da oscilação começa com $\phi(f=0) = 0$ e fica abaixo de $\pi/2$. No regime da curva B a fase de oscilação começa com $\phi(f=\infty) = \pi$ e fica acima de $\pi/2$. A figura 4 explicita todos os três regimes possíveis

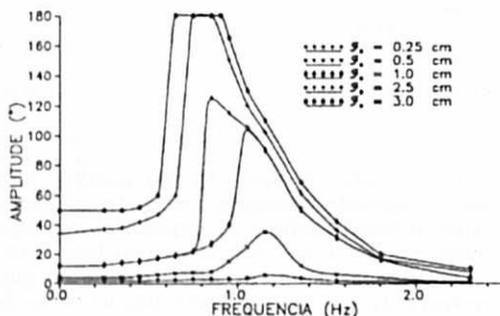


Figura 4: Amplitude versus frequência, obtida experimentalmente mostrando os vários regimes observados.

É possível demonstrar com este pêndulo que os comportamentos periódicos e regulares estão limitados às pequenas amplitudes, onde o caráter das forças é basicamente linear. Com amplitudes maiores efeitos não lineares das forças aparecem e resultam em novos fenômenos como a coexistência dos dois regimes estáveis e à transição para o regime caótico.

É possível mudar os valores do arranjo experimental, usando pêndulos físicos com outras propriedades. Neste caso se tem de buscar experimentalmente as molas, eixos e massas viáveis.

Salientamos que a presença do freio de ar é importante para melhorar a reprodutibilidade dos resultados. Sem ele a tendência é a de se atingir mais rapidamente o regime caótico, além de aumentar a região de biestabilidade. Para demonstrar mais claramente os efeitos de biestabilidade (amplitude e sobretudo as diferenças nas fases de cada um dos modos estáveis) podemos sofisticar o arranjo, usando dois pêndulos iguais ligados à mesma fonte externa.

III.b) Visualização do Espaço de Fase

Para facilitar a apreensão do conceito de espaço de fase fazemos traçar os sinais gerados pelo LDR na tela de um osciloscópio. Em seguida fotografamos estes sinais e apresentamos nas fotos 1-6 os comportamentos típicos que podem ser observados. Como o osciloscópio

é do tipo comum, sem memória, foi preciso fazer os fotos com o obturador aberto para o registro temporal. Primeiramente mostramos o comportamento regular do sistema, em registros de posição contra tempo na Foto 1 e também da trajetória no espaço de fase na Foto 2. A trajetória é evidentemente sinusoidal, levando à forma elíptica da trajetória no espaço de fase.

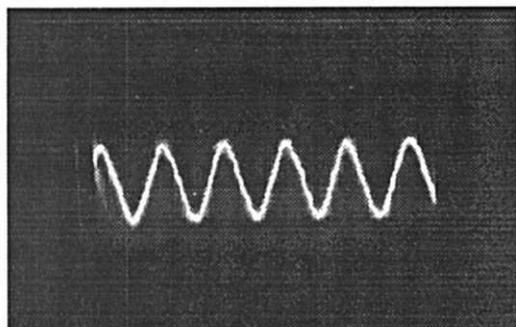


Foto 1 - Evolução temporal da amplitude do pêndulo visto através da tela do osciloscópio, para o regime regular.



Foto 2 - Espaço de fase visto através da tela do osciloscópio, para o regime regular.

Os sinais do regime de biestabilidade estão mostrados nas Fotos 3 e 4. Estas fotos foram realizadas usando a técnica de sobreexposição. Assim evita-se registrar a passagem de um estado estável para outro. Na Foto 3 mostramos, as duas posições estáveis com relação ao tempo. À parte do comportamento regular mostramos que o sinal do regime de pequena amplitude e sinusoidal como o mostrado na Foto 1. No entanto a forma do sinal do regime de maior amplitude é distorcido com relação a senoide, o que é típico de oscilações não lineares.

O registro dos dois sinais no espaço de fase está na Foto 4, caracterizada pela existência de duas curvas fechadas. Evidencia-se com esta foto que efeitos não lineares não conduzem necessariamente ao regime

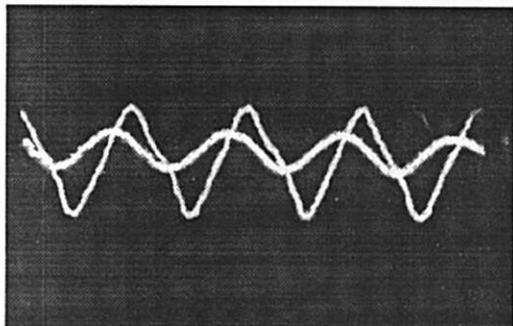


Foto 3 - Evolução temporal da amplitude do pêndulo visto através da tela do osciloscópio, para o regime biestável.



Foto 4 - Espaço de fase visto através da tela do osciloscópio, para o regime biestável.

caótico. Os sinais do comportamento caótico estão mostrados nas Fotos 5 e 6. Inicialmente cabe explicar o que ocorre quando a amplitude da oscilação cresce muito. Neste caso a janela que controla o feixe de luz que atinge a célula fotoelétrica é levada a posições que a encobrem ou descobrem totalmente. Neste dois casos, qualquer movimento do pêndulo e conseqüentemente da janela é impossível de ser registrado pelo osciloscópio. Por isso tivemos a preocupação de fotografar regimes caóticos que não tinham muitas voltas em torno do eixo. Todas as fotos deste regime têm um caráter totalmente irregulares e distinto dos anteriores. A Foto 5 é um registro da posição contra o tempo, ao passo que a Foto 6 é um registro do espaço de fase.

IV - Modelo Teórico

i) Descrição do Sistema

O nosso sistema é formado por dois sub-sistemas (massa-mola e pêndulo físico) acoplados através da condição de não deslizamento do fio do sistema massa-mola sobre o eixo do pêndulo. Este vínculo faz com que haja apenas um grau de liberdade que pode ser a

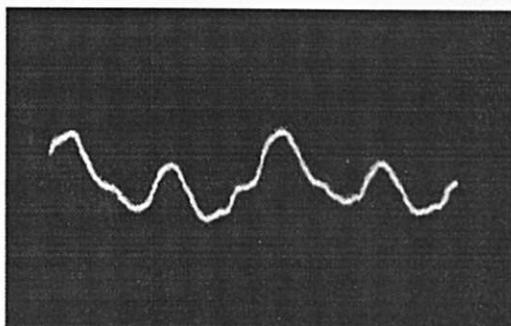


Foto 5 - Evolução temporal da amplitude do pêndulo visto através da tela do osciloscópio, para o regime caótico.



Foto 6 - Espaço de fase visto através da tela do osciloscópio, para o regime caótico.

posição da massa ou o ângulo formado entre o pêndulo e a vertical. Devido à presença do vínculo a derivação da equação do movimento é mais convenientemente feita com o auxílio da função de Lagrange

$$L = T - V \quad (1)$$

onde T e V indicam respectivamente os termos da energia cinética e potencial. A partir do diagrama do modelo chega-se a:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

onde m representa a massa, x a sua posição, I é o momento de inércia do pêndulo (incluindo o seu eixo) e θ é o ângulo que o mesmo faz com a vertical.

A energia potencial é composta de três contribuições:

$$V = -m_p g \frac{\ell - 2d}{2} \cos \theta + mgx + \frac{1}{2}k(\bar{A} \sin \omega t - x)^2 \quad (3)$$

O primeiro termo representa a energia potencial do pêndulo físico, que se trata de uma haste retangular uniforme, de comprimento ℓ , presa ao eixo a uma

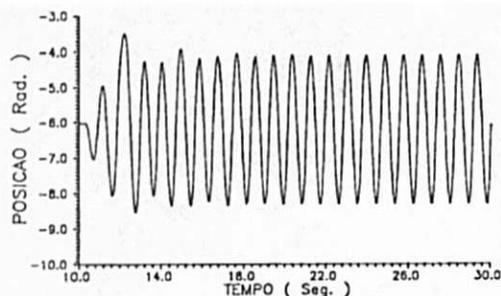


Figura 5: Evolução temporal da amplitude do pêndulo obtida via integração numérica (Runge-Kutta) para o regime regular.

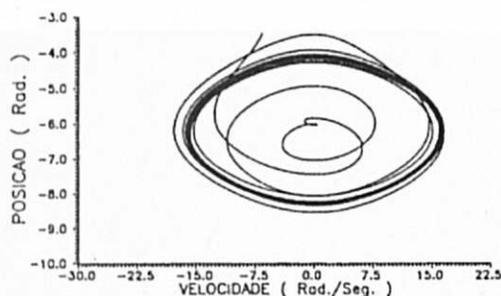


Figura 6: Espaço de fase para o regime regular obtido via integração numérica (Runge-Kutta).

distância d de sua extremidade. Assim $\ell - 2d/2$ representa a distância de seu centro de gravidade ao eixo. O segundo termo é apenas a energia potencial gravitacional da massa. O terceiro termo representa a energia potencial elástica da mola, cujas extremidades inferior e superior foram deslocadas, respectivamente, para baixo de uma distância x e para cima de uma distância mediada pela força externa e expressa por $\bar{A} \sin \omega t$.

O vínculo entre a corda de nylon e o eixo do pêndulo é expresso por:

$$x = r(\theta + \bar{\theta}), \quad (4)$$

onde r é o raio do eixo, e $\bar{\theta}$ é um valor constante que será usado para simplificar as equações do movimento. Introduzindo (2), (3) e (4) em (1), obtemos a seguinte expressão para L :

$$L = \frac{1}{2} [mr^2 + I] \dot{\theta}^2 - m_p g \frac{\ell - 2d}{2} \cos \theta + mgr(\theta + \bar{\theta}) + \frac{1}{2} k(\bar{A} \sin \omega t - r(\theta + \bar{\theta}))^2 \quad (5)$$

A equação do movimento para θ é então:

$$\ddot{\theta} + \eta \sin \theta + \frac{1}{T_1} (mgr + kr(r(\theta + \bar{\theta}) - \bar{A} \sin \omega t)) = 0 \quad (6)$$

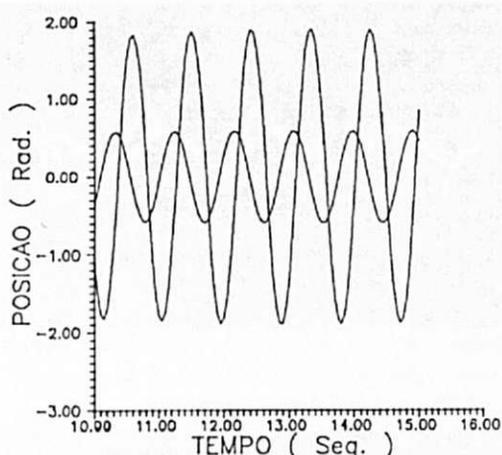


Figura 7: Evolução temporal da amplitude do pêndulo obtida via integração numérica (Runge-Kutta) para o regime de biestabilidade.

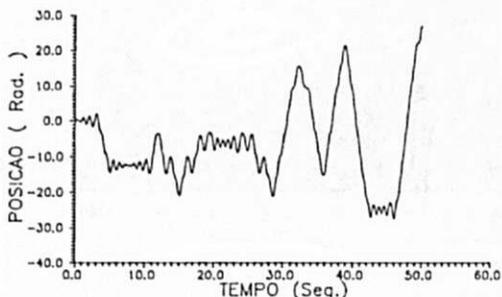


Figura 9: Evolução temporal da amplitude do pêndulo obtida via integração numérica (Runge-Kutta) para o regime caótico.

onde $\eta = \frac{1}{2I_1} m_p g (\ell - 2d)$ e $I_1 = mr^2 + I$. Fazemos então uso de $\bar{\theta}$ para anular o termo constante. Finalmente observando que, apesar do atrito do eixo ser constante, o atrito causado pelo freio de ar é bem aproximado por um termo $\gamma \dot{\theta}$, introduzimos fenomenologicamente este termo em (6) para obtermos:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta + \eta \sin \theta = A \sin \omega t \quad (7)$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{kr^2}{I_1}, \quad A = \frac{kr\bar{A}}{I_1}, \quad \text{e } \bar{\theta} = -\frac{mg}{kr}.$$

A equação (7) é uma generalização daquela do oscilador harmônico forçado para regiões de grande amplitudes, onde a aproximação $\sin \theta \simeq \theta$ deixa de ser válida. Ela é portanto uma equação não linear dependendo explicitamente do tempo e admite a presença de

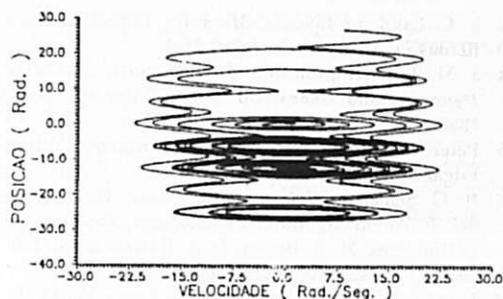


Figura 10: Espaço de fase para o regime caótico obtido por integração numérica (Runge-Kutta).

soluções regulares e caóticas, a depender dos valores dos parâmetros nela contidos. Na próxima seção vamos reportar sobre a diversidade de soluções obtidas, tanto do ponto de vista experimental como através da integração numérica da equação acima.

ii) Integração das equações do movimento

Embora a Eq.7 não possa ser integrada exatamente, podemos facilmente usar rotinas de integração numérica para obtermos as trajetórias geradas por ela. Usamos uma rotina Runge-Kutta-Gill, onde o erro introduzido é proporcional a Δt^4 (Δt indica o passo de integração)¹⁰⁻¹¹. Esta rotina pode ser implantada em microcomputadores usando qualquer linguagem, tal como: Fortran, Basic ou Pascal.

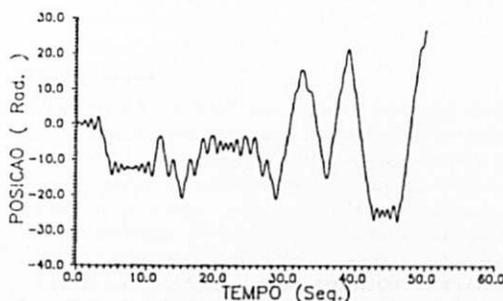


Figura 9: Evolução temporal da amplitude do pêndulo obtida via integração numérica (Runge-Kutta) para o regime caótico.

A única alteração necessária para o uso da rotina consiste em transformar a Eq.7 em um sistema de duas equações de primeira ordem, o que é conseguido através da introdução de uma nova variável $\phi = \dot{\theta}$. Com isto obtemos o seguinte sistema:

$$\dot{\theta} = \phi$$

$$\dot{\phi} = -\gamma\phi - \omega_0^2\theta - \eta \sin(\theta) + A \sin(\omega t) \quad (8)$$

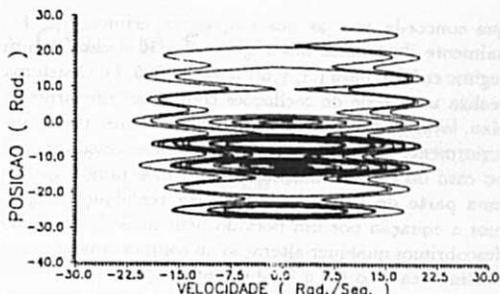


Figura 10: Espaço de fase para o regime caótico obtido por integração numérica (Runge-Kutta).

A integração numérica informa diretamente os valores de θ e ϕ como função do tempo, e traçando-se os pontos no plano $\theta\phi$ obtemos diretamente as trajetórias no espaço de fase do sistema, que podem ser comparadas as figuras observadas na tela do osciloscópio.

A Eq. 7 com $\omega_0 = 0$ tem sido bastante estudada em conexão com o aparecimento de caos em sistema não lineares de baixa dimensionalidade. Ele apresenta um padrão bastante rico, com estados periódicos, caóticos, coexistência de distintos atratores periódicos, coexistência de caos e movimento periódico, etc. No nosso modelo aparece ainda um termo linear em ω_0^2 devido à mola que faz parte do aparato experimental. Sua presença altera a frequência própria de oscilação para pequenas amplitudes mas não altera de maneira significativa a riqueza de regiões periódicas e caóticas. No entanto não é nossa intenção a de apresentar uma investigação exaustiva de todos os regimes e situações possíveis que são originadas por esta equação, mas a de complementar e ilustrar os resultados obtidos pela experiência. Para isto mostramos curvas da posição versus tempo bem como curvas do espaço de fase obtidas para valores distintos de \bar{A} , γ e ω . Os valores dos parâmetros que aparecem no sistema foram determinados a partir da massa, mola, e pêndulo usado na experiência. O valor de γ foi estimado a partir das oscilações livres, mas não é muito preciso. Por isso nos permitimos variar seu valor na integração numérica das equações. Os valores de \bar{A} e ω , variáveis no experimento, serão também aqui usados para obtermos os diferentes regimes.

Nas Figuras 5 e 6 mostramos primeiramente o regime regular onde $(\bar{A}, \gamma, \omega) = (1, 0.0085, 7)$. Vemos que após um transiente o sistema se estabiliza em órbita fechada. Nas Figuras 7 e 8, $\bar{A}, \gamma, \omega = (5, 0.85, 6.87)$, mostramos o caso típico de biestabilidade, que é observado na região de ressonância. Notamos que a evolução temporal, após um transiente, apresenta um comportamento regular, caracterizada pelas órbitas fechadas da Fig. 8. A trajetória será atraída por um ou outro ciclo limite a depender das condições iniciais, no

que concorda com as observações experimentais. Finalmente ilustramos nas Figuras 9 e 10 o caso de um regime caótico para $(\bar{A}, \gamma, \omega) = (5, 0.0085, 7)$. O sistema realiza uma série de oscilações completas em torno do eixo, levando à situações semelhantes às discutidas anteriormente para o experimento. Cabe ressaltar que no caso do comportamento caótico mostramos apenas uma parte do registro obtido. Na realidade integramos a equação por um período bem mais longo e não descobrimos qualquer alteração no comportamento, que continua caótico até o final da integração.

Enfim este experimento ilustra de forma bastante rica aspectos formais da mecânica clássica que tem sido abordados com frequência por diversos pesquisadores, de uma forma extremamente simples e didática.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Profa. Judite Miranda por todo apoio dispensado. O Prof. K. Weltner agradece o apoio financeiro do DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) e GTZ (Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit). A.S.C. Esperidião e R.F.S. Andrade tem o apoio financeiro do CNPq.

Bibliografia

1. H. Moisés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, Vol. 2, Cap. 4 Ed. Edgard Blücher Ltda. 2a. Reimpressão 1987.
2. Robert Resnick e David Halliday, *Física I*, vol. 2, cap. 15 Ed. Ao Livro Técnico, 2a. Edição 1973.
3. L. D. Landau e Lifchitz, *Mecânica*, Cap. 5, Editora Hemus.
4. J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Ed. John Wiley and Sons, 1986.
5. Peter Hagedorn, *Oscilações não-lineares*, Editora Edgard Blücher Ltda - 1984.
6. H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Verlagsgesellschaft Weinheim, Basel - Cambridge, 1988(7) - D. D'Humieres, M. R. Bealey, B. A. Huberman e A. Libchaber, *Phys. Rev. A* **26**, 3483 (1982).
8. Peter Lais, *Revista de Ensino de Física* Vol.11, 30 Dez-89.
9. R. A. Lando e S. R. Alves, *Amplificador Operacional*, Ed. Erica, 4a. Edição 1986.
10. William E. Boyce e Richard C. Dippina, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora Guanabara Dois, 3a. Edição 1979 (Cap.8, pag. 336).
11. W. H. Press, B. P. Flannery, S.A. Teuholsky e W.T. Vetterling *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1986.