Mecânica Clássica e Espaços de Hilbert: uma Formulação Algébrica da Mecânica Ondulatória no Espaço de Fase Clássico

(Classical mechanics and Hilbert spaces: an algebraic formulation of wave mechanics in the classical phase space)

Ademir E. Santana, A. Mattos Neto
Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia
Campus Federação, 40000, Salvador, BA, Brasil
e
J. D. M. Vianna
Departamento de Física, Universidade de Brasília
Campus Universitário, 70910, Brasília, DF, Brasil

Recebido para publicação em 28 de Julho de 1989; Revisões feitas pelos autores recebidas em 30 de Maio de 1990 e 12 de Dezembro de 1990; Aceito para publicação em 17 de Junho de 1991

Resumo

Usando uma generalização do princípio de ação, é apresentada uma formulação algébrica da mecânica. Com a formulação desenvolvida mostra-se que a descrição de Shönberg da Mecânica Estatística Clássica aparece como uma das realizações dessa estrutura algébrica. Nessa realização as quantidades dinâmicas são operadores lineares operando sobre um espaço de Hilbert-Koopman cujos vetores descrevem os estados do sistema.

Abstract

We present an algebraic formulation of mechanics using a generalization of the action principle. Then we show that the Shönberg's description of Statistical Mechanics is a realization of such an algebraic structure. In that realization the dynamical quantities are linear operators acting on a Hilbert-Koopman space wich vectors describe the states of the physical system.

I. Introdução

Um dos resultados matemáticos referentes aos fundamentos da mecânica[1] é que tanto a mecânica clássica como a mecânica quântica admitem uma estrutura de álgebra de Lie, usualmente conhecida como álgebra de Heisenberg. O produto (ou parênteses) de Lie em mecânica clássica é o parênteses de Poisson entre as variáveis dinâmicas e em mecânica quântica é a relação de comutação entre operadores que atuam no espaço de Hilbert.

As relações de estruturas dinâmicas abstratas com a mecânica clássica e a mecânica quântica foram discutidas por vários autores: Rosen[2], usando transformações de Fourier, introduziu as chamadas funções características e estabeleceu uma mecânica estatatística generalizada. Strocchi[3], em um trabalho próximo ao de Rosen, descreve a mecânica clássica em termos de coordenadas canônicas complexas, definindo para um sistema com n graus de liberdade os entes $z_k = (q_k + ip_k)/\sqrt{2}$ e $z_k^* = (q_k - ip_k)/\sqrt{2}$, $k = 1, 2, ..., n$; em seguida com um procedimento similar para a mecânica quântica descreve os coeficientes complexos da expansão do vetor de estado $|\psi >= \sum_k \varphi_k |a_k>$ em termos de coordenadas reais; mostra então, de forma transparente, a ligação existente entre o parênteses de Poisson clássico e o comutador em mecânica quântica. Jordan e Sudarshan[4], considerando a álgebra de Lie abstrata como estrutura matemática comum a ambas as dinâmicas, estabeleceram uma realização por operadores para a mecânica clássica e de funções reais para a mecânica quântica. Garrido[5], usando também a estrutura de ágebra de Lie propôs uma generalização do princípio de ação, a partir do qual gera equações de movimento e teorias de perturbação.

No presente trabalho, nosso objetivo central é mostrar que a formulação de Schönberg[6,7,8] da mecânica estatística clássica admite também uma interpretação em termos de estrutura algébrica abstrata de Lie. Na formulação de Schönberg da mecânica clássica, chamada por alguns autores[9] de Mecânica Ondulatória no Espaço de Fase Clássica (MOEFC), as quantidades dinâmicas são operadores lineares operando sobre um espaço de Hilbert-Koopman (H-K)[10]. A MOEFC generaliza a mecânica clássica, introduz o conceito de partículas clássicas indistingüíveis e permite que operadores clássicos, multiplicativos ou não, sejam tratados da mesma maneira. Este fato é significativo nas teorias de transformações "star-unitárias" desenvolvidas por Prigogine e colaboradores[11,12].

A seção II da presente comunicação trata da notação e preliminares; nesta seção apresentamos um resumo da MOEFC. Na seção III será introduzido o princípio de ação algébrico baseado em Garrido[5]. Em IV apresentamos a mecânica clássica e a mecânica quântica como realizações de álgebra de Lie. Na seção V mostramos que a MOEFC pode ser interpretada como uma realização de álgebra de Lie no espaço H-K. A seção VI contém nossas observações finais.

II. Notação e Preliminares

Esta seção contém definições e um breve resumo de resultados básicos da MOEFC. Para um tratamento detalhado da MOEFC, o leitor poderá consultar as referências [6,7,9,11-13].

A formulação da mecânica estatística clássica usando métodos da teoria quântica foi chamada por Della Riccia e Wiener[9] de Mecânica Ondulatória no Espaço de Fase Clássico (MOEFC). Esta formulação da mecânica estatística clássica tem uma estrutura matemática baseada no espaço de Hilbert-Koopman. Ela foi empregada em diferentes versões por: Schönberg[6,7], em trabalhos pioneiros sobre o assunto; Della Riccia e Wiener[9], no estudo do movimento Browniano; Prigogine e colaboradores[11,12,14], em vários trabalhos sobre problemas da mecânica estatística de sistemas fora do equilíbrio.

As regras de interpretação física do formalismo da MOEFC são análogas às da teoria quântica e levam aos mesmos resultados da mecânica estatística clássica[15]. Em sua formulação original, funções $\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\equiv\theta_n$ definidas sobre o espaço de fase $\Gamma_{2n}=\{\omega_i,\ i=1,2,...,n;\ \omega_i=(q_i,p_i)\}$ dependentes do tempo τ e de quadrado integrável, satisfazem a equação

$$\partial_\tau\theta_n=-i\,\tilde{L}\,\theta_n \quad , \quad \partial_\tau=\frac{\partial}{\partial_\tau} \tag{1}$$

onde o operador de Liouville $\tilde{L}$ é:

$$\tilde{L}=i\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{m}\cdot\nabla_k+\mathbf{F}_k\cdot\nabla'_k\right) \tag{2}$$

com

$$\mathbf{F}_k=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\frac{\partial\mathbf{V}(|q_i-q_k|)}{\partial q_k} \tag{3}$$

e os operadores gradientes ∇_k e ∇'_k dados por

$$\nabla_k=\frac{\partial}{\partial q_k}$$

$$\nabla'_k=\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Na relação (3), $\mathbf{V}(|q_i-q_k|)$ é à função potencial que aparece no Hamiltoniano do sistema

$$\mathbf{H}=\sum_k\frac{p_k^2}{2m}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\mathbf{V}(|q_i-q_k|). \tag{4}$$

Impondo-se que a função densidade de probabilidade no espaço de fase de um sistema com n partículas, $f_n\equiv f(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\equiv f(\tau;q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n)$, satisfaça a relação

$$f_n(0;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)=|\theta(0;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)|^2, \tag{5}$$

segue que a cada solução da Eq. (1) corresponde uma solução da equação de Liouville

$$\partial_\tau f_n=-i\,\tilde{L}\,f_n, \tag{6}$$

uma vez que o quadrado do valor absoluto de toda solução da Eq. (1) também é sua solução.

Na MOEFC tem-se que: $|\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)|^2\,d\omega$ representa a probabilidade de encontrar em um dado instante τ, n partículas nos pontos de Γ_{2n} situados no intervalo $[(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n),\ (\omega_1+d\omega_1,\omega_2+d\omega_2,...,\omega_n+d\omega_n)]$; as quantidades $\mathbf{A}(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ são representadas por operadores lineares Hermitianos $\tilde{\mathbf{A}}$ definidos por sua ação sobre as funções θ_n; o valor esperado da grandeza física $\mathbf{A}$ no estado $\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ é dado por

$$<\mathbf{A}>=\frac{\int\theta^*(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\cdot\tilde{\mathbf{A}}\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)d\omega}{\int\theta^*(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\cdot\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)d\omega}. \tag{7}$$

Em particular, se $\tilde{\mathbf{A}}$ for um operador multiplicativo, ter-se-á com a Eq. (5), para o instante τ, que

$$<\mathbf{A}>=\frac{\int f(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\cdot\mathbf{A}(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)d\omega}{\int f(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)d\omega}. \tag{8}$$

que é a expressão usual da mecânica estatística clássica.

III. Princípio de Ação Algébrico

Como ponto de partida para obter um princípio de ação abstrato consideremos $C = \{a, b, c, ...\}$ um conjunto de entes abstratos isomorficamente associados a quantidades dinâmicas de um sistema físico. Suponhamos que C tenha uma estrutura de álgebra de Lie com produto denotado port [,]. O produto [,] por definição, satisfará as seguintes propriedades:

$$[a, b] = -[b, a] \tag{9}$$

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] \tag{10}$$

quaisquer que sejam a, b, c em C.

Admitamos também que C seja uma álgebra associativa com relação a um segundo produto que denotaremos por (,); segue da associatividade que é possível gerar, de modo unívoco, potências dos elementos de C [5].

Levando em consideração as realizações usuais da mecânica, exijamos que

$$[(a, b), c] = (a, [b, c]) + ([a, c], b) \tag{11}$$

quaisquer que sejam a, b, c em C. Pela relação (11) o produto de Lie [,] é uma derivação na álgebra associativa com produto (,).

Tendo C as propriedades acima citadas, postula-se o princípio de ação algébrico impondo[5] que a variação de qualquer elemento $a \in C$ é dada por

$$\delta_\lambda a = (d - \partial)_\lambda a = [\delta U(\lambda), a(\lambda)], \tag{12}$$

onde $a, \delta_\lambda a$ e δU são elementos de C.

Na Eq. (12) $\delta_\lambda a$ representa a variação infinitesimal de a com relação ao parâmetro λ pertencente à classe de parâmetros característicos do sistema em estudo (λ, por exemplo, pode ser o tempo τ); a parcela $d_\lambda a$ representa a variação total de a; $\delta_\lambda a$ é a variação de a devido a sua dependência explícita em λ e será nula no caso em que a não tenha esta dependência. O elemento $U \in C$ é chamado[5] de ação e sua especificação completa dependerá da mecânica a ser considerada.

O fato do produto de Lie entre dois elementos de uma álgebra de Lie ser expresso como uma combinação linear dos elementos de álgebra, via as constantes de estrutura[16], estabelece de acordo com a Eq. (12), que as constantes de estrutura de álgebra governam a dinâmica.

No caso em que $\lambda = \tau$ podemos escrever para $\delta U(\tau)$

$$\delta U(\tau) = -h(\tau)\delta\tau, \tag{13}$$

onde $h(\tau)$ é um elemento de C. O elemento $h(\tau)$ é especificado quando se considera a realização da álgebra.

Substituindo a relação (13) na Eq. (12) temos

$$\frac{\delta a}{\delta \tau} = [a(\tau), h(\tau)], \tag{14}$$

que fornece a variação do elemento $a \in C$ com relação ao tempo.

Concluindo esta seção devemos observar que o princípio de ação postulado pela Eq. (12) é compatível com as Eqs. (9, 10) satisfeitas pelo produto de Lie[5]. De fato, impondo a condição física de que nenhum elemento de C possa produzir variações dinâmicas sobre si mesmo, seguirá de (12) que $[a, a] = 0$ para qualquer $a \in C$. Então se $a + b$ estiver em C, teremos $[a+b, a+b] = 0$ e, em conseqüência $[a, b] = -[b, a]$, que é a anti-simetria do produto de Lie. Por outro lado, impondo que se $c = [a, b]$ para um certo valor de λ, a mesma relação deva ser verificada para qualquer outro valor de λ, teremos[17] para $\lambda = \tau$, por exemplo, que

$$\begin{aligned}&[[a(\tau), b(\tau)], h(\tau)] + [[b(\tau), h(\tau)], a(\tau)] + \\ &+[[h(\tau), a(\tau)], b(\tau)] = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

que é a identidade de Jacobi entre $a, b, h \in C$.

IV. Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

É resultado conhecido[18] que a mecânica clássica e a mecânica quântica, em suas formulações usuais, podem ser analisadas como realizações da estrutura algébrica resumida na seção III. Para obter este resultado, faz-se necessário identificar o conjunto C, o produto de Lie [,], o produto (,) e o elemento $h(\tau) \in C$. Como estas realizações ajudarão na compreensão da formulação da MOEFC, nós a apresentaremos, embora de forma resumida. Consideraremos um sistema não relativístico com f graus de liberdade.

IV.1 - Mecânica Clássica

Neste caso, C é o conjunto[19] gerado por $\{1, p_k, q_k; k = 1, 2, ..., f\}$ onde p_k e q_k são variáveis canonicamente conjugadas. O produto (,) é o produto usual de funções e o produto de Lie é definido pelo parênteses de Poisson. Assim, se F e G são quantidades dinâmicas definidas sobre Γ_{2f} tem-se

$$\begin{aligned}[F, G] &\equiv [F, G]_c \\ &= \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right),\end{aligned}$$

onde o índice c indica que se trata do produto de Lie da mecânica clássica. O elemento $h(\tau)$ é neste caso o Hamiltoniano $\mathbf{H}$ do sistema. Então, das Eqs.(13-14), temos

$$\dot{q}_k = [q_k, \mathbf{H}]_c = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k} \tag{16a}$$

$$\dot{p}_k = [p_k, \mathbf{H}]_c = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_k} \tag{16b}$$

que são as conhecidas equações de Hamilton.

IV.2. Mecânica Quântica

Na formulação quântica de sistemas com análogos clássicos, o conjunto[19] C é gerado pelos elementos $\{\hat{1}, \hat{p}_k, \hat{q}_k; k = 1, 2, ..., f\}$ que são operadores lineares Hermitianos, operando sobre um espaço de Hilbert H. O produto (,) é o produto ordinário entre operadores e o produto de Lie é realizado como o comutador entre operadores, a menos do fator de proporcionalidade $1/i\hbar$. Assim, para $\hat{A}$ e $\hat{B} \in C$, temos

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]_q \tag{17a}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]_q = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{17b}$$

onde o índice q indica que o produto se refere à mecânica quântica. O elemento $h(\tau)$ é o operador $\hat{\mathrm{H}}$ obtido a partir do Hamiltoniano clássico H. Nestas condições, as relações (13, 14) nos dão para os operadores $\hat{q}_k$ e $\hat{p}_k$ $(j, k = 1, 2, ..., f)$.

$$\dot{\hat{q}}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathrm{H}}(\hat{q}_j(\tau), \hat{p}_j(\tau)), \hat{q}_k(\tau)]_q, \tag{18a}$$

$$\dot{\hat{p}}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathrm{H}}(\hat{q}_j(\tau), \hat{p}_j(\tau)), \hat{p}_k(\tau)]_q, \text{ com } -\infty < \tau < \infty, \tag{18b}$$

que são as equações quânticas para os operadores em questão na formulação de Heisenberg.

V. Mecânica ondulatória no espaço de fase clássico

Para mostrarmos que a MOEFC admite uma descrição em termos algébricos é suficiente considerar: (i) para C, o conjunto formado pelos operadores Hermitianos $\{\tilde{1}, \tilde{p}_k, \tilde{q}_k, \tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}(\tilde{p}_k, \tilde{q}_k), ..., \tilde{\mathrm{F}} = i[\mathrm{F},]_c, ...]\}$ onde F, ... são funções (quantidades dinâmicas) diferenciáveis definidas sobre Γ_{2n}, $\mathrm{A}(\tilde{p}_k, \tilde{q}_k)$ são operadores obtidos das quantidades dinâmicas $\mathrm{A}(p_k, q_k)$ pela substituição das variáveis clássicas $p_k, q_k (k = 1, 2, ..., n)$ pelos operadores multiplicativos $\tilde{p}_k, \tilde{q}_k$ e $[\ ,\ ]_c$ é o produto de Lie da mecânica clássica; (ii) para o produto (,), o produto usual de operadores; (iii) para o produto de Lie, o comutador $\frac{1}{i}\ [\ ,\ ]_q$; (iv) para $h(\tau)$, o operador $i[\mathrm{H},]_c$, onde H é o hamiltoniano do sistema e o fator i assegura a hermiticidade de $h(\tau)$; (v) para espaço vetorial onde os operadores atuam, o espaço Hilbert-Koopman[10], o qual denotaremos por $\mathcal{K}$.

De fato, das considerações (i) - (v) segue que: (a) como o espaço de Hilbert-Koopman é por definição o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável definidas sobre Γ_{2n}, tomando como base de $\mathcal{K}$ o conjunto $\{|q_1, q_2, ..., q_n; p_1, p_2, ..., p_n >\} \equiv \{|\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n >\}$, teremos

$$< \theta(\tau)|\theta'(\tau) >= \int \theta^*(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \cdot \theta'(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) d\omega$$

com

$$\theta(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) =< \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n|\theta(\tau) >$$

onde usamos para os vetores $|\theta(\tau) >$ de $\mathcal{K}$ a notação usual de bra e ket[1]. Segue com esta notação, que

$$< \tilde{O} >=< \theta(\tau)|\tilde{O}(\tau)|\theta(\tau) > / < \theta(\tau)|\theta(\tau) > \tag{19}$$

dará o valor esperado da observável $\tilde{O}$ no estado $|\theta(\tau) >$; (b) a aplicação do princípio de ação algébrico nos dará para qualquer elemento $\tilde{O}(\tau)$ em C,

$$\dot{\tilde{O}}(\tau) = -\big[[\mathrm{H},]_c . \tilde{O}\big]_q = -\big([\mathrm{H},]_c\ \tilde{O} - \tilde{O}[\mathrm{H},]_c\big). \tag{20}$$

Notando que

$$i[\mathrm{H},]_c = i\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

é o operador de Liouville $\tilde{L}$, teremos da Eq. (20)

$$\dot{\tilde{O}}(\tau) = i[\tilde{L}, \tilde{O}]_q, \tag{21}$$

que é a equação de evolução do operador $\tilde{O}$ na formulação algébrica da MOEFC.

A relação dessa formulação algébrica da MOEFC com a descrição usada por Schönberg (vide seção II) é estabelecida notando que a formulação algébrica corresponde à descrição de Heisenberg Clássica[6,7,13] (DHC) e a de Schönberg à descrição de Schröndiger Clássica (DSC). De fato, para passarmos da DHC para DSC, utilizamos[6,7,13] o operador de evolução temporal em $\mathcal{K}$, ou seja, $\tilde{U}(\tau, \tau_0) = e^{-i\tilde{L}(\tau - \tau_0)}$, onde estamos supondo que $\tilde{L}$ não depende explicitamente do tempo. Então, pondo-se:

$$\theta(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = e^{-i\tilde{L}(\tau - \tau_0)}\theta(\tau_0; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$$

$$\tilde{q}_k(\tau) = \tilde{U}(\tau, \tau_0)^{-1}\tilde{q}_k\tilde{U}(\tau, \tau_0)$$
$$\tilde{p}_k(\tau) = \tilde{U}(\tau, \tau_0)^{-1}\tilde{p}_k\tilde{U}(\tau, \tau_0)$$

e usando

$$(\tilde{q}_k\theta)(\tau_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = q_k\theta(\tau_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \tag{22a}$$

$$(\tilde{p}_k\theta)(\tau_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = p_k\theta(\tau_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \tag{22b}$$

pois $\tilde{q}_k$ e $\tilde{p}_k$ são operadores multiplicativos sobre $\mathcal{K}$, teremos de forma direta

$$i\partial_\tau\theta(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \tilde{L}\theta(\tau; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n), \tag{1}$$

que é a Eq. (1) de Liouville-Schönberg.

Notemos que a Eq. (19) generaliza o conceito de valor esperado para observáveis do tipo $i[\mathbf{F},\ ]_c$ e coincidirá com a Eq. (7) nos casos em que o operador $\bar{O}$ for do tipo $\mathbf{A}(p_k, q_k)$, isto é, multiplicativo pois, neste caso, com as Eqs. (22 a,b), teremos da Eq. (19)

$$<\bar{O}>=\frac{\int|\theta(\tau,\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)|^2\cdot O(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)d\omega}{\int|\theta(\tau;\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)|^2d\omega}.$$

Devemos observar também que a formulação algébrica da MOEFC torna evidente que a Eq. (1) pode ser escrita numa forma independente da base (representação) usada no espaço $\mathcal{K}$, obtendo-se[20] neste caso, para os vetores $|\theta(\tau)>\in\mathcal{K}$, a equação de evolução.

$$i\partial_\tau|\theta(\tau)>=L|\theta(\tau)>, \tag{23}$$

onde denotamos o operador de Liouville por L, para indicar que não estamos usando uma representação específica. Em particular, se tomarmos como base de $\mathcal{K}$ o conjunto de estados $\{|k_1,k_2,...,k_n,p_1,p_2,...,p_n>\}$ onde as coordenadas $(q_1,q_2,...,q_n)$ são substituídas pelos índices de Fourier ou "vetores de onda" $(k_1,k_2,...,k_n)$, obtemos da Eq. (23) a equação usada por Prigogine, Balescu e colaboradores[14] na Teoria Dinâmica de Correlações.

VI. Observações Finais

Neste trabalho, usando uma generalização do princípio de ação, apresentamos uma formulação algébrica da mecânica. Com a formulação desenvolvida mostramos que a descrição de Schönberg da Mecânica Estatística Clássica (MEC) aparece como uma das realizações dessa estrutura algébrica; esta realização considera o espaço de Hilbert-Koopman como espaço vetorial cujos elementos descrevem os estados do sistema e onde atuam seus operadores. A formulação algébrica apresentada possibilita imaginar outras realizações possíveis para a MEC; por exemplo, fica aberta a possibilidade de descrever sistemas clássicos com o espaço de Hilbert-Schmidt[21] e introduzir o conceito de super-operadores clássicos.

Finalizando, gostaríamos de registrar o fato explicitado neste artigo, que a estrutura matemática de espaços de Hilbert comumente associada apenas à descrição de fenômenos quânticos, também aparece de modo natural em descrições clássicas. Desta forma, pelo menos no que se refere à estrutura matemática utilizada, há indícios de que Salviati[22] pode ter razão quando, em sua discussão com Simplício, se diz inclinado a deslocar a fronteira entre as físicas quântica e clássica de modo que a física se torne essencialmente quântica, em princípio.

Agradecimentos

Um dos autores (AES) agradece ao CNPq pelo suporte financeiro e ao Departamento de Física da Universidade Federal de Goiás onde foi realizado parte deste trabalho. Os autores agradecem ao árbitro pelas sugestões de notas didáticas e elucidativas como por exemplo [8], [15] e [16].

Notas e Referências

1. P. A. M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics.* Clarendon Press, Oxford, 1958.
2. G. Rosen, J. Franklin. *Inst.* **279**, 1045 (1969).
3. A. Strocchi, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 36 (1966).
4. T. F. Jordan et C. G. Sudarshan. *Rev. Mod. Phys.* **33**, 515 (1961).
5. L. M. Garrido. *J. Math. Phys.* **10**, 1045 (1969).
6. M. Schönberg, *N. Cimento* **9**, 1139 (1952).
7. M. Schönberg, *N. Cimento* **10**, 419 (1953), **10**, 697 (1953).
8. M. Schönberg é conhecido na comunidade científica brasileira sob o nome de Mário Schemberg.
9. G. Della Riccia et N. Wiener, *J. Math. Phys.* **7**, 1372 (1966).
10. B. O. Koopman, *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA **17**, 315 (1931).
11. C. George et I. Prigogine, *Physica* **99A**, 369 (1979).
12. I. Prigogine, *From Being to Becoming.* Freeman, San Francisco, 1980; I. Prigogine et al. *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA **74**, 4152 (1977).
13. A. Matos Neto et J. D. M. Vianna, *N. Cimento* **86B**, 117 (1985).
14. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics.* J. Wiley, New York, 1975.
15. No que segue, por simplicidade de notação, consideraremos cada partícula com um grau de liberdade.
16. De acordo com a teoria de álgebras de Lie, se $a_1, a_2, ..., a_n$ são os elementos-base da álgebra então, para todo par a_i, a_j pertencente à álgebra, tem-se $[a_i, a_j] = C_{ij}^k a_k$, com C_{ij}^k anti-simétrico nos índices i, j; as constantes de estrutura da álgebra são os coeficientes C_{ij}^k.
17. Para demonstrar a Eq. (15) considere $c(\tau) = [a(\tau), b(\tau)]$, $c(\tau+d\tau) = [a(\tau+d\tau), b(\tau+d\tau)]$ e expanda cada um dos elementos calculados em $(\tau+d\tau)$ usando a expressão de Taylor.
18. R. Herman. *Lie Algebras and Quantum Mechanics.* W. A. Benjamin, New York, 1970.
19. Para análise de questões técnicas tais como o conceito de "enveloping algebra" da álgebra de Lie das observáveis físicas, veja, por exemplo, G. Rosen *Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory* - Acad. Press., New York (1969) e T. M. Rocha Filho "Generalização Algébrica do Parênteses de Dirac Simétrico - Aplicação à Teoria de Campo" -

Tese de Mestrado, Departamento de Física, Universidade de Brasília (1987).
20. A. E. de Santana, A. Matos Neto et J. D. M. Vianna. Int. *J. Theor. Phys.* 28, 787 (1989).
21. P. O. Lowdin. "Some Aspects on the Hamiltonian and Liouvillian - The Special Propagator Methods and the Equation of Motion Approach". *Uppsala Tech. Note No.* 739 (1984).
22. J. M. Jauch. "São os Quanta Reais? Um Diálogo Galileano". Trad. J. D. M. Vianna (Nova Stella Editora e EDUSP, São Paulo, 1986) pg. 52.