

# Dimensionamento e Construção de uma Balança de Corrente

(Dimensioning and constructing a current balance)

J. H. Vuolo e C. H. Furukawa

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Caixa Postal 20516, 01498 São Paulo, SP, Brasil

Recebido para publicação em 20 de Setembro de 1991; Aceito para publicação em 01 de Abril de 1992

## Resumo

Este trabalho apresenta o projeto, a construção e os resultados experimentais obtidos para uma balança de corrente didática. Apesar de ser simples e compacta, e funcionar com correntes menores que 1,5 A, a balança permite obter resultados com 1% de acurácia. Foram detalhadamente calculados os efeitos que presumivelmente implicassem em erros até a ordem de 0,1% para orientar o dimensionamento da balança.

## Abstract

This paper presents the project, the construction and the experimental results obtained with a didactical current balance. Although it is simple and compact, and works with currents of less than 1.5 A, the balance provides results with 1% accuracy. The effects which could, presumably, imply errors were carefully calculated up to 0,1%, in order to guide the dimensioning of the balance.

## I. Introdução

As experiências com balança de corrente são de grande interesse didático para alunos de Engenharia, Física e outras ciências exatas, sendo usualmente incluídas nos cursos de Laboratório de Física Geral<sup>1,2,3,4</sup>.

Conceitualmente, a balança de corrente se presta à definição do Ampère que é uma unidade de base do Sistema Internacional de Unidades<sup>3,5</sup>. Entretanto, os objetivos didáticos geralmente apresentados para as experiências são a verificação da equação para a força entre condutores e determinação experimental da constante de permeabilidade  $\mu_0$ . Assim, esses objetivos são conceitualmente um pouco incorretos, mas justificáveis em vista do caráter didático das experiências. No SI, a constante  $\mu_0$  é um número exato definido como  $4\pi \times 10^{-7}$  e a expressão da força magnética entre condutores define o Ampère sendo correta por definição. Assim, o objetivo mais correto para experiências com a balança de corrente é realizar a calibração absoluta de um amperímetro<sup>3</sup>.

As balanças geralmente usadas<sup>1,2,3,6,7</sup> funcionam baseadas na força magnética sobre um simples condutor transportando corrente  $i$ . Esta força é pequena,

exigindo correntes altas ( $> 5$  A), pequenas distâncias entre condutores e sensibilidade alta para a balança. Os resultados dificilmente são melhores que 10% mesmo para distâncias pequenas ( $< 10$  mm), sendo as medidas inviáveis para distâncias maiores. Além disso, muitas vezes se utiliza mercúrio para os contatos elétricos de alta corrente.

A balança de corrente apresentada neste trabalho reduz ou elimina os inconvenientes acima descritos, às custas de pequena complicação conceitual da experiência. Neste caso, a força resulta de 2 forças iguais sobre 2 condutores iguais transportando corrente  $I = 39i$ , sendo  $i$  a corrente primária. A complicação conceitual acima é facilmente compreensível pelos alunos e permite aumentar consideravelmente a força. Assim, a balança pode funcionar bem com correntes relativamente baixas ( $< 1,5$  A) e sem mercúrio nos contatos. A balança permite obter resultados com acurácia de 1% para distâncias até 30 mm, permitindo verificar a dependência da força com o inverso da distância.

A partir do protótipo aqui descrito foram construídas 22 balanças que substituíram as balanças convencionais, antes em uso no IFUSP. Estas balanças têm sido usadas por alunos de Física do IFUSP e alunos de

Engenharia da Escola Politécnica da USP.

## II. Descrição esquemática da balança

A balança de corrente é mostrada esquematicamente nas Figuras 1 e 2. Seu funcionamento é baseada na força de atração (ou repulsão) entre uma bobina retangular  $L_1L_2L_3L_4$  (no quadro móvel) e uma bobina retangular fixa  $L_5L_6L_7L_8$ . As bobinas tem seção quadrada  $d \times d$  e  $N$  espiras, sendo  $i$  a corrente pelas bobinas e  $I = Ni$  a corrente total em cada bobina.

Além das bobinas retangulares existe um condutor retilíneo ( $L_9$ ) no quadro móvel com corrente  $i$ , e os suportes do quadro móvel ( $L_{10}$  e  $L_{11}$ ), nos quais passa a corrente  $i$ .

As dimensões e outros parâmetros são mostrados na Tabela 1. As dimensões foram escolhidas de forma a minimizar erros e forças espúrias, mas considerando que a balança deve ser simples e compacta para uso didático. Os erros e forças espúrias são discutidos a seguir.

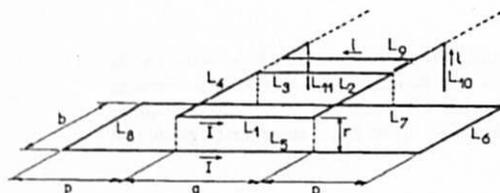


Figura 1: Desenho esquemático dos condutores.

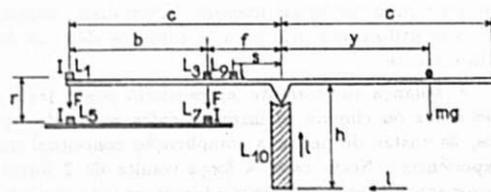


Figura 2: Desenho esquemático da balança.

## III. Forças e torques sobre o quadro móvel

### III.1. Força principal

As forças magnéticas principais sobre o quadro móvel da balança são as forças sobre os condutores  $L_1$

e  $L_3$  devidas a  $L_5$  e  $L_7$  respectivamente. Essas forças são iguais e dadas por

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi r} \quad (1)$$

Essa força será chamada ideal e entendida como objeto de verificação nas experiências didáticas comuns.

O fundamento do método de medidas é o equilíbrio de torques sobre o quadro móvel, isto é,

$$(b + 2f)F = mgy \quad (2)$$

As expressões (1) e (2) acima mostram que é essencial que a geometria da balança de corrente seja muito bem definida, de forma que  $a, b, f, r$  e  $y$ , além de ser dimensões muito bem definidas, devem permitir medidas precisas de maneira relativamente fácil.

A expressão (1) para a força envolve erros teóricos, e além disso, existem várias forças espúrias sobre o quadro móvel que serão discutidas a seguir.

### III.2. Erros teóricos

#### a. Efeito de Comprimento Finito de $L_5$ e $L_7$

O campo magnético criado pelo fio  $L_5$  num ponto qualquer do fio  $L_1$  é dado por<sup>8</sup> (Figura 3)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 - \gamma) \quad (3)$$

onde

$$(1 - \gamma) = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  definidos na Figura 3. Assim, a força sobre o fio  $L_1$  será

$$I \int_p^{p+a} B dx = F(1 - \bar{\gamma})$$

onde

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{1}{a} \left( \sqrt{(p+a)^2 + r^2} - \sqrt{p^2 + r^2} \right) \quad (4)$$

Portanto, em relação à força ideal (1) existe uma diminuição da força dada por

$$F_f = \bar{\gamma} F \quad (5)$$

#### b. Efeito Devido à Seção do Condutor

Para se obter bobinas de geometria bem definida e simples de serem construídas, escolheu-se para as bobinas uma seção quadrada de lado  $d = 3.5$  mm. Resulta um pequeno erro teórico em relação à força ideal (1) que será obtido a seguir.

Tabela 1 - Características da balança

Dimensões		Outras Características	
a	160 mm	r	Ajustável de 5-60 mm
b	120 mm	$y = n\Delta$	$n = 0, 1, 2, 3, \dots, 21$ $\Delta = 7.62 \text{ mm}$
p	70 mm	N	39 espiras (6+5+6+5+6+5+6)
f	60 mm	fio das bobinas	esmaltado AWG 24 diâmetro - 0.55 mm 1.85 g/m - 84.4 mΩ/m
h	≈ 90 mm	comprimento de fio das bobinas	móvel - 21.84 m fixa - 32.76 m
s	20 mm	resistência das bobinas	móvel - 1.8 Ω fixa - 2.8 Ω
d	3.5 mm	i	≤ 1.5 A

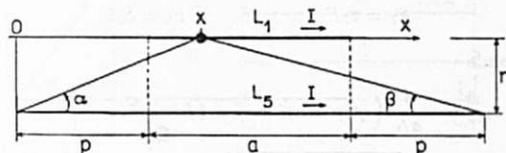


Figura 3: Cálculo da força entre condutores finitos.

A componente  $x$  do campo magnético criado num ponto  $(x, y)$ , devido a um condutor retilíneo infinito de seção quadrada  $d \times d$  e com densidade de corrente  $j$  uniforme, será dado por (Figura 4)

$$B_x = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{(y - y_0) dy_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (6)$$

ou

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 - M)$$

onde

$$M = 1 - \frac{r}{8d^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx_0 \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - \frac{d}{2})^2}{(x - x_0)^2 + (y + \frac{d}{2})^2} \quad (7)$$

Esta integral foi calculada numericamente para  $r = 6$  mm e  $d = 3,5$  mm em 225 pontos regularmente espaçados na seção do fio  $L_1$ , sendo em seguida calculada a média, resultando

$$\bar{M} = 0,0036$$

Assim, o efeito da seção quadrada do condutor para distância  $r = 6$  mm equivale a uma diminuição da força

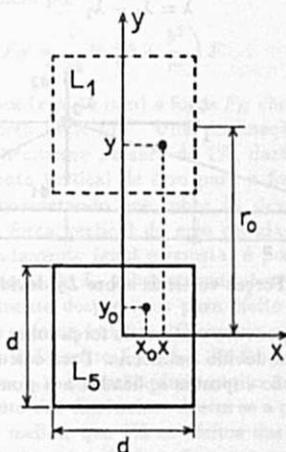


Figura 4: Cálculo do efeito de seção quadrada dos condutores.

ideal (1) dada por

$$\Delta F_q = \bar{M} F = 0,0036 F \quad \text{para } r = 6 \text{ mm} \quad (8)$$

Isto é, a força é 0,36% menor em relação a expressão teórica ideal (1).

### III.3. Forças espúrias

#### a. Forças Sobre os Condutores $L_2$ e $L_4$ Devidas a $L_6$ e $L_8$

Os condutores  $L_6$  e  $L_8$  exercem forças sobre  $L_2$  cujas componentes verticais são  $F_{d1}$  e  $F_{d2}$ , respectivamente (Figura 5). Essas componentes podem ser calculadas diretamente e incluindo-se inclusive o efeito de fios finitos conforme o item 3.2.a, obtêm-se

$$F_{d1} = \lambda_1 F \quad \text{e} \quad F_{d2} = \lambda_2 F \quad (9)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{r^2 (\sqrt{p^2 + b^2 + r^2} - \sqrt{p^2 + r^2})}{a(p^2 + r^2)} \quad (10)$$

$$\lambda_2 = \frac{r^2 (\sqrt{(p+a)^2 + b^2 + r^2} - \sqrt{(p+a)^2 + r^2})}{a(p+a)^2 + r^2} \quad (11)$$

Assim, a componente vertical da força sobre  $L_2$  será

$$F_d = (F_{d1} - F_{d2}) = \lambda F \quad (12)$$

onde

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (13)$$

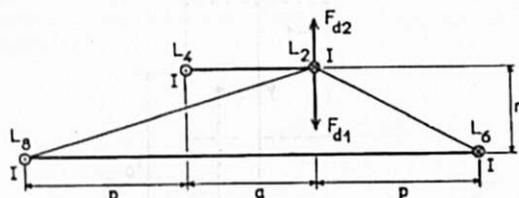


Figura 5: Forças verticais sobre  $L_2$  devidas a  $L_6$  e  $L_8$ .

A componente vertical da força sobre  $L_4$  será exatamente igual devido à simetria. Para cálculo de torques, as forças são supostas aplicadas nos pontos médios de  $L_2$  e  $L_4$ .

#### b. Forças Sobre os Condutores $L_1$ e $L_3$ Devidas aos Condutores $L_7$ e $L_5$

A componente vertical  $F_p$  da força sobre o condutor  $L_1$  devida ao condutor  $L_7$  (Figura 6) pode ser calculada diretamente como no item 3.2.a, obtendo-se

$$F_p = \epsilon F \quad (14)$$

onde

$$\epsilon = \frac{1}{a} (\sqrt{(a+p)^2 + b^2 + r^2} - \sqrt{p^2 + b^2 + r^2}) \frac{r^2}{b^2 + r^2} \quad (15)$$

a força vertical sobre  $L_3$  será exatamente igual e para efeito de cálculo de torque ambas podem ser supostas aplicadas no centro da bobina móvel, pois

$$f F_p + (f+b)F_p = 2F_p \left( f + \frac{b}{2} \right)$$

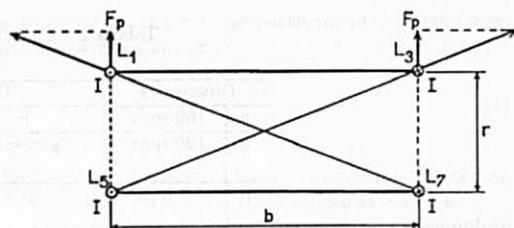


Figura 6: Forças verticais sobre  $L_1$  e  $L_3$  devidas a  $L_5$  e  $L_7$ .

#### c. Força Sobre o Condutor $L_9$

As forças verticais  $F_5$  e  $F_7$  sobre o condutor  $L_9$  (Figura 7) são calculadas de maneira análoga ao caso anterior, obtendo-se

$$F_7 = \delta_7 F \quad \text{e} \quad F_5 = \delta_5 F$$

onde

$$\delta_7 = \frac{1}{aN} (\sqrt{(p+a)^2 + r^2 + (f-s)^2} - \sqrt{p^2 + r^2 + (f-s)^2}) \frac{r^2}{r^2 + (f-s)^2}$$

$$\delta_5 = \frac{1}{aN} (\sqrt{(p+a)^2 + r^2 + (b+f-s)^2} - \sqrt{p^2 + r^2 + (b+f-s)^2}) \frac{r^2}{r^2 + (b+f-s)^2}$$

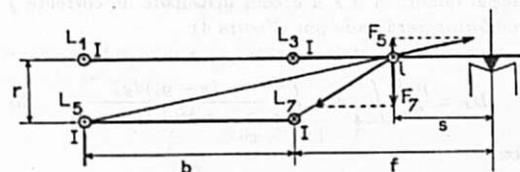


Figura 7: Forças verticais sobre o condutor  $L_9$ .

A força vertical total sobre  $L_9$  será

$$F_8 = (\delta_7 - \delta_5) F$$

Para efeito de cálculo de torque será considerada uma força  $F_c$  suposta aplicada no centro da bobina móvel dada por

$$F_c = \delta F \quad (16)$$

onde

$$\delta = (\delta_7 - \delta_5) \frac{s}{\frac{b}{2} + f} \quad (17)$$

Isto é,  $F_c$  aplicada no centro da bobina móvel exercerá

o mesmo torque que a força real  $F_s$ , em relação ao eixo da balança.

#### d. Forças Devidas aos Condutores $L_{10}$ e $L_{11}$

Os condutores  $L_{10}$  e  $L_{11}$  serão considerados nas direções dos condutores  $L_2$  e  $L_4$  respectivamente, embora estejam deslocados alguns milímetros destas direções, na realidade (Figura 8).

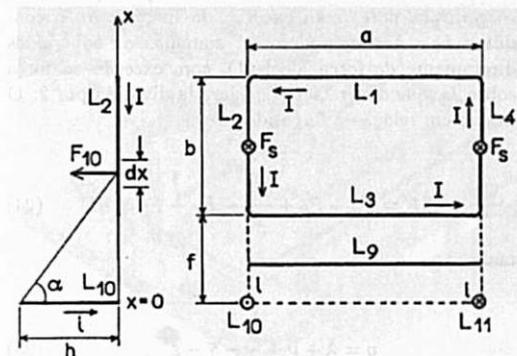


Figura 8: Forças verticais devidas aos suportes  $L_{10}$  e  $L_{11}$ .

As forças sobre  $L_3$  devidas a  $L_{10}$  e  $L_{11}$  se cancelam, o que pode ser visto pela simetria. O mesmo ocorre com as forças sobre  $L_1$ .

A força  $dF_{10}$  exercida por  $L_{10}$  sobre um elemento  $dx$  e  $L_2$  será, incluindo efeito de fio finito, dada por

$$dF_{10} = \frac{\mu_0 i dx \cos \alpha}{2\pi x} = F \frac{hr}{2Na} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+h^2}}$$

Integrar esta força não tem muito interesse, pois importante é o torque com relação ao eixo da balança ( $x=0$ ) que será dado por

$$\tau_s = \int_f^{f+b} x dF_{10} = F \frac{hr}{2Na} \int_f^{f+b} \frac{dx}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad (18)$$

Integrando para os valores de  $h$ ,  $f$  e  $b$  dados na Tabela 1, obtém-se

$$\tau_s = 0,8184 \frac{hr}{2Na} F$$

A força  $F_s$  aplicada no centro de  $L_2$  resultará num torque igual ao acima será dada por

$$F_s = \nu F \quad (19)$$

onde

$$\nu = \frac{1}{(f + \frac{b}{2})} \frac{hr}{2Na} 0,8184 \quad (20)$$

Para  $r = 30$  mm, resulta  $\nu \times 100 = 0,15\%$  e portanto  $F_s$  é muito pequena comparada com a força ideal (1). A força exercida por  $L_{11}$  sobre  $L_2$  será da ordem de 10 vezes menor devido a maior distância e pequeno ângulo entre  $dx$  e o campo magnético. Assim, a força de  $L_{11}$  sobre  $L_2$  poderá ser considerada completamente desprezível. Quanto à força vertical sobre  $L_4$ , pela simetria, pode-se ver que será dada pela expressão (19).

#### c. Forças entre Condutores Transversais

Sobre cada um dos condutores  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  na bobina móvel existirão ainda forças devidas a condutores transversais da bobina fixa. Por exemplo, o condutor  $L_2$  sofrerá força horizontal (Figura 9) devida ao condutor  $L_5$  dada por

$$F_{H2} = \frac{r}{2a} \ln \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) F \quad (21)$$

Nos piores casos ( $r > 40$  mm) a força  $F_{H2}$  chega a cerca de 30% da força ideal (1). Uma inclinação vertical de  $L_5$ , que dificilmente passará de 1%, dará origem a uma componente vertical de erro para a força menor que 0,3%. Considerando que sobre  $L_4$  deverá existir também uma força vertical de erro devida a  $L_5$  que será aproximadamente igual e oposta, é possível concluir que as forças de  $L_5$  sobre os condutores  $L_2$  e  $L_4$  são completamente desprezíveis para efeito de torque em relação ao eixo da balança. O mesmo vale para as forças devidas a  $L_7$  sobre  $L_2$  e  $L_4$ . As forças sobre  $L_1$  e  $L_3$  devidas a  $L_6$  e  $L_8$  serão ainda muito menores devido ao aumento das distâncias. Assim se a precisão da geometria for melhor que 1% os efeitos das forças entre condutores transversais deverão ser completamente desprezíveis, isto é, muito menores que 0,3%.

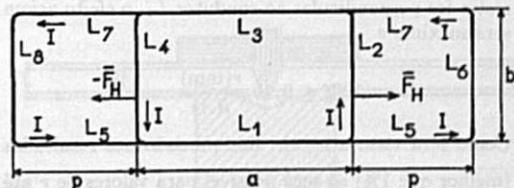


Figura 9: Forças entre condutores transversais.

#### f. Forças Devidas ao Campo Magnético da Terra

Um campo magnético externo  $\vec{B}_T$  pode ser decomposto, conforme mostrado na Figura 10, em componentes  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  e  $\vec{B}_v$ . A componente vertical  $\vec{B}_v$ , resultará

em forças horizontais, não havendo portanto torque sobre o quadro móvel. As forças  $-F_2$  e  $F_2$  sobre  $L_2$  e  $L_4$ , devidas a  $B_2$  também não provocam torque sobre o quadro móvel.

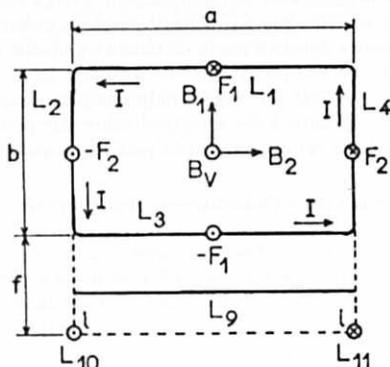


Figura 10: Forças devidas a campo externo com componentes  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_V$ .

As forças sobre os condutores  $L_1$  e  $L_3$  devidas a  $B_1$  são iguais e opostas, mas neste caso existirá torque sobre o quadro móvel. A razão entre o torque  $\tau_T$  devido ao campo magnético  $B_1$  e o torque  $\tau_m$  devido às forças ideais (1) é dada por

$$\xi = \frac{\tau_T}{\tau_m} = \frac{2\pi B_1 r}{\mu_0 N i} \frac{b}{b + 2f} \quad (22)$$

Para as dimensões da balança obtém-se

$$100\xi = 0,64 \frac{B_1(\text{Gauss}) r(\text{mm})}{i(\text{A})} \quad (23)$$

O campo magnético da terra em São Paulo é da ordem de 0,3 Gauss. Assim, quando o campo magnético terrestre for perpendicular ao condutor  $L_1$ , o efeito acima será máximo e

$$100\xi \leq 0,19 \frac{r(\text{mm})}{i(\text{A})}$$

Como será visto a seguir, boa precisão nos resultados (melhor que 1%) só será possível para valores de  $r$  até 30 mm, e neste caso a corrente  $i$  será relativamente alta ( $\sim 1\text{A}$ ). Portanto, no pior caso considerado acima, o efeito do campo magnético terrestre será da ordem de 6%. Este percentual poderá ser seguramente reduzido por um fator da ordem de 100, alinhando-se o condutor  $L_1$  e o campo magnético externo num mesmo plano vertical e também realizando-se medidas com corrente elétrica  $i$  nos dois sentidos, conforme procedimento discutido na sequência. Assim, com os cuidados mencionados espera-se reduzir efeitos de campo magnético externo a ordem de 0,1%.

### III.4. Sumário

Como mostrado no item 3.2.b o efeito devido à seção quadrada dos condutores é de 0,36% para  $r = 6$  mm. Este efeito deve-se reduzir drasticamente para distâncias  $r$  maiores. O efeito de um campo magnético externo comparável ao campo terrestre pode ser seguramente reduzido a menos de 0,1% por meio de cuidados experimentais. Os demais efeitos significativos foram calculados em termos de forças equivalentes aplicadas no centro da bobina móvel. Essas forças equivalentes surgem aos pares com exceção da força sobre o condutor  $L_9$ . Assim, podem ser somadas ou subtraídas diretamente da força ideal (1), com exceção da força sobre  $L_9$  que deverá ser considerada dividida por 2. O desvio em relação à força ideal será

$$\Delta F = F_d + F_s + \frac{F_c}{2} - F_f - F_p = \eta F \quad (24)$$

onde

$$\eta = \lambda + \nu + \frac{\delta}{2} - \bar{\gamma} - \varepsilon \quad (25)$$

O parâmetro  $\eta$  representa a variação fracional da força em relação a força ideal (1). A Figura 11 mostra  $\eta$  em função de  $r$ . Como pode ser visto, a balança deve permitir verificar a equação (1), sendo que para distâncias  $r$  até 30 mm esta equação será correta melhor que 99%.

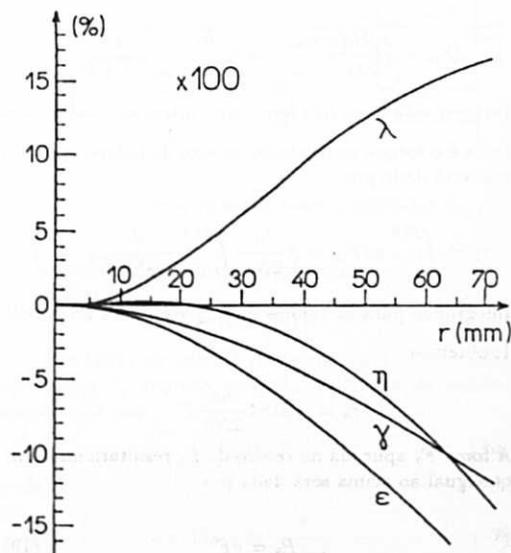


Figura 11: Correções à força dada pela equação (1).

O gráfico mostra também  $\lambda$ ,  $-\varepsilon$  e  $-\gamma$ .  $\nu$  e  $\delta/2$  não são representados por serem muito pequenos. Para  $r = 50$  mm, esses parâmetros valem 0,0025 e 0,0010. Mas os valores graficados de  $\eta$  incluem  $\nu$  e  $\delta/2$  conforme expressão (25).

#### IV. Construção da balança

O protótipo construído da balança é mostrado na Figura 12.

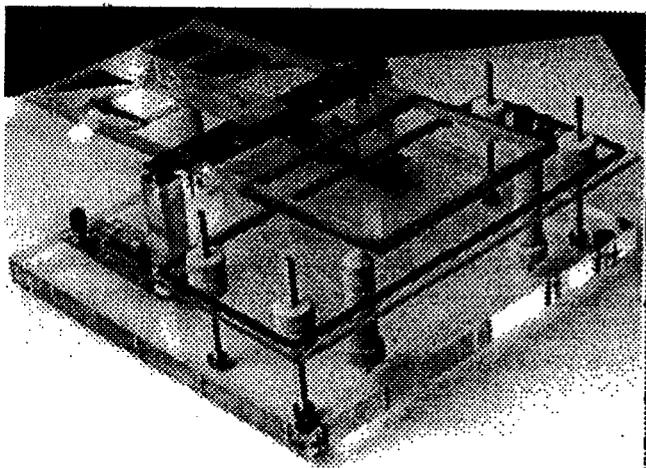


Figura 12: Protótipo construído da balança.

As bobinas são constituídas de 39 espiras de fio esmaltado AWG 24 (0,55 mm de diâmetro) dispostas em 4 camadas de 6 espiras e 3 camadas intermediárias de 5 espiras. O enrolamento é feito manualmente em um carretel desmontável de 3 placas de acrílico firmemente pressionadas por parafusos e porcas. A placa intermediária deve ter 3,3 mm de espessura de forma a acomodar exatamente 6 espiras de fio.

Fendas laterais de aproximadamente  $5 \times 7$  mm<sup>2</sup> (Figura 13) permitem aplicar um pouco de cola epoxi lenta entre uma camada e outra nas posições das fendas. Pequenas fendas de serra fina de 3 mm aproximadamente foram feitas para acomodar linha de nylon (0,5 mm), que é usada para amarrar o conjunto pressionando firmemente as camadas de fio até a cura da cola. Assim, ao desmontar o carretel tem-se a bobina já bastante rígida, mesmo antes de ser colada no suporte.

O quadro fixo foi feito de uma placa de acrílico de 4,7 mm de espessura, sendo a bobina colada diretamente nela. Este quadro corre sobre 4 parafusos longos de latão, sendo fixado neles por porcas e contraporcas grandes de PVC.

O quadro móvel foi construído com tiras e travessas de fibra de vidro coladas com epoxi. De um lado foi colada a bobina e do outro um suporte com furos de 4,7 mm regularmente espaçados para colocar massas. Neste lado foram fixados parafusos para acomodar porcas utilizadas como contrapesos para equilibrar o

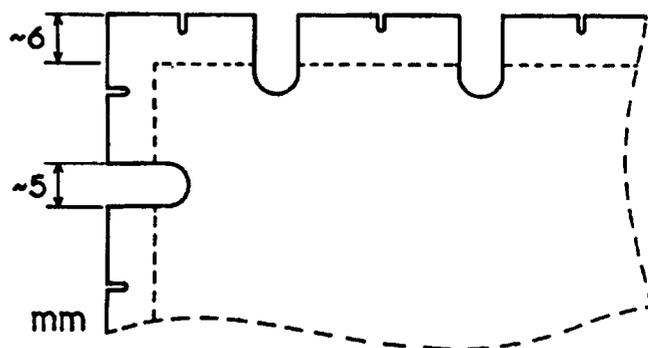


Figura 13: Fendas nas bordas do carretel para auxiliar o enrolamento das bobinas.

quadro móvel. As massas utilizadas são pequenos cilindros de latão e alumínio com rebaiços que se encaixam nos furos.

Os contatos elétricos para a bobina móvel são feitos pelas próprias facas de apoio (Figura 14).

A base da balança foi feita de acrílico ( $\sim 310 \times 300 \times 20$  mm<sup>3</sup>) tendo parafuso de apoio para nivelar a base. O nivelamento da base é importante para que ela sirva como referência para o nivelamento do quadro móvel.

Além dos 4 parafusos longos para o quadro fixo e dos suportes para apoio das facas, são fixados na base 3 batentes para o quadro móvel. Esses batentes são cilindros de PVC de cerca de 20 mm de diâmetro com parafusos nas pontas que são rosqueados diretamente na base. Assim a altura dos batentes pode ser ajustada e fixada com auxílio de contraporcas. Dois batentes do lado da bobina permitem fixar perfeitamente a altura da bobina e o terceiro, do lado do suporte de massas apenas impede que o quadro móvel caia completamente quando desequilibrado.

Na base foram montados também suporte de fusível (1,5 A) e resistor de  $2,7\Omega$ , tendo em paralelo, leds de advertência que se acendem fortemente para corrente maior que 1 A.

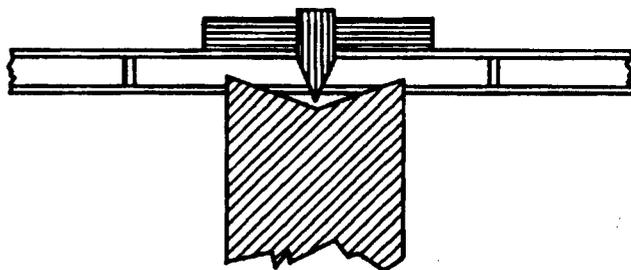


Figura 14: Faca de apoio do quadro móvel.

#### V. Procedimento Experimental

Conforme discutido em III.3.f, a balança deve ser orientada de forma a ter o condutor  $L_1$  e o campo

magnético externo em um mesmo plano vertical. A base da balança deve ser cuidadosamente nivelada para servir de referência para nivelamento do quadro móvel por ajuste da altura dos batentes. A seguir, o quadro fixo é cuidadosamente alinhado em relação ao quadro móvel e firmemente fixado. A distância  $r$  entre as bobinas deve ser medida em várias posições. Dependendo do cuidado e da paciência no alinhamento da bobina fixa e realização das medidas o erro estatístico em  $r$  pode ser menor que 0,1 mm. Entretanto, dependendo do procedimento adotado, pode existir erro sistemático da mesma ordem ou maior. Por outro lado, este erro sistemático pode ser parcialmente detectado na análise de dados.

Após ter a geometria bem definida, o quadro móvel deve ser equilibrado por meio dos contrapesos, realizando-se teste de sensibilidade com massa de 20 mg.

Colocando-se uma massa  $m$  a uma distância  $y$  da linha de apoio, aplica-se uma corrente elétrica maior que a suficiente para prender o quadro móvel. A seguir, a corrente é lentamente diminuída até que o quadro móvel se desprenda e se desequilibre totalmente para o lado da massa.

O centro de massa do quadro móvel está cerca de 3 mm acima da linha de apoio. Isto significa equilíbrio instável do quadro móvel. Uma vez que ele se desprenda da bobina fixa, ele se desequilibrará totalmente para o outro lado.

Em teoria, o procedimento acima descrito resultaria em valores sistematicamente menores para a corrente de equilíbrio, devido a inércia e pequeno atrito estático do quadro móvel combinados com o fato de a corrente estar diminuindo. Na prática não é bem assim, pois existem pequenas perturbações ambientais (vibrações e correntes de ar) que contribuem para desequilibrar o quadro móvel. Isto foi verificado observando-se que o quadro móvel muito bem equilibrado mas levemente apoiado nos batentes, se desequilibra de maneira aleatória. Num certo sentido, as pequenas perturbações externas contribuem positivamente para a experiência introduzindo pequena flutuação estatística nas medidas, mas certamente contribuindo para diminuir erro sistemático de leitura atrasada da corrente.

Um cuidado experimental adicional consiste em realizar 2 medidas em cada caso, para corrente elétrica num sentido e no sentido oposto, para reduzir efeito de campo magnético externo. O procedimento é discutido na Seção 7.

## VI. Outros Procedimentos e Experiências

Um procedimento experimental alternativo consiste em realizar a experiência sem os batentes de apoio do quadro fixo, mas reproduzindo a posição de equilíbrio por meio de um sistema tipo fiel de balança. Pode ser um fiel mecânico ou utilizando espelho e feixe luminoso.

Entretanto, neste caso, a condição deve ser de equilíbrio estável. Isto significa que a força magnética deve ser de repulsão e o centro de massa do quadro móvel deverá situar-se abaixo da linha de apoio. As 22 balanças construídas a partir do protótipo aqui descrito, foram adaptadas para funcionar também desta maneira.

A balança descrita pode também ser utilizada para medir campo magnético no entreferro de um ímã, simplesmente retirando-se a bobina fixa. Se o campo magnético  $B_e$  no entreferro for razoavelmente uniforme e seu comprimento  $l_e$  razoavelmente bem definido a força magnética será  $F = N i l_e B_e$ . Esta força pode ser facilmente determinada a partir da condição de equilíbrio de momentos para o quadro móvel.

## VII. Análise de Resultados Experimentais

Podem ser incluídas as forças devidas a um campo magnético externo  $\vec{B}_1$  (Figura 9) e também um torque  $\tau_0$  eventualmente existente devido a desequilíbrio inicial da balança. A condição de equilíbrio do quadro móvel pode ser escrita como

$$\alpha i^2 + \beta i = mgy + \tau_0 \quad (26)$$

onde

$$\alpha = \frac{\mu_0 N^2 (b + 2f) a}{2\pi r} \quad (27)$$

e

$$\beta = N a b B_1 \quad (28)$$

Realizando-se uma mesma medida com correntes em sentidos invertidos, o torque devido ao campo externo  $\vec{B}_1$  se inverte. Assim, a condição de equilíbrio (26) ocorre para correntes invertidas  $i_1$  e  $i_2$  diferentes. Isto é,

$$\alpha i_1^2 + \beta i_1 = mgy + \tau_0 \quad (29)$$

e

$$\alpha i_2^2 - \beta i_2 = mgy + \tau_0 \quad (30)$$

Somando estas equações e subtraindo uma da outra, obtém-se respectivamente

$$\alpha \frac{(i_1^2 + i_2^2)}{2} + \beta \frac{(i_1 - i_2)}{2} = mgy + \tau_0 \quad (31)$$

e

$$\alpha (i_1^2 - i_2^2) + \beta (i_1 + i_2) = 0 \quad (32)$$

ou

$$\alpha (i_1 - i_2) + \beta = 0 \quad (33)$$

Substituindo (33) em (31) obtém-se

$$\alpha \frac{(i_1^2 + i_2^2)}{2} - \frac{\beta^2}{2\alpha} = mgy + \tau_0 \quad (34)$$

ou

$$\alpha i_m^2 = mgy + \tau_1 \quad (35)$$

onde

$$i_m^2 = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2} \quad (36)$$

e

$$\tau_1 = \tau_0 + \frac{\beta^2}{2\alpha} \quad (37)$$

Como pode ser visto, a presença de um campo externo uniforme não afeta o funcionamento essencial da balança, tomando-se o cuidado de repetir a medida com correntes invertidas e calculando a corrente quadrática média conforme a equação (36).

Na verdade, conforme já mostrado, o simples cuidado de alinhar o condutor  $L_1$  e o campo da terra num mesmo plano vertical, permite reduzir o erro devido ao campo externo seguramente a menos de 1%. Neste caso, basta realizar uma única medida da corrente e utilizar diretamente a equação (35).

O procedimento adicional de medir correntes invertidas e usar as equações (35) e (36), se justifica somente no caso em que se deseja reduzir o erro devido ao campo externo à ordem de 0,1%.

Em qualquer caso, é importante alinhar o condutor  $L_1$  e o campo magnético terrestre num mesmo plano vertical conforme discutido em III.3.f.

### VIII. Resultados

As medidas foram realizadas alinhando-se o campo magnético externo (detetado pela bússola) e o condutor  $L_1$  num mesmo plano vertical. As correntes  $i_1$  e  $i_2$  (invertidas foram medidas diretamente com multímetro digital de 4 e 1/2 dígitos e também por medida de tensão em um resistor de 100 mΩ de manganina (0,1%). A comparação entre vários multímetros digitais de tipos, marcas e procedências diferentes permitiu concluir que o erro sistemático nas medidas de corrente é seguramente menor que 0,2%.

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 15, onde  $z$  e  $n$  são definidos por

$$z = \frac{i_m^2}{m} \quad (38)$$

e

$$y = n\Delta \quad n = 1, 2, 3, \dots, 21 \quad (39)$$

sendo  $i_m^2$  dado pela equação (36). Entretanto, as diferenças entre usar esta equação ou usar simplesmente a corrente média são menores que 0,1%. As diferenças entre as correntes  $i_1$  e  $i_2$  resultaram da ordem de 0,25%. Substituindo (38) e (39) em (35), obtém-se

$$z = An + B \quad (40)$$

onde

$$A = \frac{2\pi g \Delta}{\mu_0 N^2 (b + 2f)a} r \quad (41)$$

e

$$B = \frac{2\pi r \tau_1}{\mu_0 N^2 (b + 2f)am} \quad (42)$$

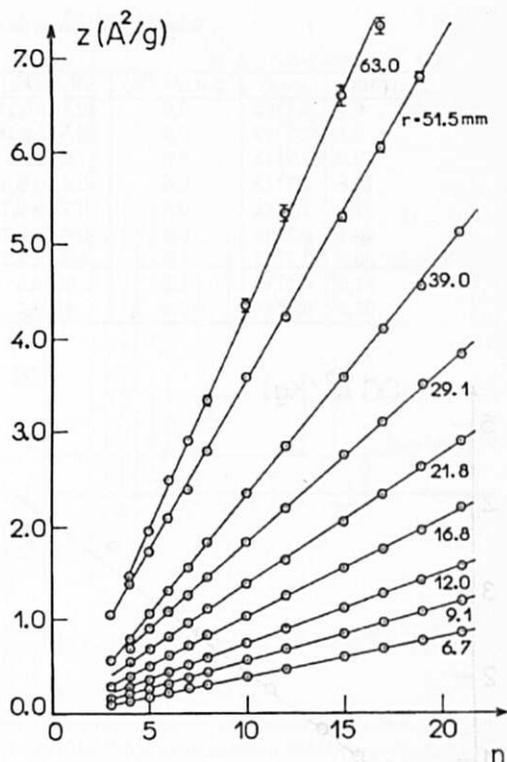


Figura 15: Resultados das medidas, onde  $z = i^2/m$  e  $y = n\Delta$ . As incertezas estatísticas são menores ou iguais aos raios dos círculos, exceto quando indicadas por barras.

A Tabela 2 indica para cada valor de  $r$ , a massa  $m$  utilizada e a incerteza estatística (desvio padrão) em  $z$ . A tabela reúne também os valores de  $A$ ,  $B$ , respectivas incertezas estatísticas e  $\chi_{red}^2$  para retas ajustadas conforme equação (40). O erro em  $r$  pode ser considerado estatístico para o conjunto global das medidas, mas é um erro sistemático em cada particular série de medidas com  $r$  fixo. Assim, as incertezas em  $A$  e  $B$  na Tabela 2 resultam somente das incertezas estatísticas em  $z$ .

A Figura 16 mostra o gráfico de  $A$  em função de  $r$  exibindo claramente o desvio em relação à equação (41) para valores maiores de  $r$ .

A força magnética real é a força magnética ideal (1) mais a correção dada pela equação (24), isto é,

$$F_m = (1 + \eta)F \quad (43)$$

Assim, o parâmetro  $A$  da equação (40) deve na reali-

Tabela 2 - Resumo de resultados para as medidas

r(mm)	m(g)	$\approx \sigma_z/z$ (%)	A(A <sup>2</sup> /kg)	B(A <sup>2</sup> /Kg)	$\chi^2_{red}$	$\tau_1(10^{-5}Nm)$	100 $\eta$ (%)
6,7	2,1312	0,6	40,74 $\pm$ 0,13	-0,65 $\pm$ 0,8	1,4	-2,4	0,2 $\pm$ 2,4
9,1	2,1312	0,6	56,51 $\pm$ 0,18	1,1 $\pm$ 1,1	1,1	0,3	-0,7 $\pm$ 1,9
12,0	1,7113	0,6	74,4 $\pm$ 0,3	3 $\pm$ 2	0,6	0,5	0,3 $\pm$ 1,6
16,8	1,7113	0,6	104,8 $\pm$ 0,3	-9,3 $\pm$ 2,1	1,3	-1,1	0,3 $\pm$ 1,4
21,8	1,2244	0,8	137,5 $\pm$ 0,7	4 $\pm$ 5	0,7	0,3	-0,4 $\pm$ 1,3
29,1	0,7763	0,8	186,6 $\pm$ 0,9	-42 $\pm$ 7	2,1	-1,3	-1,7 $\pm$ 1,3
39,0	0,7763	1,0	253,2 $\pm$ 1,2	-21 $\pm$ 7	1,6	-0,5	-2,6 $\pm$ 1,3
51,5	0,4747	1,5	355 $\pm$ 3	-28 $\pm$ 18	0,7	-0,3	-8,1 $\pm$ 1,3
63,0	0,4747	2,0	478 $\pm$ 6	489 $\pm$ 32	1,9	4,3	-16,4 $\pm$ 1,5

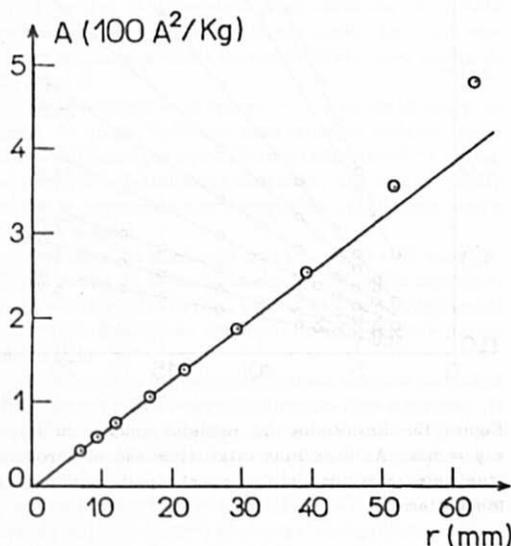


Figura 16: Gráfico A x r. A reta foi ajustada aos 5 primeiros pontos.

dade ser corrigido para

$$A_r = \frac{A}{1 + \eta} \quad (44)$$

ou

$$\eta = \left( \frac{A}{A_r} - 1 \right) \quad (45)$$

onde A é dado por (41) e A<sub>r</sub> é o valor experimental obtido da equação (40).

Conforme esperado pelos cálculos teóricos,  $\eta$  deve ser completamente desprezível ( $\eta < 0,5\%$ ) para  $r < 25$  mm, o que é bem verificado pelos resultados. Assim, foi ajustada uma reta

$$A = a_1 r + a_2 \quad (46)$$

considerando somente os 5 primeiros pontos da Figura 16, obtendo-se

$$a_1 = (6,37 \pm 0,06) A^2 / Kg \text{ mm} \quad (47)$$

e

$$a_2 = (-1,8 \pm 0,9) A^2 / Kg$$

A incerteza estatística em r, estimada em 0,1 mm, é transferida para A no ajuste, resultando  $\chi^2_{red} = 0,3$ . O valor de r correspondente a A = 0 é dado por

$$r_0 = -\frac{a_2}{a_1} = (0,28 \pm 0,14) \text{ mm}$$

Assim, o valor encontrado para a<sub>2</sub> é aceitável pois corresponde ao erro sistemático admissível nas medidas de r.

O valor de  $\mu_0$  que se obtém a partir de a<sub>1</sub> é dado por

$$\mu_0 = \frac{2\pi g \Delta}{N^2(b+2f)aa_1} = (4,01 \pm 0,04) \pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (48)$$

onde foi utilizado  $g = 9,786 \text{ m/s}^2$  e os demais valores são dados na Tabela 1. A principal contribuição para a incerteza em  $\mu_0$  é a própria incerteza em a<sub>1</sub> dada em (47). As incertezas em a = 160 mm e (b + 2f) = 240 mm foram estimadas em 0,5 mm. No caso de  $\Delta$  foi considerada uma incerteza de 0,5 mm para  $20\Delta = 152,4$  mm.

Os valores do torque residual  $\tau_1$  na equação (35) foram calculados e são mostrados na Tabela 2. A média quadrática é  $\overline{\tau_1} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Nm}$ , que a 10 cm do eixo da balança corresponde a um desbalanceamento de massas de 18 mg.

A Figura 17 mostra o gráfico de  $\eta$  em função de r, comparando os valores calculados na Seção 2 com valores experimentais obtidos pela equação (45).

## IX. Efeitos do Campo Magnético Terrestre

Conforme já mostrado o campo magnético externo deve ser alinhado ao condutor L<sub>1</sub>. Entretanto, para

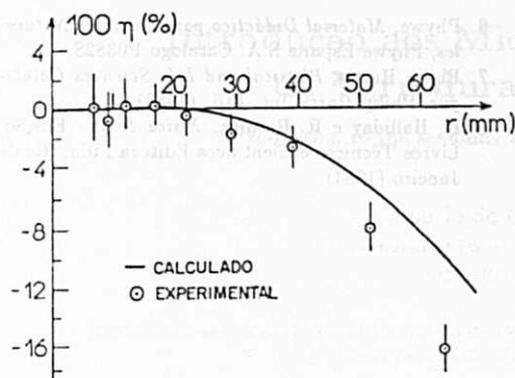


Figura 17: Desvios em relação a força ideal (1), calculado e obtido experimentalmente.

explicitar o efeito do campo externo foram realizadas 2 séries de medidas, uma delas com campo terrestre  $\vec{B}_T$  perpendicular a  $L_1$  e outra com  $B_T$  e  $L_1$  num mesmo plano vertical.

As diferenças  $\Delta i$  entre as correntes  $i_2$  e  $i_1$  em sentidos invertidos é mostrada na Figura 18. Os resultados mostram bom acordo com a equação (33). Isto é, a diferença  $\Delta i = i_2 - i_1$  deve ser constante e dada por

$$\Delta i = \frac{\beta}{\alpha} \quad (49)$$

ou

$$B_1 = \frac{\mu_0 N(b + 2f)\Delta i}{2\pi r b}$$

Substituindo valores para o caso de campo magnético da terra perpendicular a  $L_1$ , obtém-se para a componente horizontal deste campo o valor

$$B = (0,25 \pm 0,02)\text{Gauss}$$

O valor obtido está em bom acordo com outras medidas de  $B_T$  realizadas dentro das salas dos Laboratórios Didáticos do IFUSP. A incerteza indicada é o desvio padrão estatístico, sendo que pode existir erro sistemático ambiental. O resultado é apresentado apenas para ilustrar o funcionamento da balança e não houve nenhuma preocupação em eliminar ou determinar erros sistemáticos ambientais que podem ser bastante grandes no caso.

## X. Conclusões

A balança de corrente apresentada é bastante simples e de baixo custo requerendo apenas fonte de alimentação simples (12 V  $\times$  1,5 A) e amperímetro para realização de experiências.

Apesar da simplicidade a balança de corrente permite realizar várias experiências didáticas interessantes

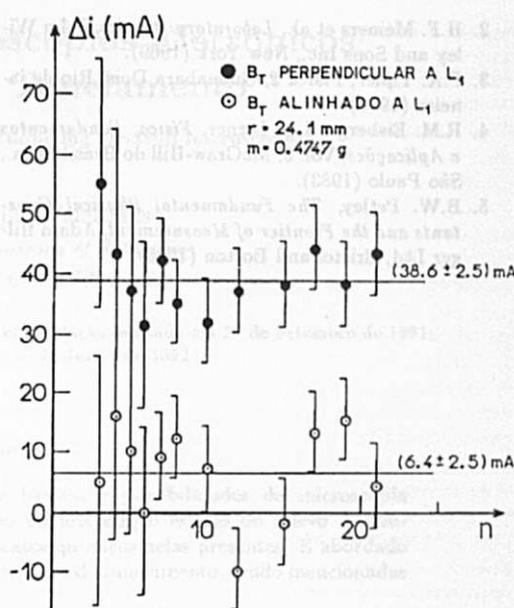


Figura 18: Diferenças nas correntes invertidas.

em diferentes níveis de refinamento. Podem ser facilmente planejados experimentos didáticos para serem realizados em 2 horas ou 4 horas. No caso de alunos do Curso de Física do IFUSP a experiência pode ser feita em 8 horas (2 semanas), com um volume de medidas próximo ao apresentado neste trabalho.

A incerteza final no resultado (48) para  $\mu_0$  foi obtido como combinação do desvio padrão estatístico e da incerteza sistemática conforme regra usual<sup>5</sup> (raiz da soma dos quadrados). Resultou assim uma incerteza final de 1%. No caso de resultados obtidos por alunos, o volume de dados seria menor, aumentando o erro estatístico. Além disso, os erros nas medidas geométricas serão possivelmente maiores devido à inexperiência e procedimentos inadequados. De qualquer modo estima-se que resultados obtidos por alunos apresentem desvios menores que 3% em geral e próximos de 1% para os mais cuidadosos e dedicados.

Colaboraram na construção da balança os técnicos R.D. Forcemo, C.U. Quinarelli, C.D. Forcemo e M. Alves, e na edição do texto I.T. Yokomizo.

Agradecimentos ao Prof. Giorgio Moscati pelas úteis considerações sobre Metrologia.

## Referências

1. IFUSP, *Apostilas de Laboratório de Física 3*, São Paulo (1990).

2. H.F. Meiners et al., *Laboratory Physics*, John Wiley and Sons Inc., New York (1969).
3. P.A. Tipler, *Física 2*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1978).
4. R.M. Eisberg e L.S. Lerner, *Física, Fundamentos e Aplicações*, Vol. 3, McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo (1983).
5. B.W. Petley, *The Fundamental Physical Constants and the Frontier of Measurement*, Adam Hilger Ltd, Bristol and Boston (1985).
6. Phiywe, *Material Didáctico para Ciências Naturales*, Phiywe Espana S.A. Catalogo P0382S.
7. Philip Harris, *Physical and Life Sciences Catalogue*, Philip Harris Int. Ltd. (1986).
8. D. Halliday e R. Resnick, *Física 3*, 4a. Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro (1984).