O Propagador de Feynman para o Oscilador Bi-Dimensional em um Campo Magnético Variável

(Feyman's Propagator for the Bi-dimensional Harmonic Oscillator in a Time-Varying Magnetic Field)

J. M. F. Bassalo e P. T. S. Alencar

Departamento de Física, Universidade Federal do Pará

Núcleo Universitário do Guamá, 66075-900, Belém, Pará, Brasil

Recebido em 13 de Junho de 1991; aceito para publicação em 9 de Dezembro de 1991

Resumo

Neste trabalho calculamos o propagador exato para o oscilador harmônico bi-dimensional variável em um campo magnético também variável. O método empregado nesse cálculo não usa a integral de caminho de Feynman e nem a formulação hidrodinâmica da Mecânica Quântica e sim o mesmo é calculado resolvendo a equação de Schrödinger. Utilizando uma apropriada transformação de escala sobre o espaço e o tempo, demonstramos que tal propagador pode ser obtido em função do propagador da partícula livre.

Abstract

We evaluate Feynman's propagator exactly for the time-dependent bi-dimensional charged harmonic oscillator in a time-varying magnetic field, by solving the Schrödinger equation. Through the usage of an appropriate space-time transformation, we show that such a propagator can be obtained from the *propagator for a free particle*.

I. Introdução

O cálculo do propagador para osciladores harmônicos dependentes do tempo tem aumentado nos últimos anos. Nesse cálculo, muitos procedimentos têm sido usados, tais como, a integral de caminho de Feynman[1-8], a formulação hidrodinâmica da Mecânica Quântica[9-13] e a resolução direta da equação de Schrödinger através de adequadas transformações de espaço e tempo[14-18]. Neste artigo, usaremos este último procedimento a fim de calcular o propagador de Feynman para um oscilador harmônico bi-dimensional dependente do tempo, na presença de um campo magnético, também dependente do tempo, propagador este escrito em função do *propagador livre*.

A equação de Schrödinger para o nosso problema (para $\hbar = 1$) é

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{1}{2m(t)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi \\ &+\frac{\omega_c(t)}{2i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\ &+\frac{1}{2}m(t)\Omega^2(t)(x^2+y^2) = \psi. \qquad (1) \end{aligned}$$

onde $\Omega^2(t) = \omega^2(t) + 1/4\omega_c^2(t)$, com $\omega(t)$ e $\omega_c(t) = qB(t)/m(t)c$ sendo, respectivamente, as frequências do oscilador e de ciclotron. O campo magnético $B(t)$ é aplicado ao longo do eixo dos z e o *gauge* é escolhido de tal modo que o potencial vetor $\vec{A}(t)$ é dado por $(\frac{1}{2}B(t)y, -\frac{1}{2}B(t)x, 0)$. Agora, vamos usar a seguinte transformação

$$x = s(\tau)\bar{x} \qquad (2a)$$

$$y = s(\tau)\bar{y} \qquad (2b)$$

onde

$$\tau(t) = \int^t \mu(\lambda)d\lambda; \qquad (3a)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \mu(t). \qquad (3b)$$

Em termos das novas variáveis $\bar{x}$, $\bar{y}$, τ, a equação (1) tomará a forma:

$$\left[i\mu\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{s'}{s}\bar{x}\frac{\partial}{\partial\bar{x}} - \frac{s'}{s}\bar{y}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2m(t)s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}\right) +$$

$$-\frac{\omega_c}{2i}\left(\bar{y}\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}-\bar{x}\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\right)+$$
$$-\frac{1}{2}m(t)\{\Omega^2(t)s^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\}\Big]\,\phi(\bar{x},\bar{y},\tau)=0, \quad (4)$$

onde a função $\phi(\bar{x},\bar{y},\tau)$ é a função de onda do problema original escrita em termos das novas variáveis $(\bar{x},\bar{y},\tau)$ e o primo (') indica derivada em relação ao parâmetro τ.

Agora, façamos o seguinte *WBK ansatz*[19-21]:

$$\phi(\bar{x},\bar{y},\tau)=\exp[i\ f(\bar{x},\bar{y},\tau)]\chi(\bar{x},\bar{y},\tau). \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (4), teremos

$$\Big[i\mu\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{2m(t)s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}\right)+$$
$$-\frac{\omega_c(t)}{2i}\left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}-\bar{x}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\right)+$$
$$-\frac{1}{2}m(t)s^2[\Omega^2(t)(\bar{x}^2+\bar{y}^2)]\chi(\bar{x},\bar{y},\tau)+$$
$$+i\frac{\partial\chi}{\partial\bar{x}}\left[\frac{1}{m(t)s^2}\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}-\mu\frac{s'}{s}\bar{x}\right]+$$
$$+i\frac{\partial\chi}{\partial\bar{y}}\left[\frac{1}{m(t)s^2}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-\mu\frac{s'}{s}\bar{y}\right]+$$
$$+\left(\frac{1}{2m(t)s^2}\left[i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\right.\right.$$
$$-\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\right)^2\right\}+$$
$$+\mu\frac{s'}{s}\left(\bar{x}\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}+\bar{y}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\right)-\mu\frac{\partial f}{\partial\tau}+$$
$$-\frac{\omega_c(t)}{2}\left(\bar{y}\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}-\bar{x}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\right)\Big]\,\chi(\bar{x},\bar{y},\tau)=0. \quad (6)$$

Vamos, agora, escolher $f(\bar{x},\bar{y},\tau)$ de tal modo que tenhamos

$$\frac{1}{m(t)s^2}\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}-\mu\frac{s'}{s}\bar{x}=0\quad\rightarrow$$
$$f(\bar{x},\bar{y},\tau)=\frac{1}{2}m(t)\mu s's\bar{x}^2+f_1(\bar{y},\tau) \quad (7.a)$$
$$\frac{1}{m(t)s^2}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-\mu\frac{s'}{s}\bar{y}=0\quad\rightarrow$$
$$f(\bar{x},\bar{y},\tau)=\frac{1}{2}m(t)\mu s's\bar{y}^2+f_2(\bar{x},\tau). \quad (7.b)$$

As equações (7a,b) levam à solução

$$f(\bar{x},\bar{y},\tau)=\frac{1}{2}m(t)\mu s's(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+f'(\tau), \quad (8)$$

onde $f'(\tau)$ é uma função arbitrária de τ a ser determinada.

Assim, inserindo-se as equações (7a,b) e (8) na equação (6), obtem-se

$$\left[i\mu\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{2m(t)s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}\right)\right]\chi(\bar{x},\bar{y},\tau)=$$
$$=\left(-i\mu\frac{s'}{s}+\mu\frac{df'}{d\tau}+(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\left[-\frac{1}{2}m(t)(s')^2\mu^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}m(t)s^2\omega^2+\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\tau}\{m(t)\mu s's\}\right]\right)\chi(\bar{x},\bar{y},\tau). \quad (9)$$

Agora, escolhamos as funções arbitrárias $f'(\tau),\mu(\tau)$ e $s(\tau)$ de tal maneira que tenhamos

$$-i\mu\frac{s'}{s}+\mu\frac{df'}{d\tau}=0\rightarrow f'=i\ \ln s, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2}m(t)(s')^2\mu^2+\frac{1}{2}m(t)s^2\omega^2+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\tau}\{m(t)\mu s's\}=0\rightarrow\ddot{s}+\frac{\dot{m}}{m}\dot{s}+\omega^2 s=0, \quad (11)$$

e

$$m(t)\mu s^2=1\rightarrow 2\frac{\dot{s}}{s}+\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\mu}}{\mu}=0, \quad (12)$$

onde o ponto (.) indica derivada em relação ao tempo t.

Portanto, substituindo-se as equações (10), (11) e (12) na equação (9), resultará

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}\right)\right]\chi(\bar{x},\bar{y},\tau)=0, \quad (13)$$

equação esta que representa a equação de Schrödinger para a partícula livre de massa unitária, cujo propagador vale[12]

$$\chi(\bar{x},\bar{y},\tau)=K_{\text{livre}}=[2\pi i\hbar(\tau-\tau_0)]^{-1}\cdot$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{2\hbar}[(\bar{x}-\bar{x}_0)^2+(\bar{y}-\bar{y}_0)^2]\cdot(\tau-\tau_0)^{-1}\right), \quad (14)$$

onde trouxemos de volta $\hbar$.

Finalmente, o propagador para o nosso problema inicial é dado por[16]

$$K(x,y,t;x_0,y_0,t_0)=\left\{\exp\left[\frac{i}{\hbar}f(\bar{x},\bar{y},\tau)\right]\cdot\right.$$
$$\left.\times K_{\text{livre}}\cdot\exp\left[-\frac{i}{\hbar}f^*(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\tau_0)\right]\right\}, \quad (15)$$

onde f^* é o complexo conjugado.

Por fim, substituindo-se as equações (8) e (10) na equação (15), o propagador procurado será:

$$K(x,y,t;x_0,y_0,t_0)=(ss_0)^{-1}\cdot K_{\text{livre}}\cdot$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{\dot{s}}{s}(x^2+y^2)-\frac{m_0\dot{s}_0}{2s_0}(x_0^2+y_0^2)\right]\right\}, \quad (16)$$

expressão essa que coincide com o resultado obtido por Nassar[13].

Referências

1. Cheng, B. K., *Rev. Bras. Fis.*, **13**, 360 (1983).
2. Cheng, B. K., *J. Math. Phys.*, **25**, 217 (1984).
3. Cheng, B. K., *J. Math. Phys.*, **27**, 804 (1986).
4. Cheng, B. K. and Chan, F. T., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**, 3771 (1987).
5. Dhara, A. K. and Lawande, S. V., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**, 2433 (1984a).
6. Dhara, A. K. and Lawande, S. V., *Phys. Rev.* **30a**, 360 (1984b).
7. Junker, G. and Inomata, A., *Phys. Lett.*, **110A**, 195 (1985).
8. Pak, N. K. and Sokmen, I., *Phys. Rev.* **30A**, 1629 (1984).
9. Nassar, A. B., Bassalo, J. M. F. and Alencar, P. T. S., *Phys. Lett.*, **113A**, 365 (1986).
10. Nassar, A. B., Bassalo, J. M. F., Antunes Neto, H. S. and Alencar, P. T. S.,*Il N. Cim.*, **93A**, 195 (1986).
11. Nassar, A. B., Bassalo, J. M. F., Antunes Neto, H. S. and Alencar, P. T. S., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**, L891 (1986).
12. Nassar, A. B. and Berg, R. T., *Phys. Rev.*, **34A**, 2462 (1986).
13. Nassar, A. B., *Physica* **141A**, 24 (1987).
14. Ray, J. R.,*Phys. Rev.*, **26A**, 729 (1982).
15. Ray, J. R.,*Phys. Rev.*, **28A**, 2603 (1983).
16. Farina de Souza, C. and Dutra, A. S., *Phys. Lett.*, **123A**, 297 (1987).
17. Bassalo, J. M. F., Botelho, L. C. L., Antunes Neto, H. S. and Alencar, P. T. S.,*Rev. Bras. Fís.* **19**, 598 (1989).
18. Dutra, A. S. and Castro, A. S., *Eur. J. Phys.* **10**, 194 (1989).
19. Wentzel, G., *Z. Phys.*, **38**, 518 (1926).
20. Kramers, H. A., *Z. Phys.*, **39**, 829 (1926).
21. L. Brillouin, *Comp. rend.*, **183**, 24 (1926).
22. Feynman, R. P. and Hibbs, A. R., 1965. *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, N. Y.