O Limite de Roche

(Roche's Limit)

Wilson Lopes

Universidade de Guarulhos, Praça Tereza Cristina 01, 07020, Guarulhos, SP

Universidade de Mogi das Cruzes, Caixa Postal 411, 08780, Mogi das Cruzes, SP

Recebido em 7 de Janeiro de 1991; revisão feita pelos autores recebida em 3 de Maio de 1991. Aceito para publicação em 30 de Agosto de 1991

Resumo

Através do raio dinâmico de influência gravitacional em torno de uma partícula sólida e de forma esférica, uma nova expressão para o Limite de Roche foi obtida. Aplicando-se essa expressão às partículas pertencentes ao anel D, de Saturno, obteve-se para os raios interno e externo, respectivamente, as densidades de 2,05 e 1,49 kg/m^3 que são valores razoáveis quando comparados com as densidades dos satélites de Saturno.

Abstract

A new expression for Roche's Limit was obtained through the dynamical radius of gravitational influence around a solid and spherical particle. Appplying this expression to particles belonging to Saturn's D ring the densities of 2,05 and 1,49 kg/m^3 were found for the internal and external radius, respectively. These values are reasonable when compared to the densities of Saturn satellites.

I. Introdução

Newton foi o primeiro cientista a explicar a causa das marés. através das forças de atração gravitacionais, exercidas pela Lua e pelo Sol, nas águas dos oceanos. A Lua, pelo motivo de estar muito mais proóxima da Terra, produz marés oceânicas cerca de duas vezes maiores que aquelas produzidas pelo Sol. Essas marés provocam um aumento no período de rotação da Terra de, aproximadamente, três milésimos de segundo por século, e a Lua, por sua vez, afasta-se da Terra.

Se fosse possível aproximar a Lua, comportando-se como um líquido, da Terra, a menor distância entre os centros dos dois astros, de tal maneira que a força de maré, exercida pela Terra sobre a Lua, e a força de autogravitação da Lua, ainda, estivessem em equilíbrio, seria de 2,97R (R representa o raio da Terra). Essa distância é chamada de Limite de Roche.

Aplicando-se o Limite de Roche ao anel D, de Saturno, na suposição de que as partículas constituintes do anel se comportem como um líquido, encontram-se densidades muito elevadas: entre 5,28 e 7,23g/cm^3. Propôs-se, então, através do raio dinâmico de influência gravitacional, em torno de uma partícula sólida e de forma esférica, uma nova expressão para o Limite de Roche, e, através dela, obteve-se para as partículas do anel D, as densidades entre 1,49 e 2,05g/cm^3.

II. Intervalo de tempo entre duas marés sucessivas

Quando a Lua e o Sol se alinham com a Terra, durante as fases de Lua cheia ou Lua nova, são produzidas as marés mais altas. As marés mais baixas são produzidas nas fases de quarto crescente e quarto minguante[1].

Com a Lua na posição C, da Figura 1, o observador, no ponto A_1, registra, no instante t, a altura máxima da maré. Devido aos movimentos de rotação da Terra, em torno de seu eixo, e de revolução da Lua, em torno da Terra, o mesmo observador registrará o segundo ponto de máxima altura da maré no ponto B_1, no instante $t + \Delta t$. Desta maneira, enquanto a Lua se desloca de C até D, correspondente ao ângulo $\alpha = w_L \cdot \Delta t = 2\pi \cdot \Delta t/T_L$, o observador se deslocou, juntamente, com a Terra, de A_1 até B_1, correspondente ao ângulo $\alpha+\pi = w_T \cdot \Delta t = 2\pi \cdot \Delta t/T_T$. Eliminando-se o ângulo α, entre as duas equações, tem-se:

$$\Delta t = T_L \cdot T_T/[2 \cdot (T_L - T_T)], \quad (1)$$

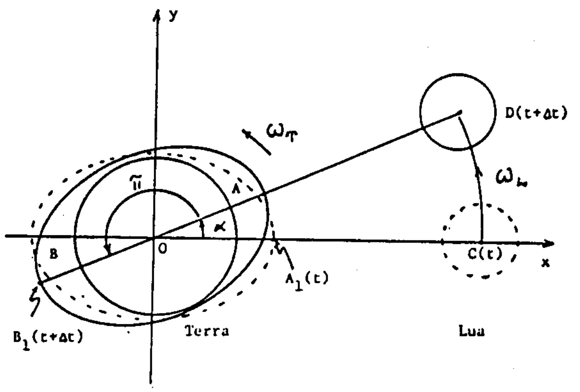

Figura 1: A figura mostra o sistema Terra-Lua no plano XOY e as marés A e B, produzidas na Terra pela Lua.

onde $T_T = 1,00$ dia e $T_L = 27,3$ dias representam, respectivamente, o período de rotação da Terra e o período de revolução da Lua. A equação (1) fornece o intervalo de tempo médio entre duas marés sucessivas, de 12h e 27min, que está de acordo com os resultados encontrados à beira-mar[2].

As marés não são produzidas, somente, na parte líquida da Terra, mas também na sua parte sólida e na sua atmosfera. A parte sólida da Terra é, inegavelmente, menos deformável do que a sua parte líquida, por isso, as marés nas rochas são mais baixas que as oceânicas. As elevações e decréscimos no nível da água, que se observa nas praias, portos, etc., resulta da diferença entre as marés na parte líquida e na sólida da Terra. Aproximadamente, duas vezes ao dia, elevam-se montanhas, cidades, vales, etc., e as pessoas, longe da orla marítima não se apercebem do fato. Da mesma maneira, seria impossível de um barco, em alto mar, perceber a subida e descida das águas sem nenhuma ilha por perto[1].

Supondo que as partes sólida e líquida da Terra fossem, respectivamente, perfeitamente elástica e perfeitamente fluida, as marés seriam o resultado dos efeitos instanâneos das forças de atração gravitacionais e as alturas máximas das marés ocorreriam sempre na direção do corpo atrativo, no caso da Figura 1, a Lua[3].

III. Efeitos das marés

Não sendo, contudo, a parte sólida, da Terra, perfeitamente elástica, nem a parte líquida perfeitamente fluida, as alturas máximas das marés não ocorrem quando a Lua está, diretamente, acima do observador, mas, sim, um pouco depois. Este fato produz, na Terra, um efeito de torção com tendência a retardar o movimento de rotação em torno de seu eixo, causando na Lua um efeito de torção, igual em intensidade e de sentido contrário, com tendência a acelerar seu movimento orbital. Assim, a Terra perde energia cinética de rotação, pois uma parte é dissipada em calor pelo atrito das marés nas praias, no fundo dos oceanos, etc., e a outra é transferida ao movimento orbital da Lua[3].

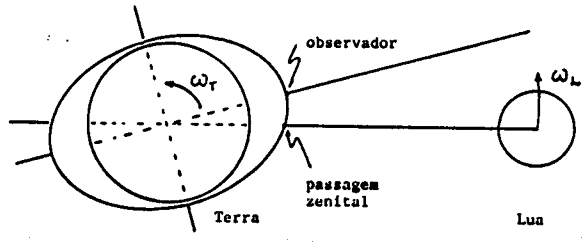

Figura 2: A figura mostra os bojos das marés, na Terra, não na direção da Lua, mas logo após a sua passagem zenital.

Supondo ser a desaceleração angular da Terra, constante e igual a $\theta = -8,2 \times 10^{-22}\text{rad/s}^2$, daqui a um século de quanto estará acrescido o seu período de rotação[4]?

Para responder à pergunta deve-se lançar mão da expressão do movimento circular de aceleração constante, a saber: $w = w_0 + \theta \cdot \Delta t$. Substituindo-se, na expressão, w e w_0, respectivamente, por $2\pi/(T_0+\tau)$ e $2\pi/T_0$, resolvendo em τ, que é muito pequeno, vem:

$$\tau \simeq -T_0^2 \cdot \theta \cdot \Delta t/2\pi \qquad (2)$$

Substituindo-se, na expressão (2), $T_0 = 24h = 8,64 \times 10^4$s e $\Delta t = 1$ século $= 3,15 \times 10^9$s, tem-se: $\tau = 3,10 \times 10^{-3}$s. Desta maneira, o *relógio terrestre* está atrasando de, aproximadamente, três milésimos de segundo por século.

IV. Hipótese de Darwin

Com a deconfiança, através de registros fósseis, de que o período de rotação da Terra, em torno de seu eixo, estava aumentando, G. H. Darwin (filho de C. R. Darwin, célebre naturalista inglês, autor de: *Da origem das espécies por via de seleção natural*) sugeriu, em 1880, que a Lua poderia ter-se formado a partir de um corpo primário que girava, em torno de seu eixo, com período de, aproximadamente, 4,0h. Esse corpo primário já deveria conter um núcleo de materiais pesados, densidade média em torno de $5,5 \times 10^3$ kg/m^3 e densidade superficial da ordem de $2,8 \times 10^3$kg/m^3, muito semelhante à Terra de nossos dias[3].

Qual seria o período de oscilações livres desse corpo primitivo?

Uma maneira bem simples de responder à pergunta é considerar, no corpo primitivo, uma coluna líquida que se estenda do pólo norte até o pólo sul e que realize oscilações sem atrito (ver Figura 3). Desta maneira, a força restauradora sobre a coluna líquida é dada por: $F = -\Delta m \cdot g = -\mu_s \cdot A \cdot 2y \cdot g$, onde μ_s, g e A são, respectivamente, a densidade superficial média, a aceleração da gravidade do corpo primitivo e a área da

Tabela 1: Através da equação (2) foram calculados os intervalos de tempo correspondentes à duração do dia, nas várias fases de transformação da história da Terra[5].

Início da idade dos eventos	Δt (anos)	τ (s)	Duração do dia (horas)
Cambriando	$6,00 \times 10^8$	18.434	18,88
Ordoviciano	$5,00 \times 10^8$	15.362	19,73
Siluriano	$4,40 \times 10^8$	13.518	20,24
Devoniano	$4,00 \times 10^8$	12.289	20,59
Carbonífero	$3,50 \times 10^8$	10.753	21,01
Permiano	$2,70 \times 10^8$	8.295	21,70
Triássico	$2,25 \times 10^8$	6.913	22,08
Jurássico	$1,80 \times 10^8$	5.530	22,46
Cretáceo	$1,35 \times 10^8$	4.148	22,85
Paleoceno	$7,00 \times 10^7$	2.151	23,40
Eoceno	$6,00 \times 10^7$	1.843	23,49
Oligoceno	$4,00 \times 10^7$	1.229	23,66
Mioceno	$2,50 \times 10^7$	768,1	23,79
Plioceno	$1,10 \times 10^7$	338,0	23,91
Pleistoceno	$1,00 \times 10^6$	30,72	23,99

secção reta da coluna líquida. Essa força restauradora acelera a coluna líquida, de comprimento 2R e densidade média μ. Portanto, pela segunda lei de Newton, tem-se: $F = m \cdot d^2y/dt^2 = \mu A \cdot 2R \cdot d^2y/dt^2$. Igualando-se essas forças, obtém-se:

$$d^2y/dt^2 + (\mu_s g/\mu R) \cdot y = 0. \tag{4}$$

A expressão (4) representa um movimento harmônico simples, de período dado por:

$$T = 2\pi(\mu R/\mu_s g)^{1/2}. \tag{5}$$

Assumindo os valores: $R = 6,3 \times 10^6$m e $g = 10$m/s^2, a expressão (5) fornece um período de, aproximadamente, 2,0h[6].

Sendo de 4,0h o período de rotação do corpo primitivo, em torno de seu eixo, as marés sucessivas, produzidas pelo Sol, aconteceriam com um intervalo de tempo de 2,0h; de modo que o período dessas marés coincidiria com o período das oscilações do corpo primitivo, ocasionando ressonância. Essa ressonância poderia fazer com que a altura das marés fossem cada vez mais altas, até que se desprendesse do corpo primitivo. A partir desse momento, segundo Darwin, estavam criadas a Terra e a Lua.

O apoio à teoria de Darwin reside no fato de ter a Lua densidade média de $3,0 \times 10^3$kg/m^3. Portanto, ela teria se formado a partir das rochas superficiais do corpo primitivo, que deu origem à Terra. Outro argumento, mais recente, em favor da teoria é que a velocidade com que a Lua se afasta da Terra, de 5,6cm/ano, é compatível com o intervalo de tempo de 4,6 bilhões de anos, que representa a provável idade do sistema solar[4].

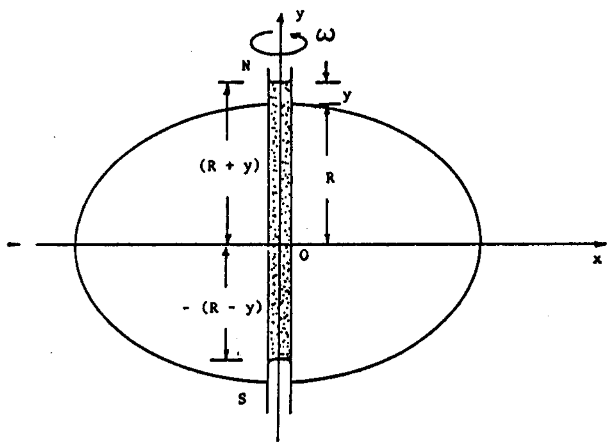

Figura 3: A figura mostra uma coluna líquida estendida do pólo norte ao pólo sul, do corpo primitivo, que realize oscilações sem atrito.

V. O limite de Roche para uma partícula líquida

Ao lado dos argumentos em favor da teoria de Darwin há sérias objeções. Em 1850, o astrônomo e matemático francês E. Roche demonstrou, teoricamente,que se um satélite, com características de um corpo líquido, se aproximasse do planeta central, a uma distância inferior a um certo limite, as forças de marés do planeta sobre o satélite, se tornariam maiores que as forças de autogravitação, do satélite, dando origem à sua desintegração.

Para o sistema Terra-Lua, onde a massa da Terra é, aproximadamente, 81,3 vezes maior que a massa da Lua, e para uma distância mútua da ordem do limite de Roche, a Lua, devido às forças de marés exercidas pela Terra, apresentaria, acentuadamente, a forma de um prolato elipsóide, enquanto que a Terra não perderia, significativamente, sua forma esférica[4].

Desta maneira, o limite de Roche pode ser calculado através da seguinte equação[4] :

$$r_L = 2,42(M^*/M)^{1/3} \cdot (\mu/\mu_1)^{1/3} \cdot R \tag{6}$$

onde M^*, M, μ e R são, respectivamente, a massa efetiva, a massa, a densidade média e o raio da Terra; a densidade média da Lua é representada, em (6), por μ_1.

A razão entre a massa efetiva da Terra e sua massa é calculada pela seguinte expressão:

$$M^*/M = [1 + m/3M - (1 + m/M) \cdot (c/3R)]/(1 - c/R) \tag{7}$$

onde c e m são, respectivamente, o semi-eixo maior do prolato elipsóide (forma assumida pela Lua) e a massa da Lua[4].

Sendo, para o sistema Terra-Lua, $M^*/M = 1,12$ e $\mu/\mu_1 = 1,65$, a expressão (6) fornece, para o limite de Roche:

$$r_L = 2,97R, \tag{8}$$

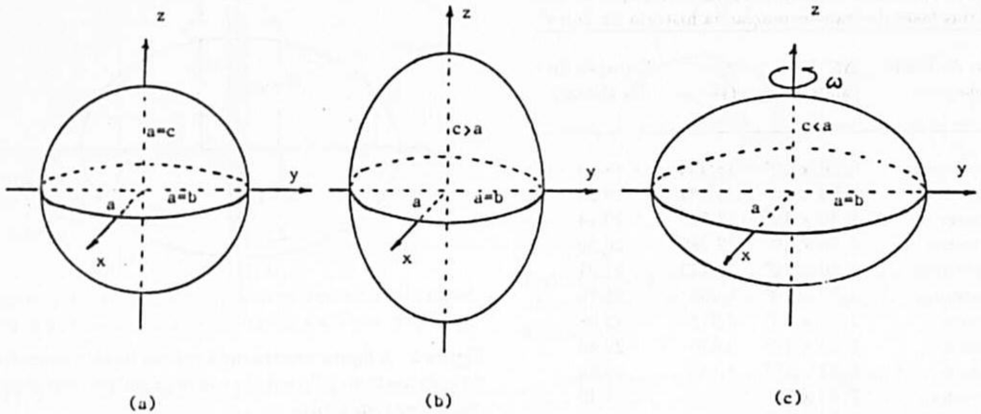

Figura 4: A figura mostra as possíveis formas assumidas por um corpo, que obedece às leis de fluido ideal e é autogravitante: a) O corpo não apresenta movimento de rotação e é solitário; forma esférica. b) O corpo está sujeito às forças de marés; prolato elipsóide. c) O corpo gira em torno de seu eixo e as forças de marés são desprezíveis; oblato elipsóide.

que seria a menor distância entre os centros da Terra e da Lua, para que as forças de marés, exercidas pela Terra sobre a Lua, e as forças de autogravitação, da Lua, estivessem, ainda, em equilíbrio. Para distâncias menores que esse limite a Lua se desintegraria. Este resultado exclui a possibilidade de que a Lua teria, em outra época, se desgarrado da "Terra", contrariando a teoria de Darwin.

A expressão (6) aplicada a uma partícula, que obedece às leis de fluido ideal, de densidade μ_L, massa $m << M$ e semi-eixo, $c << R$ (com estas restrições, a expressão (7) fornece $M^*/M = 1,00$), fornece

$$r_L = 2,42 \cdot (\mu/\mu_L)^{1/3} \cdot R. \qquad (9)$$

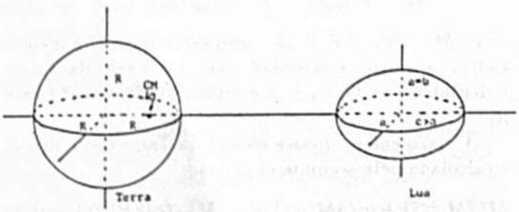

Figura 5: A figura mostra a Terra, com sua forma esférica, e a Lua, muito próxima do limite de Roche, assumindo a forma de um prolato elipsóide. Terra e Lua giram em torno de um centro de massa comum ao sistema.

VI. O limite de Roche para uma partícula sólida

O raio dinâmico de influência gravitacional, em torno de uma partícula sólida e esférica, de raio R_s e massa M_s, descrevendo um movimento circular, de raio r, em torno de um planeta, é dado por:

$$r_d = (M_s/4M)^{1/3} \cdot r, \qquad (10)$$

onde M representa a massa do planeta[7].

Na expressão (10), à medida que a distância r vai diminuindo, diminui, também, o raio de influência gravitacional, r_d, em torno da partícula. Assumindo-se, então, $r_d = R_s$, a distância da partícula ao planeta assume o valor do limite de Roche, a saber:

$$R_s = (M_s/4M)^{1/3} \cdot r_L^*. \qquad (11)$$

Substituindo-se, em (11), $M_s = 4\pi \cdot R_s^3 \cdot \mu_s/3$, $M = 4\pi \cdot R^3 \cdot \mu/3$ e resolvendo a expressão em r_L^*, tem-se:

$$r_L^* = 1,59 \cdot (\mu/\mu_s)^{1/3} \cdot R, \qquad (12)$$

que representa o limite de roche em torno do planeta, de densidade média μ e raio R, para uma partícula sólida e de densidade μ_s.

Se todas as partículas que constituem os anéis de Saturno estivessem nos seus respectivos limites de Roche, quais deveriam ser, então, as suas densidades? A Tabela 2, construída com o auxílio das equações (9) e (12), responde a essa pergunta, fornecendo as respectivas densidades para partículas líquidas e sólidas.

Tabela 2: A tabela foi construída com o auxílio das equações (9) e (12). As duas últimas colunas fornecem, respectivamente as densidades médias de partículas líquidas e sólidas, para os anéis de Saturno, na suposição de que estivessem nos limites de Roche. O raio e a densidade média de Saturno foram assumidos, respectivamente, como $R = 6,03 \times 10^7 m = 1,00R$ e $\mu = 0,70 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$. As abreviações (int), (cen) e (ext) significam, respectivamente, raio interno, raio central e raio externo do anel[8].

Anel		$Dist. \times 10^{-7}$ (m)	$Dist. \times R^{-1}$	$\mu_L \times 10^{-3}$ (kg/m^3)	$\mu_s \times 10^{-3}$ (kg/m^3)
	(int)	6,70	1,11	7,23	2,05
D	(cen)	-	-	-	-
	(ext)	7,44	1,23	5,28	1,49
	(int)	7,44	1,23	5,28	1,49
C	(cen)	-	-	-	-
	(ext)	9,19	1,52	2,80	0,79
	(int)	9,19	1,52	2,80	0,79
B	(cen)	-	-	-	-
	(ext)	11,7	1,95	1,36	0,38
	(int)	12,2	2,02	1,20	0,34
A	(cen)	-	-	-	-
	(ext)	13,7	2,27	0,85	0,24
	(int)	-	-	-	-
F	(cen)	14,0	2,33	0,79	0,22
	(ext)	-	-	-	-
	(int)	-	-	-	-
G	(cen)	17	2,8	0,44	0,13
	(ext)	-	-	-	-
	(int)	18	3,0	0,37	0,11
E	(cen)	-	-	-	-
	(ext)	48	8,0	0,020	0,0056

Tabela 3: A tabela fornece a distância dos vários satélites, ao centro de Saturno, e suas respectivas densidades[8].

Satélite	$Dist. \times 10^{-7}$	$Dist. \times R^{-1}$ (m)	$Dens. \times 10^{-3}$ (kg/m^3)
1980S28	13,8	2,28	?
1980S27	13,9	2,31	?
1980S26	14,2	2,35	?
1980S3	15,1	2,51	?
1980S1	15,1	2,51	?
Mimas	18,6	3,08	1,44
Companheiro de Mimas	18,6	3,1	?
Encélado	23,8	3,95	1,16
Tétis	29,5	4,88	1,21
1980S13	29,5	4,88	?
1980S25	29,5	4,88	?
Dionéia	37,7	6,26	1,43
1980S6	37,8	6,27	?
Réia	52,7	8,74	1,33
Titã	122	20,3	1,88
Hipérion	148	24,6	?
Jápeto	356	59,0	1,16
Febe	1300	215	?

A Tabela 3 fornece as distâncias dos satélites, ao centro de Saturno, e suas respectivas densidades. Após a descoberta do anel E, de raio externo 8,0R, medido a partir do centro de Saturno, todos os satélites com distâncias menores se encontram no sistema de anéis, a partir do satélite 1980S6.

VII. Conclusões

A expressão (1) foi obtida de uma maneira muito simples. Fizemos a suposição de que a Lua descrevesse, em torno da Terra, um movimento circular e isto não é, absolutamente, correto. Na realidade, Terra e Lua descrevem seus movimentos em torno de um centro de massa comum ao sistema e considerando um movimento elíptico, para a Lua, poderia trazer, como conseqüência, flutuações positivas e negativas, em relação ao intervalo de tempo médio de 12h e 27min entre duas marés sucessivas. Estas flutuações, em torno desse intervalo de tempo médio, poderiam justificar os diferentes intervalos de tempo, entre marés sucessivas, observadas à beira mar[2]. Contudo, mesmo com este tratamento simples, imposto à solução do problema, a expressão (1) fornece um intervalo de tempo diferente daquele de 12 em 12h, como afirmam alguns livros didáticos de Física e de divulgação de Astronomia.

As marés, provocadas pela ação gravitacional da Lua e do Sol, trazem, como conseqüência, um aumento no período de rotação da Terra, em torno de seu eixo de, aproximadamente, três milésimos de segundo por século. Este é um dos fatores que levaram os cientistas a formularem uma nova definição para a unidade de tempo, tornando-a independente do movimento de rotação da Terra.

Na suposição de que a desaceleração angular da Terra tenha se mantido constante, durante todos estes anos de sua história, obtivemos a equação (2) e, com esta equação, a Tabela 1. Observa-se que os corais atuais mostram cerca de 360 anéis de crescimento por ano, enquanto que, os corais do Devoniano apresentavam cerca de 400 anéis de crescimento[3]. Concluimos, a partir destas observações, que deveriam ser do conhecimento de G. H. Darwin, que no período do Devoniano o dia deveria ter, aproximadamente, 21,6h, que é compatível com o resultado obtido na Tabela 1. Com o conhecimento, através destes registros fósseis, de que o período de rotação da Terra estava aumentado, Darwin pôde concluir, através da conservação do momento angular, que a Lua deveria estar afastando-se da Terra. No início, segundo Darwin, a Terra e a Lua constituíam um único corpo.

Aproximadamente, trinta anos antes de Darwin propor sua teoria sobre as origens do sistema Terra-Lua, E. Roche havia sugerido uma distância limite, de máxima aproximação, entre a Terra e a Lua, definida pela equação (8), de valor 2,97R. Teria a Lua se desgarrado da "Terra" e estado a distâncias menores que 2,97R, sem contudo se desintegrar, violando o limite de Roche?

Após a descoberta do anel E, anel mais externo de Saturno, com raio externo de 8,0R ($R = 6,03 \times 10^7 m$ representa o raio de Saturno), todos os satélites, a partir do satélite 1980S6, estão contidos no sistema de anéis. Se o sistema de anéis foi formado por satélites que se desintegraram, por se encontrarem à distâncias, do centro de Saturno, menores que seus respectivos limites de Roche, por que, então, esses satélites "sobreviveram"? Devemos advertir que não há nenhuma incompatibilidade física neste fato, pois o limite de Roche diminui com o aumento da densidade do satélite. Um satélite de densidade média 2,0g/cm^3, em forma de aglomerado, e comportando-se como um líquido, segundo E. Roche, poderia "sobreviver", aproximadamente, entre os anéis B e A. Contudo, o mesmo satélite na forma de um sólido "sobreviveria", até mesmo no anel D (ver Tabela 2).

Se o satélite 1980S28, o mais próximo de Saturno, localizado entre os anéis A e F, estivesse, exatamente, no seu limite de Roche e comportando-se como um líquido, deveria apresentar densidade média de 0,84g/cm^3. Comportando-se como um sólido, então, sua densidade média seria, somente, de 0,24g/cm^3. Por outro lado, se ele não se encontra, exatamente, no seu limite de Roche, concluímos ser sua densidade média superior a 0,84g/cm^3.

Qual seria a densidade do satélite que gerou o anel D? Como poderia ter-se encostando tanto em Saturno? Se o satélite tivesse comportamento líquido, para "sobreviver" às forças de marés e chegar a essa distância do centro de Saturno, de 1,11R, deveria ter densidade média, da ordem de 7,0g/cm^3, que é muito exagerada. Com comportamento de um sólido, esse mesmo satélite, poderia ter atingido o anel D, com densidade média de 2,0g/cm^3, que seria uma densidade um pouco mais razoável para os satélites de Saturno.

Referências

1. Gamow, G., *Biografia da Terra*, Editora Globo, 1973.
2. Kulesza, W., Revista de Ensino de Física, vol. 10, dez., 1988.
3. Gass, I. G., Smith, P. J., Wilson, R. C. L., *Vamos Compreender a Terra*, Livraria Almedina, Coimbra, 1984.
4. Stacey, F. D., *Physics of the Earth*, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
5. Bisque, R. E., Heller, R. L., *Investigando a Terra*, Mc.Graw-Hill, 1973.
6. Seto, W. W. *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, Schaum Publishing Co., New York, 1964.
7. Lopes, W., Revista da U.M.C., vol. 2, dez., 1990.
8. Stone, E. C. and Miner, E. D., Science, vol. 215, 29 de janeiro, 1982.