Revista de Ensino de Física vol. 13 dez/1991 34-62

UM MOMENTO LINEAR POTENCIAL?
(A Linear Potential Momentum?)

ILDEU DE C. MOREIRA
Instituto de Física - UFRJ
Cidade Universitária - Ilha do Fundão
21941 Rio de Janeiro, RJ

RESUMO

Neste trabalho, a partir da analogia com a introdução do conceito de energia potencial, exploramos a idéia de se utilizar o conceito de momento linear (angular) potencial e discutimos as situações nas quais é possível a conservação de um momento linear (angular) generalizado. Fazemos algumas aplicações destas idéias a sistemas mecânicos simples, como o movimento de uma partícula em um meio com atrito que depende linearmente da velocidade, ou no caso de uma carga elétrica em um campo magnético constante e em campo elétrico uniforme. Como exemplo de momento angular generalizado, analisamos a conservação do vetor introduzido por Poincaré para o movimento de uma carga elétrica no campo de um monopolo magnético.

ABSTRACT

Based on an analogy with the introduction of the potential energy concept, the idea of using the concept of linear (angular) potential momentum is explored and situations in which it is possible the conservation of a generalized linear (angular) momentum are discussed. In addition, some examples are given concerning the application of these ideas to simple mechanical systems such as the motion of a particle in a medium with friction depending linearly on speed or the motion of an electric charge in uniform electric and magnetic fields. The conservation of the vector introduced by Poincaré for the motion of an electric charge in the field of a magnetic monopole is analysed as an example of generalized angular momentum conservation.

1. INTRODUÇÃO

A idéia da conservação de uma quantidade física em todos os processos da natureza, a energia, amadureceu e se consolidou ao longo de vários séculos até se transformar em um conceito de importância capital na Física e em outras ciências. Os modelos físicos hoje predominantes, a menos de críticas e especulações importantes, porém residuais[1], atribuem caráter conservativo a todas as interações fundamentais da natureza.

A energia cinética de uma partícula colocada em um campo externo em geral não se conserva. Em uma das vertentes históricas que conduziram à conservação da energia, a que tem origem na mecânica analítica, descobriu-se, porém, que em muitos casos, era possível construir uma nova quantidade conservada - a energia mecânica - acrescentando-se à energia cinética o termo denominado de energia potencial que correspondia à interação entre a partícula e o campo. Isto é possível de ser feito nos casos em que o vetor força puder ser representado pelo gradiente de uma função escalar, a energia potencial. A energia mecânica tem, nesse caso, duas partes distintas: a energia cinética, proveniente do movimento da partícula, e a energia potencial associada à partícula e dependente da posição relativa desta em relação às fontes do campo (e eventualmente dependente também do instante de tempo).

Para outras quantidades físicas, cujas leis de conservação são também importantes na mecânica, como o momento linear e o angular, não se efetua um procedimento análogo.Quando, por exemplo, o momento linear de uma partícula não se conserva, em geral não se buscam situações onde sua definição possa ser generalizada, pelo acréscimo à sua parte cinética de uma parte "potencial", para que uma nova quantidade conservada seja obtida. Ao contrário do caso da energia, o conceito de momento linear usualmente utilizado contém somente uma parte dependente da massa e da velocidade da partícula; quando a partícula interage, por exemplo, com o campo eletromagnético, falamos de momentos lineares (e angulares) associados ao campo (para que a conservação global seja mantida) mas não se procura atribuir à esta parte de interação um significado de momento "potencial" da partícula.

Discutiremos aqui esta possibilidade: a de estender o procedimento empregado no caso da energia para o momento linear e angular, procurando identificar as situações onde tais generalizações fazem sentido e suas limitações[2]. Fazemos isto por razões predominantemente didáticas, tendo tal análise surgido em cursos de mecânica para alunos de licenciatura, onde se procurava tornar mais clara a importância da idéia da lei de conservação da energia e as características que a distinguem das outras leis de conservação. Os objetivos desta discussão são, então:

i) Analisar, num exemplo simples, como um conceito físico poderia ser introduzido, investigando seu significado e limitações; isso, mesmo em casos tão simples quanto este, pode ser interessante na medida em que os conceitos e modelos são introduzidos em muitos livros-texto de maneira desligada das razões físicas e históricas que justificaram sua criação e como se fossem meras definições formais;

ii) Explorar eventuais aplicações da idéia introduzida em problemas elementares da mecânica. Não se trata de obter resultados novos, mas de simplificar deduções e de olhar sob um ângulo conceitual diferente problemas já familiares.

Iniciamos repetindo, resumidamente, a dedução da lei da conservação da energia mecânica como encontrada na maior parte dos livros-texto para, em seguida, analisar a possibilidade de proceder analogamente com o momento linear (seção II). Fazemos algumas aplicações simples na seção II e discutimos também a relação entre o momento linear "potencial" introduzido e o momento canônico para a partícula em um campo eletromagnético; nesta seção mostraremos também que o espaço de fase de Liénard, introduzido por este na análise de sistemas dissipativos com ciclos-limites, é, na realidade, um espaço de fase constituído a partir do momento linear "generalizado" e da cooordenada da partícula. O mesmo procedimento da seção II é aplicado para o caso do momento angular no item III onde tomamos como exemplo o potencial que surge da interação entre uma carga elétrica e um monopolo magnético.

II. MOMENTO LINEAR "POTENCIAL"

a) A Conservação da Energia:

A conservação da energia mecânica é geralmente demonstrada através do chamado Teorema Trabalho-Energia.

Se uma partícula de massa m for submetida a uma força $\vec{F}$, ao longo de um trajeto, a variação de sua energia cinéti ca será medida pelo trabalho realizado pela força neste trajeto (dedução proveniente da segunda Lei de Newton):

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = W_{1\to 2} \qquad (1)$$

Se o trabalho realizado ao longo de qualquer trajeto entre os pontos 1 e 2 for o mesmo, podemos introduzir uma função potencial em cada ponto do espaço:

$$\int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = -[U_2-U_1] = -\Delta U \qquad (2)$$

A condição global para que isto ocorra é, então, que o trabalho realizado pela força seja independente do trajeto (ou $\oint\vec{F}.d\vec{r}=0$, para qualquer trajeto fechado), o que localmente leva à condição $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$. A força pode, então, de (2), ser expressa como o gradiente do potencial $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$. A função potencial foi introduzida em 1773 por Lagrange e a denominação de "potencial" foi dada por Green em 1828.

Neste caso, de (1) e (2), teremos a conservação da energia mecânica total, constituída da soma das energias cinética e potencial:

$$\Delta E_c = W_{1\to 2} = -\Delta U$$

$$\therefore \quad \Delta(E_c + U) = 0 \qquad (3)$$

ou seja,

$$E_T = E_c + U = \text{constante}. \qquad (4)$$

Se forças que não conservam a energia, $\vec{F}_{NCE}$, estiverem presentes, o Teorema Trabalho-Energia leva a:

$$\Delta(E_c + U) = \int_1^2 \vec{F}_{NCE} . d\vec{r} = W_{1\to 2 \, NCE} \quad . \tag{5}$$

b) O Momento Linear:

Vamos analisar a conservação do momento linear de maneira similar ao caso da energia. O momento linear usual foi introduzido por Jean Buridan, no século XIV, empregado por Descartes[3] como a quantidade conservada fundamental da natureza e utilizado por Newton[4] na formulação da segunda lei; é de natureza fundamentalmente cinética, sendo constituído pelo produto da massa e da velocidade, $\vec{p} = m\vec{v}$, e se conserva para o movimento livre da partícula.

Na presença de forças externas a variação de $\vec{p}$ é dada pela forma integral da 2ª lei de Newton:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F} . dt \ . \tag{6}$$

A integral em (6) é denominada de impulso (Belanger, 1847), especialmente nos casos em que o intervalo de tempo de atuação da força for muito curto.

O momento linear será conservado em todos os pontos do trajeto se $\vec{F} \equiv 0$. Esta lei de conservação pode ser generalizada, de maneira análoga ao caso da energia, para situações onde o impulso tenha a forma:

$$\int_1^2 \vec{F}.dt = -(\vec{c}_2-\vec{c}_1) \tag{7}$$

onde $\vec{c} = \vec{c}(\vec{r},t)$, ou, equivalentemente, se

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{c}}{dt} = -[\frac{\partial\vec{c}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{c}]. \tag{8}$$

Neste caso (6) e (7) fornecem:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2-\vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F}.dt = -(\vec{c}_2-\vec{c}_1)$$

e, portanto,

$$\vec{p}_1+\vec{c}_1 = \vec{p}_2+\vec{c}_2 = \text{constante}. \tag{9}$$

Por analogia, de (7) e (9) com (2) e (4), chamaremos o vetor $\vec{c}$ de momento linear "potencial" e definiremos o momento linear generalizado $\vec{p}$ como constituído da soma do momento linear usual com o momento linear "potencial"

$$\vec{P} = m\vec{v} + \vec{c}(\vec{r},t) \tag{10}$$

que será conservado se a condição (7) ou (8) for satisfeita. A expressão (7) permite a obtenção de $\vec{c}$ conhecida a força (se esta for "conservativa" para o momento linear) e (8) permite determinar a força a partir do conhecimento de $\vec{c}$. Observe-se que, de (7), o vetor $\vec{c}$ está definido a menos de um vetor de componentes fixas, no ponto tomado como referência, em analogia com o valor arbitrário da energia potencial no ponto de referência.

Na presença de forças que não obedeçam à condi -

ção (8), $\vec{F}_{NCP}$, a variação de $\vec{P}$ será por:

$$\Delta\vec{P} = \Delta(\vec{p} + \vec{c}) = \int_1^2 \vec{F}_{NCP}\, dt, \qquad (11)$$

onde o último termo corresponde ao "impulso" das forças que não conservam $\vec{P}$.

Note-se que a condição (8) para que $\vec{F}$ possa ser expressa como a derivada temporal total de um vetor $\vec{c}(\vec{r},t)$ é mais restritiva que a condição (2) para que a força seja conservativa em relação à energia. Isto restringe muito a aplicabilidade do conceito introduzido. Um exemplo simples mostra, no entanto, que em certos casos onde a força não é conservativa (em relação à energia) ela pode satisfazer à condição (8), levando à conservação do momento linear generalizado.

Considere a partícula submetida a uma força de atrito linear com a velocidade $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$; neste caso a energia claramente não se conserva, mas a condição (8) é verificada

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v} = -\frac{d}{dt}(\lambda\vec{r})$$

e o momento linear generalizado $\vec{P} = m\vec{v} + \lambda\vec{r}$ será conservado. O vetor momento linear "potencial" será dado por $\vec{c} = \lambda\vec{r}$ (escolhendo-se $\vec{c}(0) = \vec{0}$). A utilização da conservação de $\vec{P}$ facilita a resolução do problema, embora neste caso, esta seja trivial. É interessante assinalar que no caso unidimensional, podemos utilizar representações gráficas, para este tipo de problema, análogas aos gráficos de energia (Fig.1).

A seguir ilustraremos, em alguns exemplos de áreas variadas da mecânica, o uso da idéia de momento linear "potencial" buscando identificar eventuais utilidades.

c) Aplicações:

i) Consideremos um problema amplamente tratado em todos os textos de mecânica: o movimento de projéteis próximo à superfície da Terra. A partícula sofrerá a ação do peso e do atrito com o ar:

$$\vec{F} = -mg\hat{j} - \lambda\vec{v} \qquad (13)$$

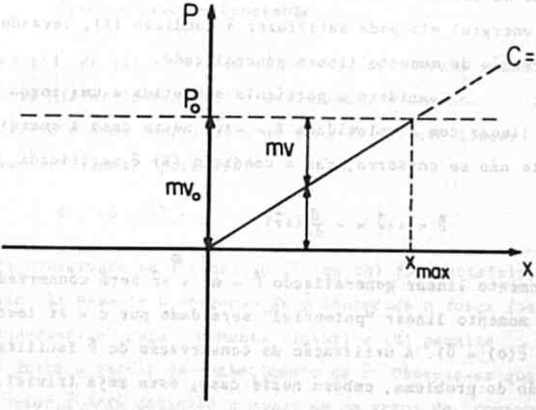

Fig. 1 - Gráfico de Momento Linear x Posição

Equação de Movimento: $\vec{F} = -\lambda\dot{x}$.

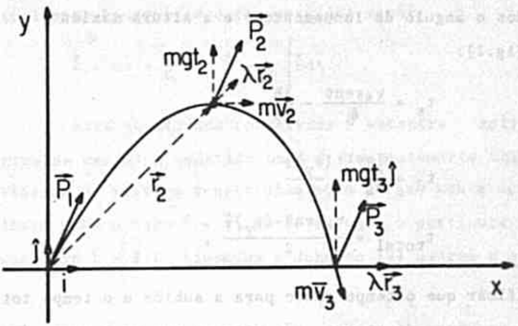

Fig. 2 - Movimento de Projéteis com Atrito Linear.

Esta força satisfaz à condição (8) e o momento linear "potencial" é:

$$\vec{c} = mgt\hat{j} + \lambda\vec{r} \qquad (14)$$

com a escolha $\vec{c}(\vec{r}=\vec{0},t=0) = \vec{0}$.

O momento linear generalizado, que se conserva, tem a forma:

$$\vec{P} = m\vec{v} + (mgt\hat{j} + \lambda\vec{r}). \qquad (15)$$

A figura 2 esquematiza o movimento da partícula e indica as componentes "cinética" e "potencial" de $\vec{P}$.

As duas componentes (horizontal e vertical) de $\vec{P}$ podem ser utilizadas para calcular os tempos de subida e descida do projétil e fornecem informações sobre as velocidades e posições em instantes diferentes. É imediato calcular, por exemplo, da conservação de $\vec{P}$, os tempos de subida e descida, se forem co nhecidos o ângulo de lançamento θ e a altura máxima atingida h[Fig.2]:

$$t_s = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{\lambda h}{mg}$$

$$t_d = \frac{\lambda h}{mg} - \frac{(v_y)_1}{g}$$

$$t_{total} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta - (v_y)_1}{g} ,$$

e verificar que o tempo gasto para a subida e o tempo total no ar, na presença de atrito, são menores que os tempos dispendidos se o atrito com o ar não for considerado.

Já no caso sem atrito $\vec{P}$ é usado, sem designação especial, na determinação do vetor velocidade em vários instantes de tempo (figura 3, caso unidimensional), enquanto a conservação da energia fornece o módulo da velocidade a cada altura.

ii) No caso de uma partícula carregada colocada em uma região com campo elétrico uniforme e campo magnético constante e uniforme a força de Lorentz tem a forma:

$$\vec{F} = q\vec{E}(t) + \frac{q}{c_0}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{16}$$

Estamos supondo que a variação de $\vec{E}$ com o tempo seja lenta para que o campo magnético produzido por esta variação não precise ser considerado.

Esta força satisfaz à condição (8) com o momento linear "potencial":

$$\vec{c} = -q\int \vec{E}dt + \frac{q}{c_0}\vec{B} \times \vec{r}. \tag{17}$$

O momento linear generalizado (conservado) será:

$$\vec{P} = m\vec{v} + \frac{q}{c_0}\vec{B}\times\vec{r} - q\int\vec{E}dt. \tag{18}$$

Esta quantidade conservada $\vec{P}$ encontra aplicações importantes em mecânica quântica onde é freqüentemente utilizada na quantização do sistema constituído pela carga, sob a ação de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Assim para o caso $\vec{E} = \vec{0}$, ou seja, para a partícula no campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{k}$, Lippmann e Johnson [5] usaram o observá

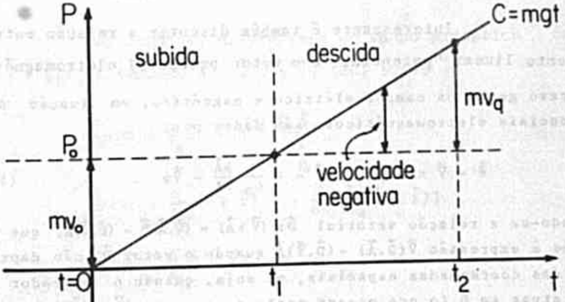

Fig. 3 - Gráfico P x t. Objeto Lançado Verticalmente com v_0.

vel $\vec{P}$, chamando-o de "pseudomomentum", para quantizar o sistema e obter os níveis de Landau aproveitando-se do fato de que, sendo uma quantidade conservada, o espectro de autovalores e autove tores de $\vec{P}$ é fixo no tempo.

É interessante distinguir também os quatro tipos de momentos lineares envolvidos neste problema:

$\vec{p} = m\vec{v}$: momento linear "cinético"

$\vec{p}_{can} = m\vec{v} + \frac{q}{2c_0}\vec{B} \times \vec{r}$: momento linear canônico

$\vec{c} = \frac{q}{c_0}\vec{B} \times \vec{r} - q\int \vec{E}\, dt$: momento linear "potencial"

$\vec{P} = m\vec{v} + \frac{q}{c_0}\vec{B} \times \vec{r} - q\int \vec{E}\, dt$: momento linear "generalizado"

Interessante é também discutir a relação entre o momento linear "potencial" e o vetor potencial eletromagnético $\vec{A}$. No caso geral os campos elétrico e magnético, em função dos potenciais eletromagnéticos, são dados por:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \; ; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \quad . \tag{19}$$

Usando-se a relação vetorial $\vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla}.\vec{A})\vec{D} - (\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{A}$, que se reduz à expressão $\vec{\nabla}(\vec{D}.\vec{A}) - (\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{A}$ quando o vetor $\vec{D}$ não depender das coordenadas espaciais, ou seja, quando o operador $\vec{\nabla}$ não atuar em $\vec{D}$ (o que ocorre neste caso porque $\vec{D} = \vec{v}$), a equação de Lorentz (16), em termos dos potenciais $\vec{A}$ e ϕ, se torna:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{q\vec{A}}{c_0}\right) = q\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}.\vec{A}}{c_0} - \phi\right) \tag{20}$$

Vemos que quando o segundo membro de (20) se anular o vetor potencial eletromagnético $\vec{A}$ poderá ser interpretado como o momento linear "potencial":

$$\frac{q\vec{A}}{c_0} = \vec{c} \iff \vec{\nabla}.\left[\frac{\vec{V}.\vec{A}}{c_0} - \phi\right] = 0. \tag{21}$$

Se o segundo membro de (20) não for nulo, mas puder ser colocado na forma

$$q\ \vec{\nabla}[\frac{\vec{V}.\vec{A}}{c_o} - \phi] = -\frac{d\vec{D}}{dt} \tag{22}$$

teremos

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} + \vec{c}) = 0$$

com

$$\vec{c} = \frac{q}{c_o}\vec{A} + \vec{D} \tag{23}$$

Por exemplo, na presença do campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{k}$, e tomando $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$, (20) será:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + \frac{q}{c_o}\vec{A}) = q\ \vec{\nabla}(\frac{\vec{V}.\vec{A}}{c_o})$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + \frac{q}{2c_o}\vec{B} \times \vec{r}) = -\frac{d}{dt}[\frac{1}{2c_o}(\vec{B} \times \vec{r})]$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\vec{v} + \frac{q}{c_o}\vec{B} \times \vec{r}) = 0$$

daí $\vec{P} = m\vec{v} + \frac{q}{c_o}\vec{B} \times \vec{r} =$ constante, (24)

como já tínhamos obtido em (18).

A conservação de $\vec{P}$ nos permite determinar todas as características do movimento de uma carga em um campo magnético constante. Supondo $\vec{B}$ perpendicular ao plano da órbita da partícula carregada, indicamos diagramaticamente na figura 4 como se dá esta conservação.

Se multiplicarmos vetorialmente $\vec{P}$ em (24), por $\vec{B}$, temos.

$$\vec{P} \times \vec{B} = m\vec{v} \times \vec{B} + \frac{q}{c_o}(\vec{B} \times \vec{r}) \times \vec{B}$$

e daí

$$\vec{r} = \frac{c_o}{qB^2}\vec{P} \times \vec{B} - \frac{mc_o}{qB^2}\vec{v} \times \vec{B} \qquad (25)$$

onde usamos a relação: $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{C}.\vec{A})\,\vec{B} - (\vec{C}.\vec{B})\,\vec{A}$ e o fato que $\vec{B}.\vec{r} = 0$. Como o primeiro termo do segundo membro desta expressão é constante, podemos definir um novo vetor posição $\vec{R}$ onde

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_o = \vec{r} - \frac{c_o}{qB^2}\vec{P} \times \vec{B}$$

Logo, de (25).

$$\vec{R} = \frac{mc_o}{qB^2}\vec{B} \times \vec{v} \qquad (26)$$

Se tomarmos o produto escalar de $\vec{R}$ e $\vec{v}$ verificamos imediatamente que estes dois vetores são perpendiculares entre si $(\vec{R}.\vec{v}=0)$.

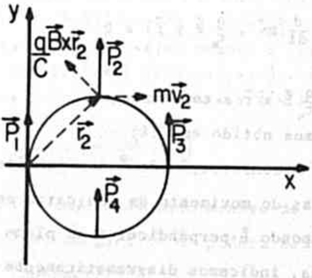

Fig. 4 - Movimento de Carga em Campo Magnético Constante.

De (25) e (26) percebe-se que o movimento da carga será circular, com raio $R = \frac{mc_y}{qB}$, centrado em $\vec{r}_0 = \frac{c\vec{P}\times\vec{B}}{qB^2}$, e com velocidade angular $w = \frac{mc_0}{qB}$. Para esta escolha da origem $\vec{P} = \vec{0}$.

iii) O movimento de um objeto caindo próximo à superfície da Terra, em relação a um sistema de referência ligado à Terra, receberá a influência das seguintes forças (não se considerando o atrito com o ar): a força de Coriolis, a força centrífuga e o peso:

$$\vec{F} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - mg\hat{i}$$

Se $\vec{\omega}$ for constante $\vec{F}$ terá a forma (8) com

$$\vec{c} = 2m\vec{\omega}\times\vec{r} + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\int\vec{r}dt) + mgt\hat{i} \tag{27}$$

e, portanto, o momento linear generalizado

$$\vec{P} = m\vec{v} + 2m\vec{\omega}\times\vec{r} + m\vec{\omega}(\vec{\omega}\times\int\vec{r}dt) + mgt\hat{i} \tag{28}$$

será conservado. Essa expressão não é muito útil nesta forma, já que o terceiro termo depende do conhecimento do trajeto descrito para ser integrado. No entanto, quando ele puder ser desprezado, o que ocorrerá quando $\omega<<1$, de maneira que este termo, quadrático em ω, seja pequeno em relação aos outros, a conservação de $\vec{P}$ poderá ser utilizada diretamente; isso ocorre, por exemplo, para um objeto solto de uma torre vertical, no Equador, com velocidade inicial nula (figura 5).

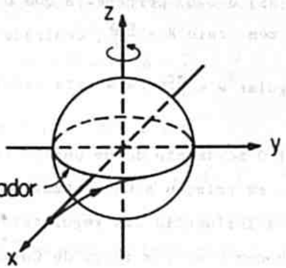

Fig. 5 - Queda Livre de Grande Altura.

As componentes de $\vec{P}$ são, nesse caso:

$$P_y \cong m\dot{y} + 2m\omega x \qquad (29)$$

$$P_x \cong m\dot{x} + mgt. \qquad (30)$$

De (29) e (30), e por integração, chegamos ao desvio aproximado da partícula em relação à vertical:

$$y \cong \frac{\omega g t^3}{3}$$

Este resultado pode ser facilmente generalizado para o objeto sendo solto de um ponto próximo à superfície da Terra com uma latitute ϕ qualquer.

iv) Consideremos, agora, uma equação de movimento' unidimensional, não linear, dissipativa e com a expressão:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(t) = 0, \qquad (31)$$

onde tomamos como unitária a massa da partícula.

A condição (8) é satisfeita por (31) e o momento linear "potencial" será:

$$c = \int f(x)dx + \int g(t)dt \tag{32}$$

e o momento linear "generalizado"

$$P = \dot{x} + \int f(x)dx + \int g(t)dt \tag{33}$$

Na presença de forças $F_{NCP}(x,\dot{x},t)$ que não satisfaçam (8) teremos a relação:

$$\Delta P = - \int_1^2 F_{NCP}dt \tag{34}$$

para a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(t) = F_{NCP}(x,\dot{x},t). \tag{35}$$

Um caso importante, considerado por Liénard e outros matemáticos, é o da equação do tipo:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + h(x) = 0. \tag{36}$$

Para determinadas condições a serem satisfeitas por f(x) e h(x)[6] esta equação terá uma solução periódica estável isolada, o chamado ciclo-limite (atrator unidimensional). Liénard [7] introduziu um critério para a existência destes ciclos-limites fazendo uso do momento linear "potencial" aqui introduzido, embora não pareça ter atribuído a ele nenhum significado físico especial.

Para a equação (36) Liénard definiu as seguintes quantidades:

$$y = \dot{x} + F(x) \tag{37}$$

e

$$z = y^2 + G(x) \tag{38}$$

onde

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx \quad e \quad G(x) = \int_0^x h(x)dx.$$

Vemos que y constitui exatamente P e z pode ser interpretado como uma energia armazenada na oscilação [6]. A taxa de variação da energia $\frac{dz}{dt}$ será:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{P^2}{2} + G(x)\right] \tag{39}$$

e com o uso da equação de movimento (36) chegamos a:

$$dz = F(x)dP \tag{40}$$

Se o sistema estiver em um estado de oscilação estacionário, temos o seguinte critério de Liénard para a existência de um ciclo-limite:

$$\oint F(x)dP = 0. \tag{41}$$

Esta integral, como destaca Minorsky [6], especifica as trocas de energia que ocorrem entre o sistema oscilante e as fontes externas e, portanto, o critério de Liénard tem a interpretação simples de que um estado estacionário será atingido quando as energias absorvidas e dissipadas durante um ciclo se cancelarem.

Liénard usou P para definir um espaço de fase (P,x), diferindo do espaço de fase usual(p,x), e introduziu um método elegante de construir as curvas integrais neste seu plano de fase.O leitor interessado em maiores detalhes poderá consultar a referência [6], capítulo 4, páginas 108 a 110. Quisemos apenas destacar aqui que a utilização de gráficos (P,x) pode ser útil na análise do comportamento qualitativo de sistemas dissipativos do tipo (36), do mesmo modo que os gráficos de energia nos auxiliam na análise de problemas conservativos unidimensionais.

III. *MOMENTO ANGULAR "POTENCIAL"*

O mesmo procedimento que utilizamos ao introduzir o conceito de momento linear "potencial" pode ser empregado na análise do momento angular de uma partícula. O momento angular usualmente definido para uma partícula constitui-se da parte cinética:

$$\vec{L}_{cin} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{42}$$

Na presença de um torque externo sua variação (em relação a pontos de referência em sistema inercial) é dada por:

$$\frac{d\vec{L}_{cin}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{43}$$

Daí

$$\Delta\vec{L}_{cin} = \int_1^2 \vec{\tau}.dt \tag{44}$$

que é a expressão análoga a (1) e a (6).

Se

$$\int_1^2 \vec{\tau}.dt = -(\vec{G}_2-\vec{G}_1) \tag{45}$$

ou, de maneira equivalente, se

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{d\vec{G}}{dt} = -[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{G}] \tag{46}$$

teremos a conservação do momento angular generalizado:

$$\vec{L}_{gen} = \vec{L}_{cin} + \vec{G} = \text{constante} \tag{47}$$

e, por analogia, denominaremos $\vec{G}$ de momento angular "potencial".

A expressão análoga a (5) a (11) será:

$$\Delta\vec{L}_{gen} = -\int_1^2 \vec{\tau}_{NCL}.dt\ . \tag{48}$$

Consideremos três exemplos:

i) Um dos casos mais simples em que o torque satisfaz às condições (46) é o de uma partícula carregada movendo-se em um plano perpendicular a um campo magnético constante e uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$. Teremos então:

$$\vec{F} = \frac{q}{c_0}\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q}{c_0} B_0 (\dot{y}\hat{i} - \dot{x}\hat{j})$$

e o torque só terá componente na direção $\hat{k}$:

$$\tau_z = -\frac{qB_o}{c_o}(y\dot{y} + x\dot{x})$$

ou seja,

$$-\tau_z = \frac{d}{dt}\left[\frac{q}{2c_o}(x^2 + y^2)B_o\right] \qquad (49)$$

onde o torque é calculado em relação a um ponto qualquer do plano onde se dá o movimento.

Nesse caso o momento angular total conservado, obtido de (47), será:

$$(L_{gen})_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y) + q\frac{(x^2 + y^2)}{2c_o}B_o \qquad (50)$$

O termo $\frac{qr^2}{2c_o}B_o = G_z$ pode ser interpretado como um momento angular "potencial" surgido da interação da carga elétrica com o campo magnético externo. Ao escolhermos a origem no centro da órbita circular descrita pela carga esse termo fica constante e pode ser eliminado pela escolha do momento angular "potencial" neste ponto (de (45)).

ii) Um caso interessante ocorre quando a partícula carregada move-se nas proximidades de um campo eletromagnético com simetria radial, onde a única componente não nula de $\vec{A}$ é A_θ, que é independente de θ. Pode ser mostrado diretamente que a componente em θ do momento angular generalizado é conservada e vale:

$$L_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{q}{c_o}A_\theta r \qquad (51)$$

Panofsky e Phillips [8], que discutem este exemplo e o aplicam na análise do movimento de um elétron em uma lente magnetostática constituída por um solenoide, denominam esta lei de "conservação do momento angular canônico". A expressão (51) pode, então, ser útil na análise de várias situações onde ocorre espalhamento de partículas carregadas em campos eletromagnéticos axi-simétricos.

iii) Uma outra solução para F obtida por inspeção e que produz um torque satisfazendo (46) é:

$$\vec{F} = f(t,\vec{r},\vec{v})\vec{r} + \alpha \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \tag{52}$$

onde α é uma constante.

Nesse caso,

$$\vec{G} = - \frac{\alpha\vec{r}}{r} \tag{53}$$

e teremos a conservação de:

$$\vec{L}_{gen} = m\vec{r} \times \vec{v} - \frac{\alpha\vec{r}}{r} . \tag{54}$$

Como aplicação imediata tomemos a equação de movimento de uma carga elétrica interagindo com um monopolo de carga magnética g, fixo na origem,

$$m\ddot{\vec{r}} = - \frac{qg}{c_0} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \tag{55}$$

Essa equação tem a forma de (52), com $f = 0$ e $\alpha = qg/c_0$. O momento angular generalizado e conservado será, portanto,

$$\vec{L}_{gen} = m\vec{r} \times \vec{v} - \frac{qg}{c_0}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (56)$$

A direção de $\vec{L}_{gen}$ fixa o eixo do cone (com apex na origem) sobre o qual ocorre o movimento da carga e seu módulo leva a uma segunda lei de Kepler (lei das áreas) sobre o cone [9].

Podemos interpretar, portanto, o segundo termo de (56) como um momento angular "potencial" produzido pela interação da carga elétrica com o campo do monopolo magnético. Esta interpretação é razoável haja vista o fato de que a conservação de $\vec{L}_{gen}$ está relacionada à simetria da equação do movimento(55) sob o grupo de rotações, fato este que se repete para o momento angular usual no caso das forças centrais. J. J. Thomson [10] um dos primeiros a analisar o movimento para a carga resultante de (55), em seu famoso livro "Elements of Eletricity and Magnetism", denomina o segundo termo de (56) de "moment of momentum of the ether".

Ao quantizar este sistema, em 1931, Dirac [11] obteve - devido à expressão (56), onde o momento angular, como é habitual em Mecânica Quântica, terá valores discretos - a relação de quantização entre o valor da carga elétrica e o do monopolo magnético: $\frac{qg}{c_0} = \frac{n\hbar}{2}$, onde n é inteiro.

Veremos, agora, que esse momento angular "potencial" da carga tem origem realmente na interação de seu campo elétrico com o campo magnético do monopolo.

Supondo o elétron colocado a uma distância d da origem, na direção $\hat{k}$, (figura 6), podemos calcular o momento an gular associado ao campo total, produzido pela carga elétrica e pelo monopolo magnético:

$$\vec{L}_{campo} = \int \frac{1}{4\pi c_0} \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV \tag{57}$$

realizando a integração em todo o espaço. Por causa da simetria axial somente a componente de $\vec{L}_{campo}$ na direção $\hat{k}$ será não nula e será também independente do ângulo azimutal ϕ. Denominando de r_1 a distância de um ponto genérico à origem, de r_2 a distância deste ponto à carga elétrica e de ψ o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$, teremos:

$$|\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{qg}{r_1^2\, r_2^2} \operatorname{sen}\psi$$

$$|(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{r}|_z = \frac{qg}{r_1^2 r_2^2} \operatorname{sen}\psi \; r \operatorname{sen}\theta = \frac{qgd\operatorname{sen}^2\theta}{r_1 r_2^3}$$

onde na última igualdade foi usada a relação $\frac{\operatorname{sen}\psi}{d} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r_2}$.

Logo

$$|\vec{L}_{campo}| = |[\int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{(qgd)}{4\pi c_0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}]|$$

que, avaliado [12], fornece:

$$|\vec{L}_{campo}| = \frac{qg}{c_0} = |\vec{G}|$$

O que foi demonstrado acima para o momento angular é exatamente o que é feito para a energia de interação, de, por exemplo, duas cargas elétricas. A integração, em todo o espaço, da densidade de energia do campo fornece a energia total de interação que pode ser interpretada como energia potencial "da" partícula (em relação à outra, tomada esta como fonte do campo).

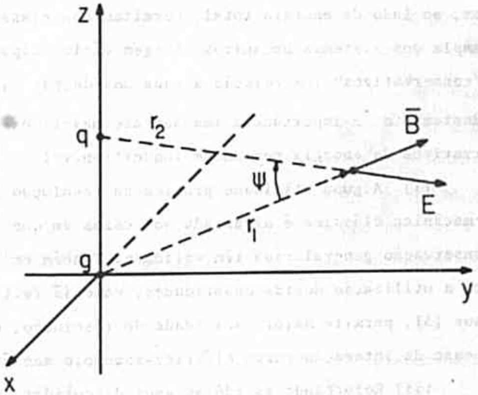

Fig. 6 - Cálculo do Momento Angular Associado ao Campo Eletromagnético .

IV. CONCLUSÃO

Procuramos mostrar aqui que o conceito do momento linear (ou angular) generalizado, idéia a princípio nova, na realidade tem sido usada em várias situações específicas na Física, em contextos diferentes. Embora não tenha conduzido a ne nhum resultado novo, esta abordagem leva a uma certa unificação conceitual de vários problemas mecânicos.

Resumidamente, listamos alguns dos aspectos que nos parecem mais destacáveis nesta linha introdutória do conceito do momento "potencial".

i) Os conceitos de momento linear e angular generalizados, ao lado da energia total, permitem uma classificação mais ampla dos sistemas mecânicos: surgem vários tipos de sistemas "conservativos" (em relação a cada uma destas quantidades). Evidentemente a importância imensamente maior dos sistemas conservativos da energia permanece inquestionável.

ii) Alguma utilidade prática na resolução de problemas em mecânica clássica é alcançada nos casos em que estas leis de conservação generalizada têm validade. Também em mecânica quântica a utilização destas quantidades, como já feito em certos casos [3], permite maior facilidade de resolução, em especial no caso da interação carga elétrica-monopolo magnético.

iii) Reforçando as idéias aqui discutidas, a análise das simetrias dos sistemas considerados, seja através das simetrias do lagrangeano (Teorema de Noether) seja através das simetrias das equações de movimento (Simetrias de Lie), leva à conservação de $\vec{P}$ ou $\vec{L}_{gen}$ nos casos de simetria sob translação ou rotação, respectivamente.

iv) A introdução do espaço de fase de Liénard, a partir de P e x (II-iv), é um mecanismo auxiliar na identificação e construção de ciclos-limites para os sistemas dissipativos do tipo (36).

v) Essas idéias podem ser estendidas também à Relatividade Especial onde, devido ao fato de a energia e o momento linear serem componentes de um quadrivetor, só se pode falar de termos "potenciais" se considerarmos conjuntamente a energia potencial e o momento linear "potencial". Isto, de passagem, nos mostra porque o conceito de energia potencial, amplamente utilizado na mecânica não relativística, muitas vezes dasaparece ao passarmos para a relatividade. (A utilização de vetores com significado "potencial" fica restrita ao caso eletromagnético com o uso dos potenciais retardados). Ele poderá ser mantido, de maneira covariante, se o conceito de momento linear "potencial" puder ser introduzido, o que ocorrerá em situações limitadas. O exemplo mais simples é o de uma partícula carregada, de massa de repouso m_0, colocada em campos elétrico e magnético constantes.

Agradeço ao revisor por várias sugestões e recomendações didáticas.

REFERÊNCIAS

1) Veja, por exemplo, Y.Prigogine et I.Stengers, "La Nouvelle Alliance" (Ed. Gallimard, 1979, Paris) e R.M.Santilli "Foundations of Theoretical Mechanics", vol. I e II, (Springer-Verlag, 1983, New York).

2) I.C.Moreira, Supl.Cien.Cult., 35, 334 (1983).

3) R.Descartes, "Principles of Philosophy", part II, citado em "A Source Book in Physics", W.F.Magie (Mc Graw-Hill, 1935, New York).

4) I.Newton, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", (1687, London).

5) M.H.Johnson and B.A.Lippmann. Phys.Rev., 76, 828 (1949).

6) N.Minorsky, "Non Linear Oscillations"(Princeton University Press, 1962, Princeton).

7) A. Liénard, Rev. Gen. de l'Électricité, 23, 901 (1928).

8) W.K.Panofsky and M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism" (Addison-Wesley, 1969, Reading).

9) I.C.Moreira, O.M.Ritter e F.C.Santos, Rev. Bras.Fis., 15, 174 (1985).

10) J.J.Thomson, "Elements of Electricity and Magnetism", (Cambridge Univ. Press, 1921, 5th ed.).

11) P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc.,A133, 60 (1931).

12) E.F.Carter and H.A. Cohen, Am. J. Phys., 41, 994 (1973).

Original recebido do antigo editor em 24/08/89
Versão revisada pelo autor recebida em 26/06/90
Aceito para publicação em 26/10/90