

## O QUE É UMA MEDIDA? (What is a Measurement?)

O. HELENE, S.P.TSAI e R.R.P. TEIXEIRA

Instituto de Física - USP

Caixa Postal 20516

01498 São Paulo, SP

### RESUMO

A menor divisão da escala de um equipamento usado em uma medida sugere uma limitação na precisão final do experimento. É possível conseguir precisões melhores do que aquela? Este trabalho discute essa questão e mostra que a resposta é sim, ilustrando o problema com um exemplo.

### ABSTRACT

The smallest division of the scale of the instrument used in a measurement suggests a limitation on the final accuracy of the experiment. Is it possible to get accuracies better than that one? This paper discusses this question and shows that the answer is yes, illustrating the problem with an example.

### 1. INTRODUÇÃO

Há uma permanente discussão nos laboratórios didáticos sobre o significado da menor divisão da escala de um equipamento. Não raramente essa discussão é prolongada quando um resultado obtido a partir de múltiplas medidas de uma mesma grandeza apresenta um desvio padrão menor do que a metade da menor divisão das escalas dos aparelhos utilizados permitiria supor. Neste trabalho discutiremos essas questões, ligando os conceitos estatísticos à prática da física experimental.

Inicialmente, faremos uma revisão das equações usuais para a determinação dos desvios padrões dos dados e da média, chamando a atenção para as condições estatísticas que devem ser satisfeitas para que elas sejam válidas. Em seguida, estabeleceremos como essas condições estatísticas podem ser satisfeitas na prática de um laboratório de física.

Após essas discussões iniciais, usaremos os resultados de medidas de comprimentos de objetos para discutir os significados da metade da menor divisão da escala de um instrumento, no caso uma régua escolar comum, e do desvio padrão da média.

## II. REVISÃO DAS IDÉIAS BÁSICAS

### a) Revisão

Vamos supor que  $(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , represente o conjunto de dados correspondentes todos eles à medida de uma mesma grandeza física. Vamos chamar de  $x_0$  o valor verdadeiro dessa grandeza e supor ainda que os dados obedeçam a uma distribuição normal centrada em  $x_0$  e com desvio padrão  $\sigma_0$ .<sup>(1)</sup> Se os dados são estatisticamente independentes uns dos outros, então

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

é uma estimativa boa de  $x_0$ .

O termo "estatisticamente independente" usado acima significa que a matriz de covariância dos dados - aquela matriz cujo termo  $V_{ii}$  é a variância do dado  $x_i$  e  $V_{ij} = V_{ji}$  é a covariância dos dados  $x_i$  e  $x_j$  - é diagonal. Ou seja,  $V_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Além disso, como já estava suposto inicialmente, todos os termos diagonais dessa matriz são iguais a  $\sigma_0^2$ . Na seção III discutiremos como proceder na prática para obtermos dados estatisticamente independentes em uma medida.

Foi dito também acima que  $\bar{x}$  é uma "boa estimativa" de  $x_0$ . Em termos estatísticos, essa expressão significa que se  $N$  tende a  $\infty$  então  $\bar{x}$  tende a  $x_0$ . Além disso,  $\bar{x}$  tende a  $x_0$  de forma não tendenciosa, ou seja, não é em geral nem uma superestimação nem uma subestimação de  $x_0$  (2).

Além de  $\bar{x}$  ser uma estimativa boa de  $x_0$ , ela é a melhor estimativa. Outras estimativas possíveis, como por exemplo a mediana, aquele valor de  $x$  que divida o conjunto  $(x_i)$  em dois grupos, um com os elementos menores que a mediana e outro com os elementos maiores, também é uma boa estimativa de  $x_0$ , na medida em que satisfaz as duas condições acima - convergir a  $x_0$  quando  $N$  tende a  $\infty$  e não ser tendenciosa. Entretanto a mediana é pior que  $\bar{x}$  pois, em média, ela está mais distante de  $x_0$  do que  $\bar{x}$  está (3). É possível mostrar que, de todas as estimativas de  $x_0$  a partir do conjunto de dados  $(x_i)$ ,  $\bar{x}$  é aquela, entre as convergentes e não tendenciosas, que mais rapidamente tende a  $x_0$ .

b) Mas, o que é uma medida?

Quando saímos de um laboratório após medirmos determinada grandeza, devemos ter uma estimativa numérica de seu valor, por exemplo  $\bar{x}$  da eq. (1). No entanto, apenas isso é pouco, muito pouco. Além da estimativa da grandeza medida, é fundamental que sejamos capazes de responder a questão "quão boa é esta estimativa?"

A menos de algumas situações muito particulares, não podemos em geral dizer que o valor que temos é exatamente o valor da grandeza medida. Assim, para dizer quão boa é a medida, precisamos indicar uma estimativa de quão longe o nosso resultado pode estar do valor verdadeiro da grandeza medida. Alguma coisa assim:

$$\text{Resultado} = \left[ \begin{array}{l} \text{estimativa do valor} \\ \text{da grandeza medida} \end{array} \right] \pm \left[ \begin{array}{l} \text{estimativa de quão} \\ \text{longe o valor ver-} \\ \text{dadeiro pode estar} \\ \text{da estimativa que} \\ \text{temos dele} \end{array} \right] \quad (2)$$

Mas isso ainda não estaria completo, pois ficamos sem resposta a uma pergunta do tipo: "é absolutamente seguro que o valor verdadeiro da grandeza esteja nesse intervalo?" Se não, quão provável é isso? A menos novamente de alguns casos específicos para os quais podemos dizer com certeza que o valor verdadeiro está contido no intervalo, em geral podemos apenas dizer o quão provável é isso. Assim, para que a expressão (2) tenha sentido precisamos dar a probabilidade

de o valor verdadeiro da grandeza estar no intervalo indicado, o chamado nível de confiança. Feito isso, o resultado estará completo e terá alguma utilidade. Novamente a menos de alguns casos particulares, apresentar um resultado que não contenha um intervalo e um nível de confiança associado é inútil e apresentar mais informações do que estas é impossível.

Voltando ao caso dos dados  $(x_i)$  com as quais iniciamos esta seção, sabendo que eles obedecem a uma distribuição normal centrada em  $x_0$  e com desvio padrão  $\sigma_0$ , podemos dizer que

$$P(x_i \in x_0 \pm \sigma_0) = 0,68, \quad (3)$$

ou seja, a probabilidade de que  $x_i$ , qualquer  $i$ , esteja contido no intervalo  $(x_0 - \sigma_0, x_0 + \sigma_0)$  é de 68%. É direto mostrar então que

$$P(x_0 \in x_i \pm \sigma_0) = 0,68. \quad (4)$$

Assim, se tomarmos um dado qualquer  $x_i$  - não vale escolher o dado, é necessário sorteá-lo ao acaso - podemos apresentar o resultado da nossa experiência da forma

$$\text{Resultado} = x_i \pm \sigma_0. \quad (5)$$

O resultado apresentado dessa forma está suficientemente completo: há uma estimativa da grandeza medida,  $x_i$ , de um intervalo  $(x_i - \sigma_0, x_i + \sigma_0)$  e sabemos que a probabilidade de que o valor verdadeiro da grandeza esteja nesse intervalo é 68%.

Mas se temos N dados equivalentes, por que usar apenas um deles? Fazendo assim teríamos trabalhado inutilmente quando obtivemos os outros N-1 dados (estamos supondo que conhecemos  $\sigma_0$  e, portanto, não precisamos estimá-lo). De fato, como foi dito acima, a média dos N dados é a melhor estimativa de  $x_0$ . E é fácil mostrar que, se os dados se distribuem normalmente em torno de  $x_0$  com desvio padrão  $\sigma_0$ , então as médias de várias coleções de N dados independentes se distribuem também normalmente em torno de  $x_0$  com desvio padrão (ou desvio padrão da média)  $\sigma_{m0} = \sigma_0/\sqrt{N}$  (4). Assim sendo, podemos apresentar o resultado do experimento na forma

$$\text{Resultado} = \bar{x} \pm \sigma_{m0} \quad (6)$$

cujo nível de confiança é de 68%. Isso é o melhor que podemos fazer: esta é uma forma completa de representar o resultado de um experimento e, entre todas as possíveis no caso em que os dados obedecem a uma distribuição normal, a melhor delas.

c) Como estimar  $\sigma_0$  quando isso é necessário?

Há várias situações experimentais nas quais sabemos a priori o valor de  $\sigma_0$ . No entanto, em alguns casos não o sabemos. Quando isso acontece, é necessário estimarmos  $\sigma_0$  a partir dos próprios dados experimentais. Essa estimativa, que chamaremos de  $\sigma$ , é (4)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

É possível mostrar que essa é uma boa estimativa de  $\sigma_0^2$ : converge a  $\sigma_0^2$  quando  $N$  tende a  $\infty$  e não é tendenciosa. Assim, podemos escrever o resultado do experimento na forma

$$\text{Resultado} = \bar{x} \pm \sigma_m \quad (8)$$

onde  $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N}$  é a estimativa do desvio padrão da média.

Entretanto, apesar de  $\sigma$  ser uma boa estimativa de  $\sigma_0$ , o conteúdo probabilístico do intervalo indicado na expressão (8) não é mais de 68%<sup>(5)</sup>. A tabela 1 mostra o conteúdo probabilístico do intervalo  $\sigma/\sqrt{N}$  para diferentes valores de  $N$ .

Tabela 1

N	conteúdo probabilístico do intervalo $\bar{x} \pm \sigma_m$	fator multiplicativo de $\sigma_m$ para que o conteúdo do intervalo seja de 68%, $\alpha$
2	50%	1,84
3	58%	1,32
4	61%	1,20
5	63%	1,14
10	65%	1,06
20	67%	1,03
$\infty$	68,3%	1,00

Assim, se apenas dois dados são usados para estimar  $x_0$  e  $\sigma_0$ , então o conteúdo probabilístico do resultado  $\bar{x} \pm \sigma_m$ , com  $N=2$ , é de apenas 50%. Se desejamos restaurar o conteúdo probabilístico de 68,3%, devemos aumentar o intervalo  $\sigma_m$ , multiplicando-o por 1,84, como indicado na tabela 1.

Mas, desde que o número de dados seja suficientemente grande, essas correções são desnecessárias. De qualquer forma, devemos chamar a atenção para o fato de ser possível fazermos experimentos com apenas dois dados, mesmo que não conheçamos  $\sigma_0$ . (Se conhecemos  $\sigma_0$ , um único dado já é suficiente para obtermos um resultado completo de um experimento).

É fundamental a diferença entre  $\sigma$  e  $\sigma_m$ : enquanto  $\sigma$  é uma estimativa do desvio padrão de cada dado  $x_i$ ,  $\sigma_m$  é uma estimativa do desvio padrão da média  $\bar{x}$ . Logo,  $\sigma$  é a "largura" do histograma de dados  $x_i$  e independe de  $N$ , dependendo basicamente dos instrumentos de medida e do observador. Já  $\sigma_m$  é a "largura" de um hipotético histograma de médias e diminui com o crescimento de  $N$  (é inversamente proporcional a  $\sqrt{N}$ ). Portanto, quando  $N$  cresce o histograma de dados  $x_i$  não fica mais estreito (como é comum pensar); o que acontece é que o pico do histograma fica cada vez mais próximo (em média) do valor verdadeiro  $x_0$ .

### III. E NA PRÁTICA?

Há alguns pontos-chaves na discussão dos aspectos estatísticos da seção II que devem ser traduzidos para a prática de um laboratório de física experimental. Um desses pontos se refere à distribuição dos dados  $x_i$  em torno do valor verdadeiro  $x_0$ . Nas discussões da seção anterior, supusemos que essa distribuição é normal, com desvio padrão  $\sigma_0$ . Se entretanto a forma da distribuição for outra, diferente da normal, isso deve ser considerado na determinação do resultado de um experimento na forma da expressão (2).

Mas vamos nos restringir ao caso de distribuições normais. Outros casos são discutidos na ref. (4). Um ponto importante, e que nós gostaríamos que fosse considerado

central neste trabalho, é quanto à independência estatística dos dados ( $x_i$ ) obtidos em um experimento. (O fato dos dados não serem independentes não impede um tratamento estatístico completo; mas neste caso exigiria que levássemos em consideração os termos não diagonais da matriz de covariância. Caso os dados não fossem independentes, as equações (1) e (7) não corresponderiam à melhor estimativa da grandeza medida e do desvio padrão dos dados.) Como fazer para que na prática os dados sejam estatisticamente independentes?

Para que dois dados sejam estatisticamente independentes é necessário que a distribuição de probabilidade associada a um deles seja independente do valor que tenha assumido o outro dado. Em outras palavras, a probabilidade de que um dado a ser obtido em um experimento esteja contido em determinado intervalo independe dos valores particulares assumidos pelos dados anteriormente obtidos<sup>(6)</sup>.

Suponhamos um caso prático de medidas de comprimentos com o uso de réguas. Para que dois dados sejam independentes entre si, é necessário que eles sejam obtidos com réguas de origens diferentes: fábricas diferentes, que utilizam equipamentos industriais de diferentes origens, os quais por suas vezes foram construídos por equipamentos diferentes etc. Além disso as leituras devem ter sido feitas por pessoas diferentes, pois alguns fatores de erro podem

ter origem humana - paralaxe, subjetividade no momento de "arredondar" a leitura etc.

Caso essas condições não fossem satisfeitas, os dados seriam estatisticamente dependentes e a matriz de covariância não seria diagonal. Por exemplo, suponha que uma mesma régua tenha sido usada para medir o comprimento de dois objetos. Suponhamos que uma das medidas tenha sido superestimada. Entre os vários fatores que podem ter levado a essa superestimação, um deles pode ser o fato de que a régua é mais curta do que deveria. Se este for o caso, então provavelmente a medida do outro objeto também terá sido superestimada.

Sendo dados independentes, as equações (1) e (7) podem ser usadas. Assim, a expressão (8) permitirá que determinemos o valor de uma grandeza com a precisão que desejarmos, desde que tenhamos paciência para obter uma quantidade de dados  $N$  suficientemente grande, qualquer que seja  $\sigma$ .

Uma observação que nos parece importante aqui é sobre o fato de que tanto  $\bar{x}$  como  $\sigma$  são medidas de grandezas. Se  $\bar{x}$  é uma medida de  $x_0$ , a grandeza física que nos interessa,  $\sigma$  é uma medida de  $\sigma_0$ , uma grandeza de qual necessitamos para apresentar de forma completa o resultado. Se  $x_0$  é, por exemplo, uma característica física de um sistema,  $\sigma_0$  é uma característica do arranjo experimental usado.  $\sigma_0$  pode depender dos instrumentos escolhidos, das variações das condições ambientais, do procedimento

experimental, da rede elétrica, de flutuações intrínsecas do equipamento ou de muitos outros fatores que fazem com que um dado obtido possa ser diferente de outro.

#### IV. MEDIDAS COM RÉGUAS

Para ilustrar essa discussão, medimos o comprimento de uma barra de alumínio usando  $N = 87$  réguas escolares, todas subdivididas em milímetros, de várias origens diferentes e lidas por pessoas diferentes. Essas condições foram suficientes para que os 87 dados obtidos fossem na prática independentes uns dos outros. Talvez se todas as réguas fossem lidas por uma mesma pessoa essa independência não seria garantida, pois algumas das causas de variação das leituras feitas pode ser o próprio usuário do equipamento. A mesma interdependência estatística dos dados poderia ocorrer por exemplo se todas as réguas tivessem sido fabricadas pela mesma máquina na mesma época. As leituras foram feitas subdividindo-se o milímetro, visualmente, em no mínimo 3 partes iguais. Os resultados estão mostrados no histograma da figura 1.

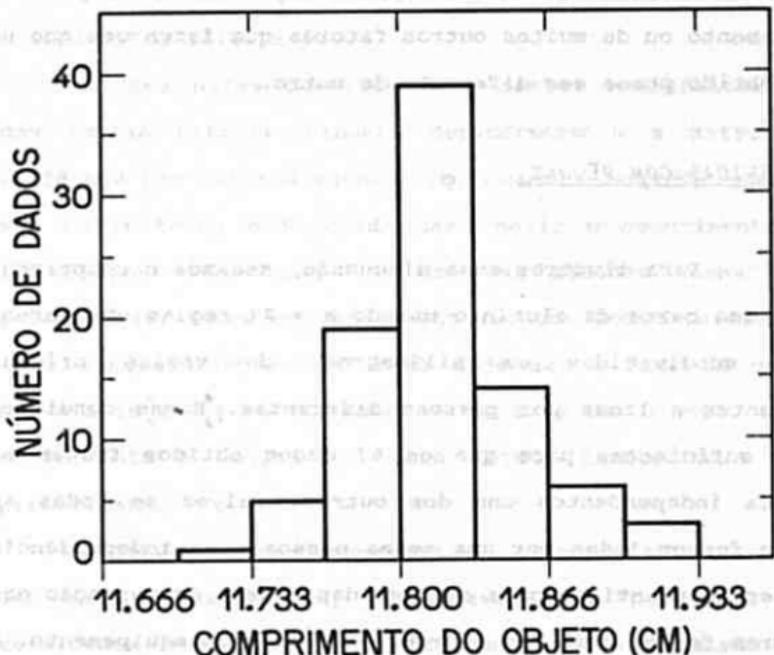


Figura 1 - Histograma dos 87 dados da medida do comprimento da barra de alumínio.

Os resultados obtidos correspondem a

$$\bar{x} = 11,814 \text{ cm} \quad (9)$$

$$\sigma = 0,039 \text{ cm}$$

$$\sigma_m = 0,004 \text{ cm} \quad ,$$

$\bar{x}$  é a estimativa da grandeza medida;  $\sigma$  é a estimativa de  $\sigma_0$ . Se  $\bar{x}$  representa uma característica do objeto,  $\sigma$  representa uma característica do arranjo experimental, no caso variações na fabricação de réguas e de leitura.

O resultado obtido pode então ser representado como

$$e = 11,814 \pm 0,004 \text{ cm}, \quad (10)$$

correspondendo a uma precisão final de 4 centésimos de milímetros.

Podemos comparar esse resultado com medidas feitas com paquímetros lidos até 2 centésimos de milímetros. Duas medidas feitas por pessoas diferentes e usando paquímetros diferentes levaram aos valores 11,812 e 11,814cm, indicando que o resultado da eq. (10) não é incorreto.

Em princípio, poderíamos conseguir uma precisão tão boa quanto quiséssemos mesmo com o uso de réguas comuns, desde que obtivéssemos uma quantidade suficiente delas e fossemos capazes de garantir uma real independência dos dados.

A expressão (10) mostra que podemos obter uma precisão final de 0,004 cm, usando réguas graduadas em milímetros. Ou seja, a precisão final é cerca de 25 vezes menor que a menor divisão da escala do aparelho usado.

Para chegarmos à precisão de cerca de 0,02mm, a típica de paquímetros, teríamos que usar aproximadamente 350 réguas (e 350 "observadores"). Em cruzeiros de maio/1990, uma régua de plástico comum custava Cr\$ 20,00 (e, portanto, 350 réguas custavam Cr\$ 7.000,00), enquanto que um paquímetro com menor divisão da escala de 0,02mm custava Cr\$ 6.300,00. Apesar dos preços serem da mesma ordem, seguramente o trabalho na obtenção dos dados é pelo menos duas ordens de grandeza maior no caso de medidas feitas com

régua! Esta é a razão pela qual, quando queremos alta precisão, usamos um paquímetro e não centenas de régua.

#### V. CONCLUSÃO

É interessante observarmos que a resolução de uma régua é da mesma ordem de grandeza que a menor subdivisão de sua escala. E é razoável que seja assim. De fato, se um aparelho permite uma leitura que vai além de sua resolução, ele é um mau aparelho, pois induz seu usuário a supor que tem uma precisão que de fato não tem. Se um aparelho permite uma leitura muito mais precisa que a menor sub-divisão de sua escala, parece haver um "desperdício" de qualidade; neste caso seria bom sub-dividir mais a escala ou, o que é a mesma coisa, dotar o aparelho de um nônio ou de algo equivalente, de forma a ampliar as suas possibilidades de uso. Entretanto, essa observação não nos dá a certeza de que a menor divisão da escala de um instrumento - ou a metade dela, ou a terça parte dela ou qualquer outro valor que dependa linearmente dela - seja o desvio padrão de um dado obtido com o instrumento: a única coisa que observamos é que no caso das régua usadas nesta medida o desvio padrão dos dados é aproximadamente da mesma ordem da menor divisão da escala. Não temos nenhuma garantia que este seja um procedimento padrão dos produtores de equipamentos de medida: não há qualquer garantia de que um fabricante inescrupuloso não venha a sub-dividir exageradamente as

escalas de seus aparelhos de medida para obter um melhor preço por eles; também não temos nenhuma certeza de que um fabricante não possa produzir instrumentos para determinado uso - e portanto com determinada subdivisão da escala - de qualidade superior à necessária apenas porque conseguiu comprar por bom preço materiais e equipamentos para isso. Além disso, devemos lembrar que o desvio padrão não depende apenas do instrumento em si, mas também das condições em que ele é utilizado.

Uma última conclusão é quanto ao fato de podermos obter em um experimento uma precisão final muito melhor do que a menor sub-divisão das escalas dos equipamentos usados permitiria supor, desde que obtenhamos uma quantidade suficientemente grande de dados independentes uns dos outros. Um corolário desta conclusão é que não podemos obter uma precisão muito grande se não temos como garantir a independência dos dados.

#### NOTAS E REFERÊNCIAS

(1) A distribuição de probabilidade normal (ou gaussiana) é

dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

(2) Por exemplo, se  $\bar{x}$  tende a  $x_0$  quando  $N$  tende a infinito, então

$$x' = \bar{x} + 1/N$$

também tende a  $x_0$  quando  $N$  tende a infinito. Entretanto  $x'$  é uma superestimação de  $x_0$  para  $N$  finito.

(3) É possível mostrar que o desvio padrão da mediana é  $\sqrt{\pi/2} \cdot \sigma_{MO}$ , onde  $\sigma_{MO}$  é o desvio padrão de  $\bar{x}$  ("The Advanced Theory of Statistics", M.G. Kendall and A. Stuart, vol.2, 4a. ed, Charles Griffin & Co, 1979, Londres).

(4) Veja por exemplo "Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental", O. Helene e V.R. Vanin, Ed. Edgard Blucher, -1980, São Paulo).

(5) O conteúdo probabilístico do intervalo apresentado na eq. 6, de 68%, leva em conta apenas a flutuação estatística de  $\bar{x}$  uma vez que  $\sigma_{MO}$  é o valor verdadeiro do desvio padrão da média. Entretanto,  $\sigma$  estimado pela equação 7 também flutua estatisticamente em torno de  $\sigma_0$ . É devido a essa flutuação de  $\sigma$  que o conteúdo probabilístico do intervalo da equação 8 não é mais 68%. A referência citada em (4) discute essa questão.

(6) É importante observarmos que a dependência estatística entre dados nada tem a ver com a relação física entre eles. Por exemplo, suponha medidas de massa e volume de uma amostra de um material. É claro que a relação física entre eles é *massa = densidade x volume*. Entretanto, se a massa for medida com balanças e o volume com copos graduados, os dados de massa e volume serão estatisticamente independentes entre si. Como outro exemplo, imagine que dois objetos diferentes tenham seus comprimentos medidos pelo mesmo observador usando uma

mesma régua. Neste caso os resultados dessas medidas poderão ser estatisticamente dependentes.

*Original recebido dos autores em 31/10/90*

*Versão revisada pelos autores recebida em 27/03/91*

*Aceito para publicação em 08/04/91*