

O MOMENTO QUADRUPOLAR DO SOL E A PRECESSÃO DAS ÓRBITAS ELÍPTICAS

JÚLIO CÉSAR FABRIS e FRANCISCO EUGÊNIO MENDONÇA DA SILVEIRA*

Departamento de Física e Química

Centro de Estudos Gerais

Universidade Federal do Espírito Santo

29000 Vitória, ES

RESUMO

Neste trabalho nós fazemos uma revisão do problema da precessão das órbitas elípticas no contexto da Mecânica Newtoniana. Introduzimos a hipótese do achatamento do Sol e investigamos suas conseqüências em termos das órbitas dos planetas. Por fim, comparamos os resultados obtidos com aqueles que se originam da utilização de teorias relativistas da gravitação, como as de Einstein e de Brans-Dicke.

I. INTRODUÇÃO

Desde que foi descoberta por Le Verrier, por volta de 1860, a precessão do periélio de Mercúrio passou a representar um crivo pelo qual qualquer teoria da Gravitação deve passar. O fato de que a elipse descrita por Mercúrio, em sua rotação em torno do Sol, gira com uma determinada velocidade angular, preocupou os astrônomos, que buscaram inicialmente uma explicação através do efeito perturbativo que outros planetas exerceriam sobre a órbita de Mercúrio. Obtiveram algum sucesso. Mas, uma pequena diferença de 43,11 segundos de arco por século entre os cálculos teóricos e os dados observacionais

*Bolsista de Iniciação Científica do CNPq.

representou o primeiro insucesso da teoria newtoniana da Gravitação. Por outro lado, a explicação desta discrepância foi o primeiro passo dado no sentido de uma aceitação mais ampla da teoria Geral da Relatividade, proposta em 1915 por Einstein.

Atualmente uma série de teorias da Gravitação, a maioria construída segundo o espírito da geometrização, passou pelo crivo da explicação da precessão do periélio de Mercúrio. Mas, alguns caminhos novos foram propostos, sendo que um dos mais interessantes é o da hipótese do achatamento do Sol. Segundo esta hipótese, aventada pela primeira vez por Dicke em 1966, o Sol teria uma forma oblata semelhante à apresentada pela Terra, o que implicaria na existência de um momento quadrupolar que poderia ser responsável pela precessão do periélio de Mercúrio. Esta questão continua até hoje sendo objeto de debate.

O objetivo deste trabalho é o de apresentar um tratamento newtoniano do problema da precessão das órbitas elípticas a partir da hipótese da existência de um momento quadrupolar do Sol. Desta forma, primeiramente faremos uma revisão da questão da precessão das órbitas elípticas; posteriormente, analisaremos a expansão multipolar em Gravitação, dando especial ênfase ao cálculo do momento quadrupolar no caso de um astro com forma oblata; finalmente, aplicaremos o procedimento exposto no caso da órbita de Mercúrio, assim como de outros planetas do sistema solar, utilizando alguns dados observacionais referentes ao achatamento do Sol.

II. A PRECESSÃO DAS ÓRBITAS ELÍPTICAS

Para ilustrar a questão da precessão das órbitas elípticas, vamos tratar inicialmente do problema do movimento de uma partícula de massa m submetida a uma força central constituída por dois termos: um que varia com o inverso do quadrado da distância e outro que varia com o inverso do cubo da distância. Uma lei deste tipo pode ser escrita como (1)

$$\vec{F} = -m \left\{ k/r^2 + k'/r^3 \right\} \vec{r}, \quad (1)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção radial, k e k' são constantes tais que $k \gg k'$, de forma que o termo adicional relacionado com k' implica numa perturbação da lei de força habitual da gravitação.

Por outro lado, a 2ª lei de Newton, escrita em coordenadas polares (r, θ) , para uma partícula de massa constante m , estabelece que

$$\vec{F} = m \left\{ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + r(2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}) \hat{\theta} \right\} . \quad (2)$$

Da igualdade entre as equações (1) e (2) decorre a equação vetorial do movimento da partícula, que é equivalente a duas equações escalares do movimento, a saber,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -k/r^2 - k'/r^3 , \quad (3a)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} = 0 \quad (3b)$$

É fácil verificar que a equação (3b) traduz a conservação do momento angular da partícula; a conservação do momento angular é uma consequência direta do fato de a força ser central. O momento angular da partícula de massa m , em relação ao centro de força, em termos de suas coordenadas polares, é dado por

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} , \quad (4)$$

desde que a trajetória da partícula esteja contida no plano xy .

Explicitando $\dot{\theta}$ a partir da equação (4) e utilizando a expressão resultante na equação (3a), segue a equação diferencial

$$\ddot{r} - L^2/m^2r^3 = -k/r^2 - k'/r^3 . \quad (5)$$

Introduzindo uma nova variável $u = 1/r$ e utilizando a expressão do momento angular, a equação (5) torna-se

$$d^2u/d\theta^2 + u = m^2k/L^2 + m^2k'u/L^2 . \quad (6)$$

A solução geral da equação (6) é dada por

$$u = \{1 + e \cos(\alpha\theta)\} / A , \quad (7a)$$

onde

$$e = \left\{ 1 + cL^2(L^2 - m^2k')/m^4k^2 \right\}^{1/2} , \quad (7b)$$

$$\alpha = \left\{ 1 - m^2k'/L^2 \right\}^{1/2} , \quad (7c)$$

$$A = (L^2 - m^2k')/m^2k , \quad (7d)$$

sendo c uma constante de integração.

É imediato verificar que a equação (7a) representa uma elipse cujo eixo maior gira em torno do centro de força, como ilustra a figura 1. Como, no nosso caso, $\alpha < 1$, para que r volte a ter o mesmo valor para um dado θ , é necessário que a partícula descreva uma rotação angular superior a 2π .

Se P' é o período de revolução do eixo girante da elipse e P é o período de revolução da partícula de massa m , medido por um observador ligado ao eixo girante, podemos escrever que

$$P' = 2\pi/\dot{\gamma} , \quad (8a)$$

$$P = 2\pi/\dot{\beta} , \quad (8b)$$

onde γ e β são definidos na figura 1. A razão entre as equações (8a) e (8b) fornece

$$P'/P = \dot{\beta}/\dot{\gamma} . \quad (9)$$

Utilizando novamente a figura 1, depreendemos que

$$\beta/\gamma = (1 - \alpha)/\alpha . \quad (10)$$

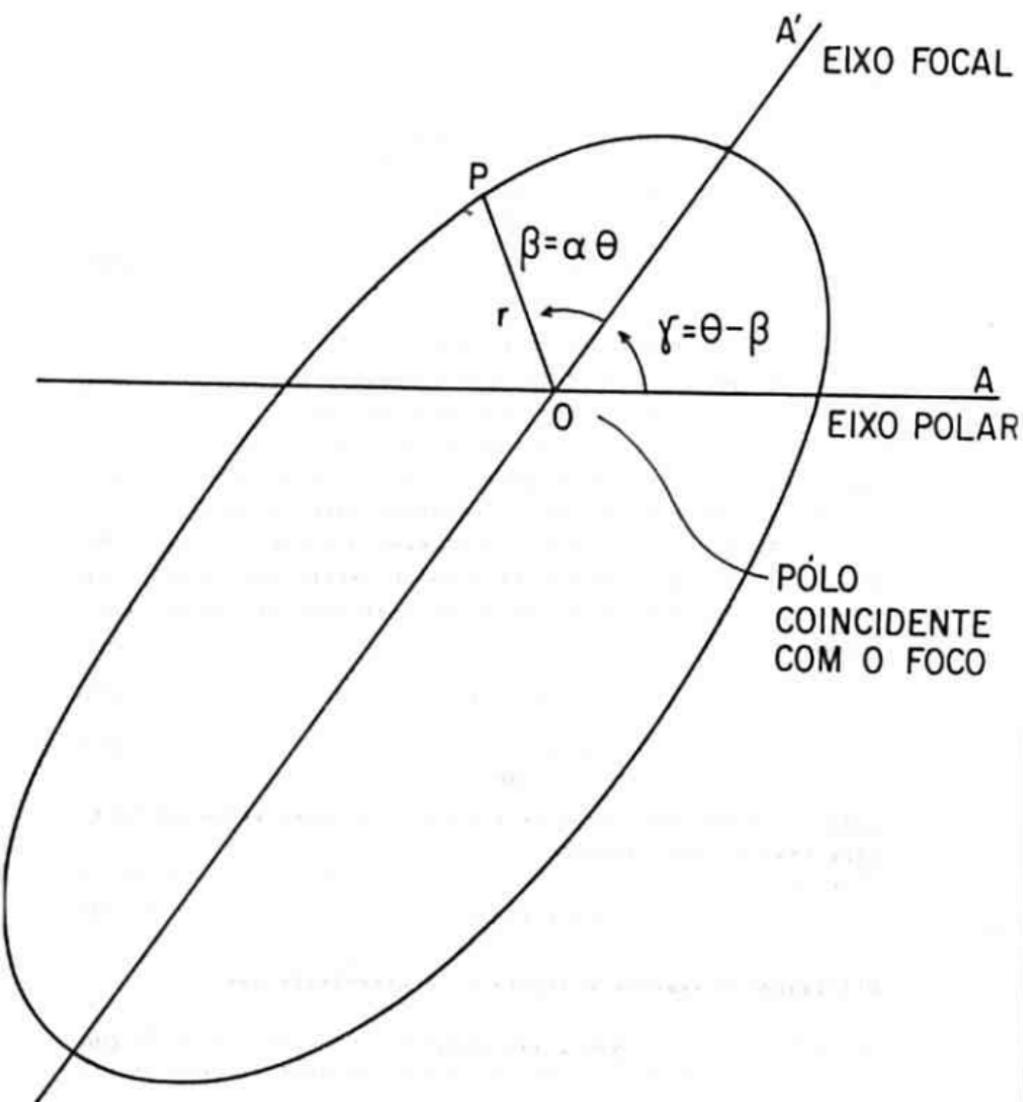


FIGURA 1

Derivando ambos os membros da equação (10), e substituindo a expressão que daí resulta na equação (9), segue que

$$P'/P = (1 - \alpha)/\alpha \quad (11)$$

A 3ª lei de Kepler do movimento planetário fornece o valor de P, qual seja*

$$P = \left\{ 2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} \right\} / r^2 \dot{\beta} \quad (12)$$

Da figura 1, das equações (4), (7a), (7d) e da relação $A = a(1 - e^2)$ válida para uma elipse qualquer, segue que

$$P' = \left\{ 2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} \right\} / \left\{ (k' + ka(1 - e^2))^{1/2} - (ka(1 - e^2))^{1/2} \right\} \quad (13)$$

Se fizermos, na equação (13), $k' \rightarrow 0$, então $P' \rightarrow \infty$, como era de se esperar.

III. A EXPANSÃO MULTIPOLAR

Antes de integrar as equações de movimento de um planeta que gira em torno de uma estrela que possui um momento quadrupolar, vamos ver como se desenvolve, em gravitação, a expansão em multipolos. Vamos admitir que a distribuição de massa que caracteriza a estrela possui simetria axial, isto é, $\rho = \rho(r, \theta)$. Desta forma, o potencial gravitacional em um ponto qualquer externo à estrela é dado por

$$V(\vec{r}) = -G \int_{V'} \rho' dV' / |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (14)$$

onde G é a constante universal da gravitação, \vec{r}' é o vetor po

*Essa expressão, rigorosamente falando, só é válida quando k' é igual a zero. Mas, no caso em que k' é diferente de zero, a eventual correção implica numa contribuição de segunda ordem, como se depreende diretamente da equação (11), e que pode, dentro da aproximação que estamos utilizando, ser desprezada.

sição do elemento de volume infinitesimal dV' , com densidade ρ' , definido ao longo da distribuição de massa da estrela. A integral é calculada no volume V' da estrela.

Podemos escrever as componentes cartesianas dos vetores \vec{r} e \vec{r}' em termos das suas componentes esféricas:

$$\vec{r} = r(\text{sen}\theta\text{cos}\phi\vec{x} + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\vec{y} + \text{cos}\theta\vec{z}) \quad (15a)$$

$$\vec{r}' = r'(\text{sen}\theta'\text{cos}\phi'\vec{x} + \text{sen}\theta'\text{sen}\phi'\vec{y} + \text{cos}\theta'\vec{z}) \quad (15b)$$

Destas expressões segue que

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left\{ r^2 + r'^2 - 2rr'A \right\}^{1/2} \quad (16)$$

onde

$$A = A(\theta, \theta', \phi - \phi') = \text{sen}\theta\text{sen}\theta'\text{cos}(\phi - \phi') + \text{cos}\theta\text{cos}\theta' \quad (17)$$

Vamos supor agora que o ponto $P(r, \theta, \phi)$ esteja suficientemente distante de qualquer um dos pontos $P'(r', \theta', \phi')$ da distribuição de massa, de forma que podemos considerar $r \gg r'$, qualquer que seja r' . Neste caso a expansão de $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ em série de Taylor fornece

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (1/r) \left\{ 1 + A(r'/r) + (3A^2 - 1)(r'^2/2r^2) + \dots \right\} \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (14), temos que o potencial, a grandes distâncias da distribuição de massa, pode ser escrito como

$$V(r, \theta, \phi) = - (G/r) \int_{V'} \rho' dV' - (G/r^2) \int_{V'} \rho' r' A dV' - (G/r^3) \int_{V'} \rho' r'^2 \left\{ (3A^2 - 1)/2 \right\} dV' - \dots \quad (19)$$

A primeira integral que figura no membro direito da equação (19) é igual à massa total M da distribuição. Assim, este termo representa o potencial caso toda a massa da dis-

tribuição estivesse concentrada na origem. Em outras palavras, é o potencial monopolar.

Para calcularmos a segunda integral, observamos que nós podemos escrever $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr'A$. Escrevendo então

$$\int_{V'} \rho' r' A dV' = (1/r) \vec{r} \cdot \left(\int_{V'} \rho' \vec{r}' dV' \right) \quad (20)$$

nós podemos notar agora que a integral no membro direito da equação (20) representa simplesmente o centro de massa da distribuição. Se colocarmos a origem do sistema de referência no centro de massa o valor desta integral passa a ser zero. Vemos assim que a distribuição gravitacional não apresenta momento dipolar, resultado bastante conhecido.

A última integral pode ser calculada explicitando A^2 e integrando em ϕ , o que é possível pois a distribuição que estamos tratando tem simetria cilíndrica. Ao integrarmos em ϕ de 0 a 2π , temos que todos os termos que envolvem potências ímpares de $\cos(\phi - \phi')$ são nulos e todos os que envolvem potências do tipo $\cos^2(\phi - \phi')$ são multiplicados por π após a integração. Tendo isto em vista, obtemos que a integral se converte em

$$I = (G\pi/r^3) \int_0^a \int_0^\pi \rho(r', \theta') r'^4 \sin\theta' \left\{ (3/2) \sin^2\theta \sin^2\theta' + 3\cos^2\theta \cos^2\theta' - 1 \right\} dr' d\theta' \quad (21)$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e fatorando os termos de forma a separar aqueles que dependem de θ dos que dependem de θ' , nós ficamos com

$$I = GQP_2(\cos\theta)/r^3 \quad (22)$$

onde Q é o momento quadrupolar e $P_2(\cos\theta)$ é o segundo polinômio de Legendre, dados por

$$Q = \int_{V'} \rho(r', \theta') r'^2 P_2(\cos\theta') dV' \quad (23a)$$

$$P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2 \quad (23b)$$

Assim, utilizando os resultados anteriores, e observando as definições (23a,b), podemos escrever a expansão multipolar até a segunda ordem em r'/r como

$$V(r) = GM/r + GQP_2(\cos\theta)/r^3 \quad (24)$$

onde o primeiro termo representa o monopolo gravitacional e o segundo o termo de quadrupolo gravitacional.

IV - PERTURBAÇÃO QUADRUPOLAR

O campo gravitacional de uma distribuição esférica e homogênea de massa é idêntico ao campo criado por uma partícula de massa igual a da distribuição, localizada no centro da esfera. Este é um resultado que o estudante aprende nos textos básicos de Física. Entretanto, quando essa distribuição de massa se afasta da forma esférica no sentido de assumir uma configuração oblata, então o campo gravitacional passa a ser dado pela expansão multipolar tratada anteriormente. Para obter, então, a expressão deste campo gravitacional deveremos buscar uma expressão analítica para a distribuição de massa que a caracteriza, de forma que possamos calcular a integral (23a).

Alguns livros-texto de Mecânica e de Mecânica Celeste tratam deste problema. Em particular, considerando o procedimento adotado por Symon⁽²⁾ em relação a esta questão, podemos ver que a distribuição oblata pode ser aproximada através de superposição de uma distribuição esférica e homogênea e uma distribuição superficial de massa que é responsável pela distorção. Vamos considerar, seguindo Symon, que a forma oblata possui um raio equatorial a e um raio polar $a(1-\eta)$. A

distribuição esférica e homogênea citada anteriormente possui o mesmo volume - e conseqüentemente a mesma massa - que o elipsóide de revolução que caracteriza a forma oblata; a distribuição superficial deve ter massa total nula.

Igualando o volume do elipsóide, com os eixos dados acima, com o volume da esfera de raio R, temos

$$R = a(1 - \eta/3) \quad (25)$$

onde nós desprezamos termos de ordem superior ou igual a η^2 . A distribuição superficial deve ser simétrica em relação ao plano equatorial e deve ter massa total nula. Podemos supor uma forma genérica dada por

$$\sigma = A + B \sin^2 \theta + C \sin^4 \theta \quad (26)$$

Utilizando o fato de que a massa total desta distribuição superficial é nula, e que as massas totais nos planos polar e equatorial da Terra devem ser dadas pela soma das contribuições das distribuições volumétrica e superficial, temos as seguintes equações conectando os parâmetros A, B e C:

$$A + \pi B/4 + C/3 = 0 \quad (27a)$$

$$A + B = a \rho / 3 \quad (27b)$$

$$2A + C + 2B/\pi = -a \rho / 3 \quad (27c)$$

Resolvendo este sistema de três equações e três incógnitas, temos que a distribuição superficial pode ser dada por

$$\sigma = a \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) / 3 \quad (28)$$

Essa distribuição superficial contribui em primeira ordem com um termo quadrupolar do tipo dado pela equação (22) com a definição (23a), onde devemos trocar a densidade volumétrica pela superficial e a integração no volume pela inte-

gração na superfície. Tendo isto em conta, substituindo (28) em (23a), e considerando a definição (23b), obtemos o termo quadrupolar devido à distribuição superficial:

$$\delta V = -\frac{GMaR^2}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)/5r^3 \quad (29)$$

Nesta expressão, θ é a colatitude solar.

Considerando, então, o achatamento do Sol, caracterizado pelo parâmetro n , um planeta em órbita solar desloca-se sob um potencial dado por

$$V = V_0 + \delta V \quad (30)$$

onde δV é dado por (29) e V_0 é o potencial devido à distribuição esférica de massa, dado por

$$V_0 = -GM/r \quad (31)$$

Para obtermos o movimento de uma partícula de massa m sob ação de um potencial dado por (30), com as relações (29) e (31), devemos adotar um procedimento diferente do que foi mostrado na seção II. A razão é que o termo adicional no potencial varia com o inverso do cubo da distância, enquanto na seção II nós havíamos considerado um termo adicional que variava com o inverso do quadrado da distância. Essa variação com o inverso do cubo da distância implica numa equação de movimento não linear. Soluções aproximadas para este tipo de equações são discutidas em muitos textos^(3,4,5). Entretanto, Gauthier, em artigo recente⁽⁶⁾, chamou a atenção para alguns pontos inconsistentes na solução clássica deste problema. Nós seguiremos aqui uma forma de atacar o problema que julgamos segura, sob o ponto de vista matemático, e que é sugerida por Landau⁽⁷⁾.

O princípio da conservação da Energia estabelece que a energia mecânica total de uma partícula sob ação de um potencial V , onde m é a massa da partícula, é

$$E = (1/2) m \dot{r}^2 + (1/2) m r^2 \dot{\theta}^2 + V \quad (32)$$

Para simplificar os cálculos, vamos escrever o potencial sob a forma

$$V = -\alpha/r - \gamma/r^3 \quad (33)$$

A rigor, o termo γ na equação (33) depende de θ . Entretanto, vamos considerar que a partícula desloca-se em um plano que contém o equador solar, de forma que os termos da equação (33) dependam unicamente de r . Neste caso, a força que atua sobre a partícula é central, o que implica em que o momento angular se conserva. O momento angular, em coordenadas polares, se escreve como

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{z} \quad (34)$$

O movimento da partícula se dá unicamente no plano em relação ao qual o vetor unitário \hat{z} é perpendicular.

Utilizando a equação (34) para eliminar $\dot{\theta}$ da equação (32), ficamos com

$$E = (1/2) m \dot{r}^2 + L^2/2mr^2 + V \quad (35)$$

Explicitando \dot{r} a partir da equação (35), temos que

$$\dot{r} = \left\{ (2/m) \left[E - (L^2/2mr^2 + V) \right] \right\}^{1/2} \quad (36)$$

Com ajuda da equação (34), podemos eliminar o tempo da equação (36), de modo que

$$(L/m)^{1/2} d\theta = (L/mr^2) dr / \left\{ E - (L^2/2mr^2 + V) \right\}^{1/2} \quad (37)$$

Podemos reescrever a equação (37) utilizando o artifício de considerar o segundo membro como uma função de L e exprimindo-o como a derivada:

$$d\theta = - \partial/\partial L \left\{ 2m(E-V) - L^2/r^2 \right\}^{1/2} dr . \quad (38)$$

Vamos, agora, levar em conta a expressão (30) e considerar que $V_0 \gg \delta V$. Desta forma, podemos expandir em série o tempo sob o símbolo de derivada existente na equação (38). Retendo termos até segunda ordem, ficamos com

$$d\theta = - \partial/\partial L \left\{ 2m(E-V_0) - L^2/r^2 \right\}^{1/2} dr + \\ + \partial/\partial L \left\{ m\delta V dr / \left\{ 2m(E-V_0) - L^2/r^2 \right\}^{1/2} \right\} . \quad (39)$$

Integrando ambos os membros da equação (39), segue que

$$2\pi + \delta\theta = - 2\partial/\partial L \int_{r_-}^{r_+} \left\{ 2m(E-V_0) - L^2/r^2 \right\}^{1/2} dr + \\ + 2\partial/\partial L \int_{r_-}^{r_+} \left\{ 2m(E-V_0) - L^2/r^2 \right\}^{1/2} m\delta V dr , \quad (40)$$

onde $\delta\theta$ representa o deslocamento angular devido ao movimento de precessão e r_- e r_+ são os valores mínimo e máximo, respectivamente, que o comprimento do raio vetor da partícula de massa m pode assumir.

É fácil verificar que a primeira integral do segundo membro da equação (40) vale precisamente -2π . Logo, o deslocamento angular devido à precessão é dado por

$$\delta\theta = \partial/\partial L \int_{r_-}^{r_+} \left\{ 2m(E-V_0) - L^2/r^2 \right\}^{-1/2} m\delta V dr . \quad (41)$$

Uma vez que estamos utilizando um cálculo aproximado para este problema, podemos calcular a integral (41) ao longo da órbita não perturbada. Isto significa, em termos práticos, que podemos fazer uso das relações concernentes à órbita elípti-

ca não girante*. Essas relações são bem conhecidas, e podemos listá-las a seguir, lembrando que $V_0 = -a/r$:

$$1/p = m/L^2, \quad (42a)$$

$$1/r - 1/p = e \cos \theta / p, \quad (42b)$$

$$2mE/L^2 = (e^2 - 1)/p^2, \quad (42c)$$

$$p = a(1 - e^2). \quad (42d)$$

Substituindo as relações (42a,b,c) na equação (41) ficamos com

$$\delta \theta = \partial / \partial L \int_{r_-}^{r_+} \left\{ 2mp \delta V / L e \sin \theta \right\} dr. \quad (43)$$

Da equação (42b) decorre que

$$dr = \left\{ r^2 e \sin \theta / p \right\} d\theta. \quad (44)$$

Substituindo a equação (44) na (43), temos que

$$\delta \theta = \partial / \partial L \int_0^\pi \left\{ 2mr^2 \delta V / L \right\} d\theta. \quad (45)$$

Fazendo uso da definição de δV dada pela equação (33) e tomando a relação (42b) novamente, podemos calcular facilmente a integral (45). Assim, obtemos, após derivar o resultado da integral em relação a L ,

$$\delta \theta = 6\pi\gamma / ap^2. \quad (46)$$

*Novamente, essas relações são válidas unicamente quando k' é nulo. Mas sua utilização é consistente com o fato de estarmos fazendo uma aproximação em primeira ordem em k' . Ver nota de rodapé anterior.

Podemos observar que $\delta\theta$ é positivo, o que implica em um avanço do periélio. Comparando (33) com (29) e (31), podemos obter os valores de γ e de μ tendo em mente que estamos considerando $\theta = 0$. Assim, ficamos com

$$\delta\theta = 6\pi\eta R^2/5a(1-e^2) \quad (47)$$

Se dividirmos pelo período de translação, obtemos finalmente a frequência angular de precessão Ω em função da frequência angular de translação ω :

$$\Omega = 3\eta\omega R^2/5a(1-e^2) \quad (48)$$

V. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A equação (48) nos diz que a precessão do periélio depende diretamente do parâmetro de achatamento η . Para analisarmos, portanto, a influência da forma oblata do Sol na órbita dos planetas, devemos utilizar as medidas já feitas do parâmetro η . Neste ponto, entretanto, nos deparamos com uma dificuldade inesperada: as várias tentativas de medir o parâmetro η para o Sol, levaram a resultados totalmente divergentes, não havendo ainda qualquer consenso a respeito deste assunto. Ainda assim, procuraremos fazer uso de algumas medidas recentes no sentido de avaliar a influência de uma possível forma oblata do Sol na órbita dos planetas.

As primeiras medidas feitas para se tentar avaliar o grau de esfericidade do Sol foram realizadas no início do século por Newcomb. Seus resultados apontaram para uma forma praticamente esférica do Sol. Em 1966, Dicke e Goldenberg tentaram avaliar a diferença entre os raios equatorial e polar do Sol através da ocultação do disco solar e da posterior medida da diferença de luminosidade entre o pólo e o equador. Considerando uma abertura angular para o diâmetro equatorial do Sol da ordem de $R = 959''$, eles obtiveram

$$\Delta R = (43'' \pm 3'', 3) \times 10^{-3} \quad (49)$$

Isto resulta em um parâmetro de achatamento

$$\eta_D = (4,5 \pm 0,3) \times 10^{-5} \quad (50)$$

O valor de η para o Sol determinado por Dicke é quase cem vezes menor que o valor do mesmo parâmetro para o caso da Terra.

O resultado de Dicke e Goldenberg foi, entretanto, contestado por Hill et al. (9) que, ao realizarem uma medida semelhante, inclusive no instrumental técnico, encontraram o valor

$$\Delta R = (9'',2 \pm 6'',2) \times 10^{-3} \quad (51)$$

Isto implica em um parâmetro de achatamento igual a

$$\eta_H = (9,6 \pm 6,5) \times 10^{-6} \quad (52)$$

Os dados obtidos por Hill et al. tornam a questão da existência ou não de um momento quadrupolar do Sol de valor apreciável bastante questionável. De qualquer forma, tentaremos avaliar o efeito de um possível afastamento da forma esférica, no caso do Sol, em relação às órbitas dos planetas, em especial sobre a órbita de Mercúrio, utilizando tanto (50) quanto (52).

Como já vimos anteriormente, a existência de um momento quadrupolar do Sol contribuiria para a precessão das órbitas elípticas. Esta precessão também é obtida, dentro do contexto newtoniano, através do efeito perturbativo dos demais planetas. No caso de Mercúrio, especificamente, a observação acusa uma precessão do periélio da ordem de $5573'',11 \pm 3'',3$ por século. Deste total, cerca de 5000" por século podem ser explicados através do efeito geral da precessão dos equinócios; quanto ao efeito perturbativo de outros planetas, Vênus contribui com 280" por século, enquanto Júpiter é responsável por 150" por século sendo que os demais planetas contribuem com 100" por século (10).

Considerando todas as contribuições listadas acima, vemos que apenas 43",11 por século não são explicados através de efeitos perturbativos. Várias tentativas foram feitas, ainda no século passado, no sentido de obter este valor através da interação gravitacional newtoniana. Entre estas tentativas, vale ressaltar a hipótese de um outro planeta, denominado Vulcan, que deveria se situar entre Mercúrio e o Sol; e também a hipótese de uma matéria interestelar entre o Sol e Mercúrio. A observação descartou estas duas possibilidades. Um valor muito próximo ao procurado foi obtido em 1915, como efeito puramente relativístico, através da utilização da então recentemente proposta teoria Geral da Relatividade.

A teoria Geral da Relatividade prevê uma precessão do periélio dada pela expressão (11)

$$\Omega_{RG} = 3\omega MG/a(1 - e^2) \quad . \quad (53)$$

Mais recentemente, várias teorias alternativas da Gravitação têm sido propostas. Entre as que alcançaram maior popularidade, vale ressaltar a teoria de Brans-Dicke, uma teoria a campo escalar. Nesta teoria, as equações de campo contêm um parâmetro adimensional, ω ⁽¹¹⁾. Quando $\omega \rightarrow \infty$ a teoria de Brans-Dicke reduz-se à teoria da Relatividade Geral. A precessão do periélio na teoria de Brans-Dicke é dada pela expressão (10)

$$\Omega_{BD} = \left\{ (3\omega + 4) / (3\omega + 6) \right\} \left\{ 3\omega MG/a(1 - e^2) \right\} \quad . \quad (54)$$

Na tabela 1 abaixo, apresentamos os parâmetros de órbita de três planetas do sistema solar e do planetóide Ícaro, descoberto em 1948 e cuja excentricidade acentuada o torna um objeto de grande importância no que diz respeito às medidas de precessão de periélio.

Tabela I

PLANETA	$a(10^{11} \text{ cm})$	e	$\omega(10^8 \text{ s}^{-1})$
Mercúrio	57,9	0,206	5,38
Vênus	108,0	0,007	2,11
Terra	150,0	0,017	1,30
Ícaro	161,0	0,827	1,16

Na tabela II, por outro lado, apresentamos a precessão do periélio para o caso dos mesmos planetas e do planetóide Ícaro conforme cálculos feitos segundo a Relatividade Geral, a teoria de Brans-Dicke, a hipótese do achatamento do Sol (onde distinguimos as medidas feitas por Dicke e Goldenberg das que foram feitas por Hill et al.), relacionando também os resultados da observação. No caso da teoria de Brans-Dicke utilizamos $w = 6$.

Tabela II

PLANETA	$\Omega_{RG}(\text{"sec}^{-1})$	$\Omega_{BD}(\text{"sec}^{-1})$	$\Omega_D(\text{"sec}^{-1})$	$\Omega_H(\text{"sec}^{-1})$	$\Omega_{obs}(\text{"sec}^{-1})$
Mercúrio	42,9	39,4	$2,30 \pm 0,18$	$0,488 \pm 0,329$	$43,1 \pm 0,45$
Vênus	8,62	7,90	$0,236 \pm 0,018$	$0,050 \pm 0,034$	$8,4 \pm 4,8$
Terra	3,84	3,52	$0,076 \pm 0,006$	$0,016 \pm 0,011$	$5,0 \pm 1,2$
Ícaro	10,1	9,25	$0,588 \pm 0,045$	$0,125 \pm 0,084$	$9,8 \pm 0,8$

VI. CONCLUSÃO

Desenvolvemos um tratamento simplificado para o problema da precessão das órbitas elípticas quando se considera a presença de um termo do tipo quadrupolar na expressão do potencial gravitacional. Como em gravitação o momento dipolar

é sempre nulo, este seria o termo mais significativo ao se fazer a expansão multipolar. Nosso objetivo era o de analisar a contribuição de um possível achatamento do Sol para a precessão do periélio, e comparar esta contribuição com resultados já obtidos utilizando-se teorias relativistas da gravitação, notadamente a teoria da Relatividade Geral e a teoria de Brans-Dicke.

Para a análise dos resultados, utilizamos as medidas feitas por Dicke e Goldenberg e por Hill et al., que dão resultados bastante discrepantes, o que torna a questão do achatamento do Sol ainda um objeto de discussão. Mesmo assim, os resultados numéricos revelam que, mesmo tendo em vista as medidas de Dicke e Goldenberg, a precessão das órbitas dos planetas do sistema solar não pode ser explicada unicamente através da existência de um momento quadrupolar do Sol: no caso do periélio de Mercúrio, por exemplo, restariam ainda $39'',8 \text{ s}^{-1}$ como efeito puramente relativístico; se levarmos em conta as medidas de Hill et al., a contribuição relativística deve ser da ordem de $42'',6 \text{ s}^{-1}$, o que é muito próximo do resultado que se obtém em Relatividade Geral.

A discrepância explicitada acima torna relevante uma definição quanto à magnitude de um possível momento quadrupolar do Sol. Assim, se a teoria newtoniana da gravitação continua sendo incapaz de explicar satisfatoriamente a precessão das órbitas elípticas, por outro lado, uma consideração detalhada dos vários efeitos perturbativos newtonianos sobre as órbitas dos planetas é essencial para definir o quanto resta de efeito puramente relativístico.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos professores Antônio Brasil Batista e José Plínio Baptista pelas discussões e sugestões relativas ao tema deste trabalho, assim como pela leitura que fizeram deste texto. Um de nós (F.E.M. da Silveira) agradece ao CNPq pelo apoio financeiro recebido.

REFERÊNCIAS

- 1) S.W.McCuskey, Introduction to Celestial Mechanics, Addison Wesley (1963).
- 2) K.Symon, Mechanics, 3ª edição, Addison Wesley (1978).
- 3) A.S.Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press (1965).
- 4) Atwater, Introduction to General Relativity, Pergamon Press (1979).
- 5) H.C.Ohanian, Gravitation and Spacetime, Norton (1976).
- 6) N.Gauthier, Am. J. Phys. **55**, 85 (1987).
- 7) Landau e Lifshitz, Mécanique, Mir (1966).
- 8) R.H.Dicke e H.M.Goldenberg, Astrophys. J. Supp. **27**, 131 (1974).
- 9) H.A.Hill, P.D.Clayton, D.L.Patz, A.W.Healy, R.T.Stebbins, J.R.Oleson e C.A.Zanoni, Phys. Rev. Lett. **33**, 1497 (1974).
- 10) C.M.Will, Theory and Experiment in Gravitational Physics, Cambridge University Press (1981).
- 11) S.Weinberg, Gravitation and Cosmology, Willey (1972).