

UMA REVISÃO SOBRE AS FUNÇÕES DE GREEN ESTACIONÁRIAS - II

J. BELLANDI Fº, R. J. M. COVOLAN*, A. B. de PÁDUA** e
J. T. S. PAES***

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas
13100 São Paulo, SP

Neste trabalho dar-se-á prosseguimento à revisão sobre as funções de Green estacionárias iniciadas no artigo I³⁾. A divisão em parágrafos apresentada nesse artigo será mantida.

§ 3. O MÉTODO DE STURM-LIOUVILLE

O método de Sturm-Liouville é aplicável para cálculo da função de Green para equações diferenciais a uma dimensão, ou seja, para equações diferenciais ordinárias.

Esse método consiste em se procurar escrever a função de Green como uma expansão em termos do produto das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea, razão pela qual é muitas vezes chamado de método da expansão tipo Sturm-Liouville.

No exemplo discutido no parágrafo anterior, o da equação radial para o problema das vibrações transversais de uma membrana circular, mostramos como a função de Green calculada pelo método da variação dos coeficientes pode ser escrita na forma de uma expansão em termos do produto das duas soluções da equação homogênea, satisfazendo as condições de con

*Bolsista da FAPESP.

**Departamento de Física, Universidade de Londrina.

***Departamento de Física, Universidade Federal do Pará.

torno impostas ao problema.

A introdução da função $p(x)$ no denominador da equação (2.12) foi "ad hoc" no intuito de se escrever a solução de forma correta, comparável com o resultado calculado. Vamos mostrar que se o operador pode ser escrito na forma de um operador de Sturm-Liouville, a função $p(x)$ aparece normalmente como na equação (2.12).

Tem-se dois tipos de operadores diferenciais de Sturm-Liouville:

$$D = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + g(x) \quad (3.1)$$

$$D = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + g(x) + \lambda f(x) \quad (3.2)$$

onde $p(x)$ é contínua e tem derivadas contínuas; $g(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas e λ é um parâmetro que não depende de x .

As equações diferenciais em que aparecem o operador da equação (3.2), são equações cujas soluções dependem explicitamente do parâmetro λ . Equações importantes são aquelas em que $f(x) = 1$, que são as chamadas equações de autovalores.

Vamos iniciar discutindo a função de Green para os operadores dados pela equação (3.1). A equação diferencial para a função de Green é

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] G(x, x') + g(x) G(x, x') = -\delta(x-x') \quad (3.3)$$

cujas soluções se quer determinar num certo intervalo $[a, b]$, com condições de contorno bem definidas em $x = a$ e $x = b$.

Do que foi discutido nos parágrafos anteriores pode-se sugerir o seguinte Ansatz para solução dessa equação

$$G(x, x') = \begin{cases} C_1(x') y_1(x) & \text{para } a \leq x < x' \\ C_2(x') y_2(x) & \text{para } x' < x \leq b \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$D y(x) = 0$$

sendo que $y_1(x)$ satisfaz as mesmas condições de contorno que $G(x, x')$ para $x = a$ e $y_2(x)$ para $x = b$.

Impondo-se a continuidade de $G(x, x')$ para $x = x'$, tem-se que

$$C_1(x') y_1(x') - C_2(x') y_2(x') = 0 \quad (3.5)$$

Integrando-se a equação (3.3) em x , num intervalo in finitesimal em torno do ponto $x = x'$, tem-se

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} G(x, x') \right] + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx g(x) G(x, x') = -1$$

Tanto $g(x)$ como $G(x, x')$ são contínuas no intervalo $[a, b]$, portanto, a segunda integral se anula e da primeira integral se obtém

$$C_1(x') y_1'(x') - C_2(x') y_2'(x') = 1/p(x') \quad (3.6)$$

Dessa expressão se vê que $1/p(x)$ determina a descontinuidade da primeira derivada da função de Green em $x = x'$.

As equações (3.5) e (3.6) formam um sistema linear de equações em C_1 e C_2 . O determinante do sistema é diferente de zero, pois ele nada mais é do que o determinante Wronskiano entre $y_1(x)$ e $y_2(x)$, que são linearmente independentes

$$\Delta = W(y_1, y_2)$$

As soluções do sistema são

$$C_1(x') = \frac{1}{p(x')} \frac{y_2(x')}{W(y_1, y_2)}$$

$$C_2(x') = \frac{1}{p(x')} \frac{y_1(x')}{W(y_1, y_2)}$$

Obtém-se, assim, a função de Green

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{y_1(x) y_2(x')}{p(x') W(y_1, y_2)} & x < x' \\ \frac{y_1(x') y_2(x)}{p(x') W(y_1, y_2)} & x > x' \end{cases} \quad (3.7)$$

As condições de contorno estão automaticamente satisfeitas, pois $y_1(x)$ satisfaz as mesmas condições em $x = a$ e $y_2(x)$ em $x = b$. Deve-se observar que o produto $p(x) W(x)$ não introduz nenhuma singularidade adicional no intervalo $[a, b]$, pois ele não depende de x . De fato, sejam as equações diferenciais homogêneas para $y_1(x)$ e $y_2(x)$

$$D y_1(x) = 0, \quad D y_2(x) = 0.$$

Multiplicando-se a primeira por $y_2(x)$ e a segunda por $y_1(x)$ e subtraindo-se, obtêm-se

$$\frac{d}{dx} [p(x) (y_2 y_1' - y_1 y_2')] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} [p(x) W(x)] = 0.$$

Portanto, $p(x) W(x) = \text{constante}$.

A função de Green assim calculada apresenta naturalmente a dependência em $1/p(x)$ como introduzida na equação (2.12), a termo de comparação com a calculada pelo método da variação dos coeficientes.

De maneira geral, toda vez que um operador diferencial pode ser rearranjado na forma de um operador de Sturm-Liouville do tipo dado pela equação (3.1), sua correspondente função de Green é dada pela equação (3.4), em termos das soluções da equação homogênea que satisfazem as mesmas condições de contorno.

Para operadores diferenciais que podem ser escritos na forma dada pela equação (3.2), o método também pode ser aplicado, só que a função de Green terá uma dependência no

parâmetro λ . Essa dependência pode ser tal que acarreta restrições sobre o parâmetro λ . Essas restrições têm importantes conseqüências físicas.

No exemplo discutido no § 2³⁾, escrevemos o operador diferencial da equação radial para as vibrações transversais da membrana circular na forma da equação (3.2), com $\lambda = m$.

Nesse caso a função de Green depende de m como ordem das funções de Bessel. A restrição sobre m pode aparecer devido à presença de $J_m(R)$ no denominador. Para um dado m , R pode ser um zero da função de Bessel e tem-se um aparente pólo na função de Green. Ele é aparente, pois é devido às soluções da equação homogênea e significa que não estamos escolhendo as soluções apropriadas para a equação homogênea.

Para discutir as implicações físicas das restrições sobre λ vamos determinar as soluções da seguinte equação diferencial

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] G(z, z') = -\delta(z-z') \quad (3.8)$$

no intervalo $-\infty < z < \infty$, com as condições de contorno de que, para $z \rightarrow \pm\infty$, $G(z, z')$ tende a zero. O operador diferencial é um operador de Sturm-Liouville com $p(z) = 1$, $g(z) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}$ e $f(z) = 1$. A equação diferencial homogênea

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] u(z) = 0 \quad (3.9)$$

é uma equação de Weber²⁾, cujas soluções linearmente independentes são as funções de Weber $D_\lambda(z)$ e $E_\lambda^\beta(z)$, $\beta = 0, 1$. Essas duas soluções tendem a zero para $z \rightarrow \pm\infty$ mas as soluções $E_\lambda^\beta(z)$ são regulares na origem para qualquer λ , enquanto que $D_\lambda(z)$ não é regular na origem para qualquer λ . A função $E_\lambda^0(z)$ é uma função par em z enquanto que $E_\lambda^1(z)$ é uma função ímpar.

O determinante Wronskiano entre essas funções²⁾ é

$$W[D_\lambda(z), E_\lambda^\beta(z)] = \frac{2^{1/2} 2^{1-\lambda/2}}{\Gamma\left(\frac{\beta-\lambda}{2}\right)} \quad (3.10)$$

Essa expressão já apresenta restrição sobre λ , que aparece explicitamente nos pólos da função gama. Se $\frac{\beta - \lambda}{2} = -m$, $m = 0, 1, 2, 3 \dots$, a função gama tem pólos e conseqüentemente o Wronskiano é nulo. Conseqüentemente, as soluções escolhidas não são linearmente independentes, devendo-se, portanto, escolher outras soluções apropriadas para cálculo da função de Green.

Para se escrever a função de Green na forma da equação (3.7) tem-se que observar que as condições de contorno estão definidas para $z \rightarrow \pm\infty$, mas $G(z, z')$ tem que ser regular na origem.

A função de Green será

$$G(z, z') = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta - \lambda}{2}\right)}{\pi^{1/2} 2^{1+\lambda/2}} E_{\lambda}^{\beta}(z_{<}) D_{\lambda}(z_{>}) \quad (3.11)$$

com a restrição $\lambda \neq 2m + \beta$. Estamos introduzindo uma nova notação para designar a função de Green. Quando se escreve $z_{<}$ ou $z_{>}$ significa que se deve tomar o menor entre z e z' ou o maior entre z e z' , respectivamente. Se considerarmos que $\beta = 0, 1$, os pólos da função gama ocorrem para $\lambda = 2m$ e $\lambda = 2m + 1$, ou seja, $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2 \dots$.

Vejamos quais são as implicações físicas da existência desses pólos na função de Green. Para se ver isso, consideremos novamente a equação homogênea

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u(z) = 0 \quad (3.9)$$

Introduzindo-se $z = \sqrt{2}x$, essa equação se transforma

em

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda + 1 - x^2\right] u(x) = 0 \quad (3.12)$$

que nada mais é do que a equação de Schrödinger para uma partícula que se move na presença de um oscilador harmônico²⁾. Quando $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $2n+1$ define os níveis de energia do oscilador harmônico, $\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1$, portanto, $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$.

Os pólos da função de Green, que definem os autovalores da equação homogênea, carregam assim informações sobre os autovalores de energia.

A função de Green é uma função contínua em z e z' e pode ser expandida numa série de Laurent em torno dos pólos. No caso unidimensional, os coeficientes dessa expansão definem o produto das autofunções estacionárias em z e z' , como foi discutido na referência 1.

Como os coeficientes dessa expansão nada mais são do que os resíduos das funções calculadas nos pólos, para se obter as autofunções da equação homogênea basta calcular o resíduo da função de Green nos pólos, pelos métodos tradicionais de cálculos de resíduos⁴⁾. Conseqüentemente, a função de Green carrega consigo todas as informações dinâmicas sobre o sistema.

Temos, ainda, que mostrar que de fato o resíduo da função de Green calculado nos pólos, define o produto das autofunções da equação homogênea no caso unidimensional. Isso pode ser feito se, na obtenção das soluções da equação homogênea, levarmos em conta a restrição que ocorre sobre λ , considerando de fato como uma equação de autovalores. Isso dá origem a um método de cálculo, o método da expansão em autofunções. A grande vantagem desse método é que ele pode ser aplicado também para problemas com operadores a derivadas parciais.

§ 4. O Método da Expansão em Autofunções

Seja a equação diferencial não homogênea

$$\mathcal{L}G(x,x') = \delta(x-x') \quad (4.1)$$

onde \mathcal{L} é um operador diferencial na forma

$$\mathcal{L} = D - \lambda \quad , \quad (4.2)$$

cujas soluções se quer determinar num intervalo $[a,b]$, satis

fazendo as condições de contorno bem definidas. Vamos procurar as soluções dessa equação em termos das soluções da equação homogênea. Este método é aplicável mesmo quando \mathcal{D} não é um operador de Sturm-Liouville, portanto, D pode ser um operador diferencial qualquer a uma variável.

A equação diferencial homogênea é

$$(D - \lambda) u(x) = 0 \quad (4.3)$$

Sejam $u_1(x)$ e $u_2(x)$ duas soluções linearmente independentes dessa equação. A solução geral será uma superposição dessas soluções

$$u(x) = A u_1(x) + B u_2(x) \quad (4.4)$$

Vamos supor que as condições de contorno restrinjam essa solução, ou seja, ela existe somente para valores particulares de $\lambda = \nu$. Para cada valor de ν , tem-se uma solução $u_\nu(x)$, ou seja

$$(D - \nu) u_\nu(x) = 0 \quad (4.5)$$

com $u_\nu(x)$ satisfazendo as condições de contorno.

O conjunto de soluções $\{u_\nu(x)\}$ deve ser determinado de forma que ele seja um conjunto ortonormal e completo.

O parâmetro $\lambda = \nu$ pode assumir valores tanto no discreto como no contínuo.

A condição de ortonormalidade é dada por

$$\int_a^b u_\nu^*(x) u_{\nu'}(x) dx = \delta_{\nu, \nu'} \quad (4.6)$$

e condição de completudeza no caso em que ν é discreto é dada por

$$\sum_{\nu} u_\nu^*(x') u_\nu(x) = \delta(x - x') \quad (4.7)$$

e no caso contínuo por

$$\int_V dv u_V^*(x') u_V(x) = \delta(x-x') \quad (4.8)$$

Consideremos as soluções da equação (4.1), quando v está definido no discreto. Vamos escolher o seguinte Ansatz para $G(x, x')$,

$$G(x, x') = \sum_V C_V(x') u_V(x) \quad (4.9)$$

As condições de contorno estão satisfeitas, pois $u_V(x)$ as satisfazem. Introduzindo essa expressão na equação (4.1), tem-se,

$$(D-v) \sum_V C_V(x') u_V(x) = -\delta(x-x') \quad (4.10)$$

Como o conjunto $\{u_V(x)\}$ é um conjunto completo, podemos escolher como representação para $\delta(x-x')$ uma expansão em termos dessas funções, que é dada pela equação (4.7). Lembrando ainda que $D u_V(x) = v u_V(x)$, podemos escrever

$$\sum_V (v-\lambda) C_V(x') u_V(x) = -\sum_V u_V^*(x') u_V(x) \quad (4.11)$$

Dessa expressão determinamos que

$$C_V(x') = \frac{u_V^*(x')}{\lambda - v} \quad (4.12)$$

Essa solução traz consigo a restrição de que $\lambda \neq v$ na equação (4.1).

A função de Green, portanto, será

$$G(x, x') = \sum_V \frac{u_V^*(x') u_V(x)}{\lambda - v} \quad (4.13)$$

Se o parâmetro v está definido no contínuo, a função de Green será dada por

$$G(x, x') = \int_V dv \frac{u_V^*(x') u_V(x)}{\lambda - v} \quad (4.14)$$

Quando a equação homogênea admite soluções tanto para ν discreto como contínuo, a função de Green será dada pela soma dessas duas soluções. Esses resultados estão perfeitamente de acordo com aqueles obtidos por Bellandi, Oliveira e Pavão⁽¹⁾, calculados a partir da transformada de Fourier da função de Green dependente do tempo.

Esses resultados nos mostram claramente que a expansão da função de Green em torno de seus pólos, nos permite calcular o produto das autofunções da equação homogênea como resíduos da função de Green calculados para $\lambda = \nu$, conforme o que foi discutido no parágrafo anterior.

Como exemplo, vamos determinar a solução da seguinte equação

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \right] G(x, x') = -\delta(x - x')$$

num intervalo $[0, l]$ com as condições de contorno $G(0, x') = 0$, $G(l, x') = 0$.

Determinemos as soluções da equação homogênea

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \right] u(x) = 0$$

As duas soluções linearmente independentes são $\text{sen } \sqrt{\lambda}x$ e $\text{cos } \sqrt{\lambda}x$. A solução geral será

$$u(x) = A \text{ sen } \sqrt{\lambda}x + B \text{ cos } \sqrt{\lambda}x$$

A condição de contorno em $x = 0$, impõem que $B = 0$. Para $x = l$, tem-se

$$A \text{ sen } \sqrt{\lambda}l = 0$$

portanto,

$$\lambda_n = \left[\frac{n\pi}{l} \right]^2$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$

O conjunto ortonormal de soluções $\{u_n(x)\}$ com

$$u_n(x) = \left[\frac{2}{l}\right]^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

é um conjunto completo, pois

$$\frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x' = \delta(x-x') .$$

A função de Green será dada por

$$G(x, x') = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x'}{\lambda - \left[\frac{n\pi}{l}\right]^2} .$$

Essa expressão é a que se obteria calculando a transformada de Fourier da função de Green dependente do tempo para a equação de condução do calor numa barra homogênea, calculada na referência (1) com $a = 1$.

Como outro exemplo, vamos determinar a função de Green para o oscilador harmônico quântico

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda\right] G(x, x') = -\delta(x-x') \quad (4.15)$$

com a condição de contorno de que $G(x, x')$ tende a zero para $x \rightarrow \pm\infty$.

As soluções da equação diferencial homogênea (2)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda\right] \psi(x) = 0 \quad (4.16)$$

que satisfazem às condições de contorno, são aquelas em que $\lambda = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. O conjunto ortonormal e completo de soluções é dado pelas funções (2)

$$\psi_n(x) = \left[\sqrt{\pi} 2^n n!\right]^{-1/2} H_n(x) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] . \quad (4.17)$$

onde $H_n(x)$ são os polinômios de Hermite.

A função de Green será dada por

$$G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(x') \psi_n(x)}{\lambda - 2n - 1} \quad (4.18)$$

$$G(x, x') = \pi^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2 + x'^2}{2}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda - 2n - 1} \frac{1}{2^n n!} H_n(x') H_n(x) .$$

É ilustrativo se comparar este resultado com o calculado no parágrafo anterior, função de Green para a equação de Weber.

A equação diferencial para a função de Green de Weber é

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] G_W(z, z') = -\delta(z - z') .$$

Fazendo-se a mudança de variável $Z = \sqrt{2}x$, $Z' = \sqrt{2}x'$, essa equação se transforma em

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda + 1 - x^2 \right] G_W(x, x') = -\sqrt{2} \delta(x - x') .$$

Pode-se escrever

$$G_W(x, x') = \sqrt{2} G(x, x')$$

e $G(x, x')$ satisfaz a equação

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda + 1 - x^2 \right] G(x, x') = -\delta(x - x') ,$$

que é a equação para a função de Green do oscilador harmônico. Assim, a função de Green $G(x, x')$ pode ser escrita em termos da função de Weber quando se soma sobre os valores de β .

$$G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2}} G_W(\sqrt{2}x, \sqrt{2}x') . \quad (4.19)$$

Se os métodos de cálculos são perfeitamente equiva-

lentes, significa que a soma em n na equação (4.18) deve convergir para a função calculada pela equação (4.19).

A função de Green calculada pelo método da expansão em autofunções mostra que a função de Green é simétrica pela troca de x por x' , mas não revela a dependência no fato de x ser maior ou menor do que x' , como mostra claramente a equação (4.19). Essa dependência, no entanto, aparece explicita quando se calcula a soma sobre os pólos.

A soma na equação (4.18) pode ser calculada usando-se a função geratriz bilinear para os polinômios de Hermite, conhecida como a fórmula de Mehler⁽²⁾. Essa soma foi realizada por Bellandi e Caetano⁽⁵⁾, obtendo uma representação integral para a função de Green.

$$G(x, x') = \pi^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2 + x'^2}{2}\right] \times \int_0^1 \xi^{-\lambda-1/2} (1-\xi^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xx'\xi - (x^2 + x'^2)\xi^2}{1-\xi^2}\right] d\xi \quad (4.20)$$

Essa integral pode ser calculada em termos de funções de Whittaker⁽⁶⁾, obtendo-se

$$G(x, x') = \left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/2} (x x')^{-1/2} \times \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) M_{\lambda/2, -1/4}(x^2) + \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) M_{\lambda/2, 1/4}(x^2) \right\} W_{\lambda/4, -1/4}(x'^2) \quad (4.21)$$

para $x' > x$. Para $x' < x$ basta inverter os argumentos nas funções de Whittaker.

Usando-se as relações existentes entre as funções de Whittaker e as funções de Weber⁽²⁾, a equação (4.21) pode ser escrita na forma

$$G(x, x') = (2)^{-1/2} \int_{\beta=0}^1 \frac{1}{\pi^{1/2} 2^{1+\nu/2}} \Gamma\left(\frac{\beta-\nu}{2}\right) E_{\nu}^{\beta}(\sqrt{2} x_c) D_{\nu}(\sqrt{2} x_y) \quad (4.22)$$

com $\nu = \frac{\lambda-1}{2}$, que é o resultado que se obtém usando a equa

A comparação dessa expressão com a equação (4.18) mostra claramente que a expansão em série de Laurent em torno dos pólos nos permite determinar os autovalores de energia do oscilador harmônico, bem como suas respectivas autofunções.

Quando o operador diferencial é a derivadas parciais, portanto problemas multidimensionais, um procedimento análogo para se calcular a função de Green dependerá muito da simetria apresentada pelo problema. Os pólos da Função de Green continuam a representar os autovalores de energia, entretanto, o resíduo da função de Green representará agora a matriz de densidade. No próximo artigo discutiremos esses problemas.

Referências Bibliográficas

- (1) J. Bellandi Filho, E. Capelas de Oliveira e H. Germano Pavão, Revista de Ensino de Física, Vol. 6, nº 2, dez/84, 9/22.
- (2) J. Bellandi Filho, Funções Especiais, Ed. Papirus/UNICAMP, Campinas, SP (1985).
- (3) J. Bellandi Filho, R. J. M. Covolan, A. B. de Pádua e J. T. S. Paes, Revista de Ensino de Física, Vol. 10, dez/88, 50/66.
- (4) R. V. Churchile, Variáveis complexas e suas aplicações, Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda (1978).
- (5) J. Bellandi Filho e E. S. Caetano Neto, J. Phys. A. Math. Gen. 9, 683 (1976).
- (6) E. C. de Oliveira, Rev. Bras. de Física 11, 405 (1981).