

CIRCUITO NÃO-LINEAR COMO EXPERIMENTO DE LABORATÓRIO PARA DEMONSTRAÇÃO DE CAOS DETERMINÍSTICO

PETER LAIS*

Departamento de Física

Universidade Federal de Santa Catarina

88049 Florianópolis, SC

RESUMO

Este artigo tem por objetivo sugerir um experimento simples que permita demonstrar facilmente numa aula de laboratório o que se entende por "caos determinístico". Baseado em componentes acessíveis, o experimento dá ao estudante uma visão de um assunto bastante atual de pesquisa básica. O experimento tanto serve para demonstração em aula do caos determinístico como pode também ser usado pelos próprios alunos em aulas de laboratório.

1. INTRODUÇÃO

Tanto no curso secundário como na universidade, estudantes de física normalmente aprendem como se pode predizer o movimento de corpos, se calcular a tensão e corrente em circuitos elétricos ou determinar-se a interferência de ondas. Esses problemas têm a seguinte característica comum: conhecendo-se as condições iniciais é possível determinar-se com precisão a evolução temporal do sistema. Esse fato contrasta com o que se aprende em Mecânica Estatística onde, devido a nossa incapacidade de determinar as condições iniciais para sistemas com (da ordem de) 10^{23} graus de liberdade bem como

*Endereço Permanente: *Fakultät für Physik der Universität Freiburg, 7800 Freiburg, R.F.A.*

resolver as respectivas equações de movimento, somos forçados a descrever o comportamento dos sistemas usando métodos estatísticos. Isto não significa de modo algum um abandono do conceito de que a solução das equações newtonianas de movimento é suficiente para descrever o sistema completamente. Significa simplesmente que não é factível anotar-se a posição e a velocidade de todas partículas de um sistema de muitos corpos. É por isso que se introduzem nesses casos variáveis coletivas tais como densidade, pressão, volume ou temperatura em sistemas de muitos corpos. Obtém-se então, em vez das equações de movimento de Newton, equações diferenciais parciais como, por exemplo, a equação de Navier-Stokes ou a equação de Fokker-Planck, que não são equações de movimento *determinísticas* mas sim equações *estocásticas* que nos fornecem somente probabilidades.

Apesar do que dissemos acima, existem também equações de movimento determinísticas para as quais, apesar de lidarmos com poucos graus de liberdade, encontramos uma dificuldade essencial: evolução temporal de duas soluções das equações de movimento que diferem unicamente por valores infinitesimais em suas condições iniciais torna-se cada vez mais distinta uma da outra, à medida que o tempo avança. Existem sistemas cuja evolução no espaço de fase a partir de condições iniciais infinitesimalmente próximas diverge exponencialmente com o passar do tempo. Pode-se mostrar que para sistemas com mais de dois graus de liberdade tal comportamento é regra e não exceção. Como somente podemos determinar as condições iniciais com precisão finita (limites teóricos para tais determinações são impostos, por exemplo, pelo princípio de incerteza de Heisenberg), tal comportamento (forte dependência nas condições iniciais) faz com que após um intervalo finito de tempo não possamos mais prever a posição e velocidade do sistema. Denominamos tais sistemas físicos de "caóticos". Como as equações de movimento de tais sistemas têm carácter determinístico¹ costuma-se chamar a forte dependência nas condi-

¹São sistemas de equações diferenciais de primeira ordem no tempo que têm portanto soluções perfeitamente definidas.

ções iniciais (principalmente em sistemas de poucos graus de liberdade) de "caos determinístico". Como para a caracterização de tais sistemas não raramente é necessário usar-se métodos estatísticos, diz-se que as soluções das equações de movimento de tais sistemas possuem "elementos estatísticos".

Neste experimento propomos um sistema que pode ser facilmente compreendido pelos estudantes, que satisfaz uma equação determinística e, apesar disto, apresenta características de "caos". Hoje conhecem-se várias maneiras (i.e. várias "rotas") através das quais um sistema passa de um comportamento regular para um caótico. Algumas dessas rotas já foram bastante estudadas e compreendidas; outras são ainda objeto de pesquisa ativa. O experimento que apresentamos neste artigo trata de rota "mais velha" para o caos, i.e. da rota que se conhece a mais tempo, e que é conhecida em termos técnicos como o "cenário de Feigenbaum" ou ainda, como a rota por "dobramento do período".

Na seção 2 apresentamos um pequeno resumo da teoria do experimento. Esse resumo visa mais a mostrar o mecanismo do dobramento do período para o estudante do que ser um tratamento matemático rigoroso do assunto. Para maiores detalhes indicamos o livro "Deterministic Chaos" de H. G. Schuster [1] ou os artigos originais [veja Referências Bibliográficas]. A seção 3 contém uma lista de condições técnicas, exemplos de resultados bem como instruções para a reprodução do experimento tal como ele foi feito no Departamento de Física da UFSC em Florianópolis. Finalmente, apresentamos num apêndice um programa simples para um computador tipo PC cuja finalidade é servir de ponto de partida para "experimentos numéricos" por parte dos alunos, com a finalidade de ficar os conceitos teóricos introduzidos.

2. UMA "PINCELADA" DE TEORIA

Consideraremos agora um circuito elétrico oscilante excitado por uma fonte externa. Nas aulas de física geral aprende-se como resolver as equações correspondentes a esse siste

ma que envolve um indutor, uma resistência e um capacitor (veja figura 1).

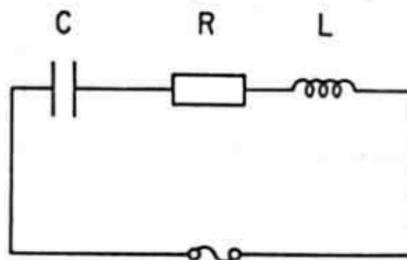


Figura 1 - Esquema de um circuito oscilante linear.

A equação diferencial para a carga Q no capacitor é

$$-L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

A solução desta equação é bem conhecida e não será rediscutida aqui. Em vez disso desejamos agora substituir o capacitor C por um diodo. O circuito fica neste caso sendo como o que é mostrado na figura 2. Deste modo alteramos o termo Q/C na (1) através da substituição

$$\frac{Q}{C} \rightarrow V(Q) \quad , \quad (2)$$

onde $V(Q)$ obedece a relação (veja [1] S. 75)

$$V(Q) = \left(1 + \frac{V(Q)}{0,6}\right)^{0,43} \frac{Q}{C} \quad (3)$$

Com isto a equação de movimento do sistema torna-se não-linear e o tratamento usual (assumir soluções exponenciais, cálculo da função de transferência, etc.) não é mais apropriado para o tratamento do sistema. Em vez disso, é necessário utilizar-se métodos numéricos para determinarmos soluções das equações de movimento. Se desejarmos fazer previsões sobre

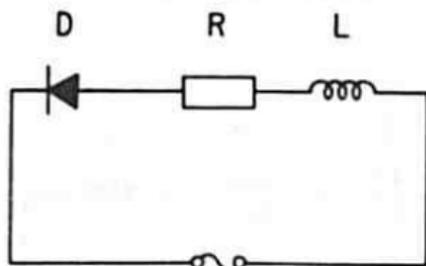


Figura 2 - Esquema de um circuito oscilante não linear.

longos intervalos de tempo será obviamente necessário consumir-se bastante tempo com cálculos. Uma maneira de se amenizar tal dificuldade é a seguinte:

Consideramos qual será a amplitude da tensão no instante $t + T$ ($T = 2\pi/\omega$, onde ω é a frequência circular da excitação) quando conhecermos a amplitude no instante t (Figura 3). Ve-se que a função inicialmente cresce monotonicamente, atinge um certo valor máximo I^* e depois decresce de modo monotônico novamente.

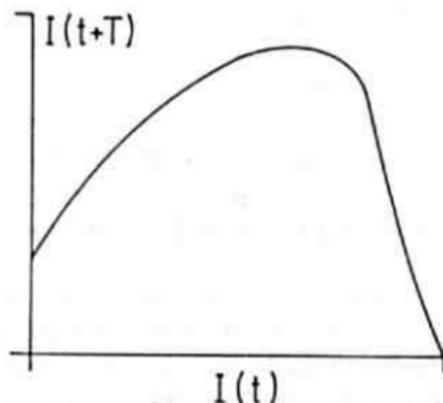


Figura 3 - Plot de $I(t+T)$ contra $I(t)$. É fácil ver que este gráfico representa uma transformação unidimensional com um máximo quadrático.

Uma equação simples (talvez a mais simples de todas) que possui esta propriedade é a chamada equação logística,

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n) \quad , \quad (4)$$

que para $\lambda \leq 4$ mapeia o intervalo $[0,1]$ nele mesmo. Desejamos agora investigar que tipo de pergunta se pode fazer a respeito de um tal sistema.

Se excitarmos um sistema físico com uma determinada frequência constante, após um certo intervalo de tempo ele atinge um estado estável de movimento. No caso "ideal" este estado estável é caracterizado por uma oscilação com o mesmo período da fonte de excitação e por uma amplitude fixa. Para a transformação $I(t+T) = F(I(t))$ isto significa que $I(t)$ deve ser um Ponto Fixo² da transformação F , já que quando I oscilar com o mesmo período que a fonte de excitação teremos $I(t+T) = I(t)$. Podem ocorrer casos em que o ponto fixo $I(t)$ é instável, ou seja se perturbarmos fracamente o sistema as iterações se afastarão de ponto fixo. Esse tipo de pontos fixos não são vistos em experimentos.

Perguntamo-nos agora: quais são os pontos fixos da iteração $I(t+T) = F(I(t))$, ou, no nosso caso, quais são os pontos fixos da iteração (4) e quais deles são estáveis?

Os pontos fixos da iteração 4 são fáceis de se calcular. Eles são:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda} \quad .$$

x_2 estará dentro do intervalo $[0,1]$ somente se $\lambda > 1/4$. Nosso próximo interesse será a estabilidade dos pontos fixos. Para tanto imaginemos começar a iteração em um ponto $x_0 = x^* + \epsilon$ localizado na vizinhança de um ponto fixo x^* . Em primeira ordem em ϵ obtemos para x_1 :

²Um ponto fixo de uma transformação $x \rightarrow f(x)$ é um ponto x^* do intervalo de definição de f para o qual vale: $f(x^*) = x^*$.

$$x_1 = x^* + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^*} \epsilon \quad (5)$$

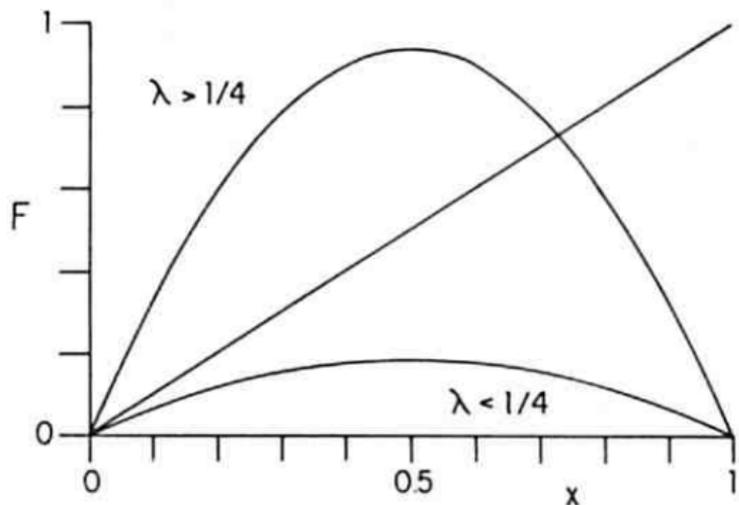


Figura 4 - Função logística para vários valores do parâmetro λ e a bissectriz $F(x) = x$. Para $\lambda < 1/4$ existe somente um ponto fixo: $x = 0$.

Vemos imediatamente que, quando $\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| < 1$, x_1 estará mais perto de x^* do que x_0 . Disto segue como critério para que x^* seja um ponto fixo estável de F a seguinte condição:

$$\left\| \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \right\| < 1 \quad (6)$$

Para o mapa logístico (4) isto implica

$$\lambda < \frac{3}{4} \quad .$$

O que acontece quando λ se torna maior do que $3/4$? O ponto fixo x_1 é instável de qualquer modo ($F'(0) = 4\lambda > 1$) - não existe mais, portanto, nenhum ponto fixo estável de F . Apare

ce então caos? Vejamos o gráfico de x_{n+2} contra x_n . Ele corresponde a uma iteração de F por duas vezes seguidas (Figura 5) ou, em termos físicos, à "receita" $I(t+2T) = F(F(I(t)))$.

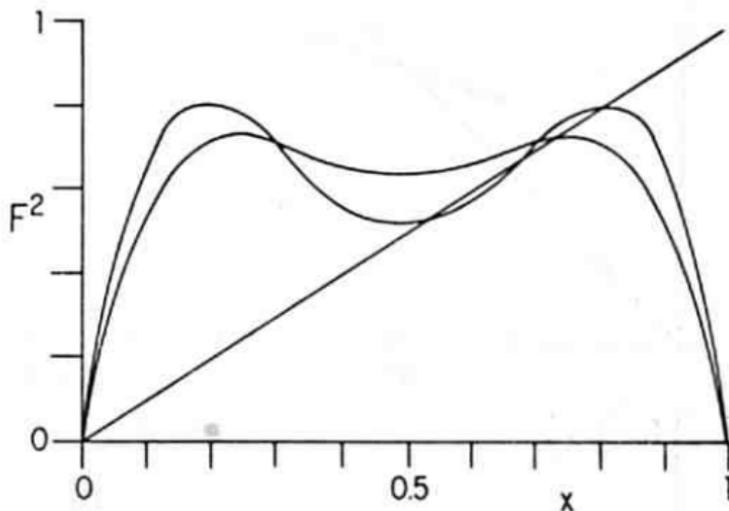


Figura 5 - Gráfico de $F(F(x))$ contra x com bissetriz para dois valores diferentes de λ . Quando um ponto fixo de F torna-se instável, aparecem dois novos pontos fixos estáveis de F^2 .

Portanto está claro: quando F tiver um ponto fixo, ele também o será de F^2

$$[F(F(x)) = F(x) = x ; F(F(x))' = F'(x)F'(F(x)) = F'(x)^2]$$

O sinal da derivada de F^2 num ponto fixo de F será sempre positivo. A Figura 6(A e B) mostra o que acontece: quando um ponto fixo de F tornar-se instável aparecerão na sua vizinhança dois novos pontos fixos estáveis de F^2 .

Fisicamente isto significa que o sistema precisa agora de duas vezes mais tempo para completar um período. Esta é a razão para a denominação "dobramento do período". Os dois pontos fixos estáveis de F^2 alternam-se sucessivamente em F .

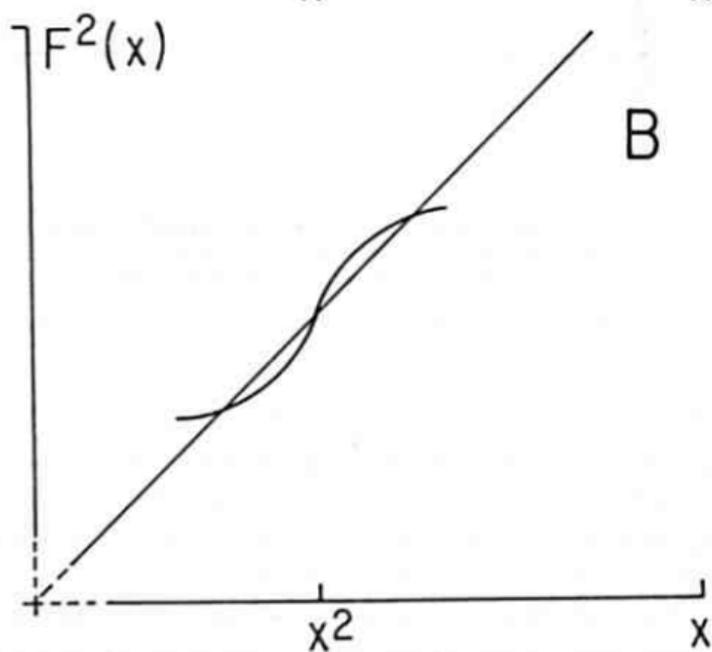
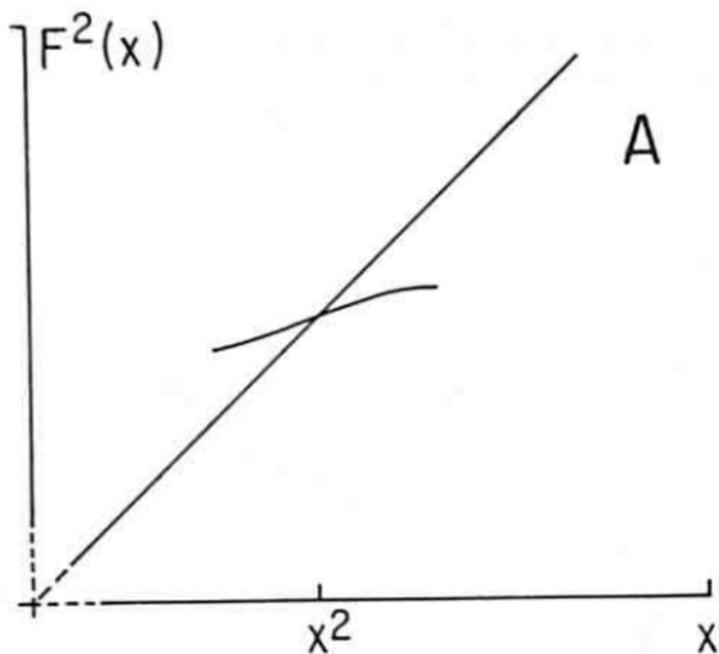


Figura 6 - A: F^2 e a bissetriz antes que o ponto fixo de F torne-se instável. B: Após a bifurcação: a inclinação em x^* é agora >0 , e portanto, dois novos pontos fixos de F^2 apareceram.

Se aumentarmos λ um pouco mais veremos que os pontos fixos de F^2 tornam-se instáveis, aparecendo ciclos de período 4. Tal comportamento prossegue quando continuarmos a aumentar λ , com a duração do período mais e mais aumentando até que, finalmente, ele torna-se infinito. Este é o ponto que desejamos identificar através do nome "caos".

Denotemos por λ_n os valores de λ para os quais o dobramento de período passa de um ciclo de período 2^n para um de período 2^{n+1} . Denotemos por d_n a distância típica³ entre dois pontos fixos vizinhos provenientes de uma bifurcação de um ponto fixo anterior.

Feigenbaum [2] descobriu uma série de propriedades interessantes para iterações

$$x_{n+1} = F(x_n) = \lambda f(x_n),$$

cujas função f obedece as seguintes condições:

- f é contínua, possui derivada contínua por intervalos e possui um máximo diferenciável x^* no intervalo $[0,1]$ com $f(x^*) = 1$.
- $f(x) > 0$ em $[0,1]$, $f'(x) \geq 0$ para $x < x^*$ e $f'(x) < 0$ para $x > x^*$.
- Existe um $\lambda > 1$ tal que dois pontos fixos instáveis ($x_1 = 0$ e um outro $x^* \in [0,1]$) de $F(x) = \lambda f(x)$ existam.
- f é côncava num intervalo em torno de x^* ($f'' < 0$, caso f'' existir).

Algumas destas propriedades são:

- Os valores do parâmetro λ para os quais aparecem bifurcações convergem para um valor fixo denotado por λ_∞ .
- Para os valores λ_n temos no limite $n \rightarrow \infty$:

$$\delta_n = \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} \rightarrow \delta = 4,669201 \dots$$

³Uma definição precisa de distância "típica" requer um tratamento matemático exato do mecanismo de bifurcação através da teoria de grupo de renormalização. Citamos [2] para os leitores interessados.

- Para as distâncias d_n temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{|d_n|}{|d_{n+1}|} \rightarrow \alpha = 2,502907 \dots$$

- Para valores de λ maiores que λ_∞ a iteração apresenta comportamento caótico.

Desejamos enfatizar que esta lista representa apenas alguns dos interessantes resultados existentes da Teoria das Iterações e que as propriedades citadas, bem como o programa para computador listado no fim deste artigo, visam apenas motivar o interesse do leitor para um estudo próprio mais aprofundado.

Na Figura 7 representamos a posição dos pontos estáveis do mapa logístico em função do parâmetro de controle λ . O programa que gera esta figura será apresentado no apêndice A.

A beleza deste tipo de teoria baseada em mapas unidimensionais torna-se mais evidente quando pensamos um pouco sobre que outro tipo de sistema simples é capaz de apresentar uma estrutura tão rica. Observe que o fenômeno do dobramento do período no mapa logístico pode ser facilmente verificado com uma calculadora de bolso em toda riqueza de detalhes.

3. CONSTRUÇÃO EXPERIMENTAL

A construção experimental que descreveremos agora é provavelmente a mais simples que se pode imaginar para demonstrar o caos determinístico. Qualquer pessoa notará que se pode facilmente generalizar e ampliar o experimento. Entretanto a presente montagem, bem como a lista de instrumentos/componentes necessários para realizar a experiência foi propositalmente mantida tão reduzida quanto possível para permitir que escolas secundárias bem como laboratórios não tão equipados pudessem reproduzi-la.

O presente experimento foi originalmente feito para aulas de laboratório ministradas na Universidade de Freiburg (Alemanha Ocidental) [7] para estudantes de fim de curso. O

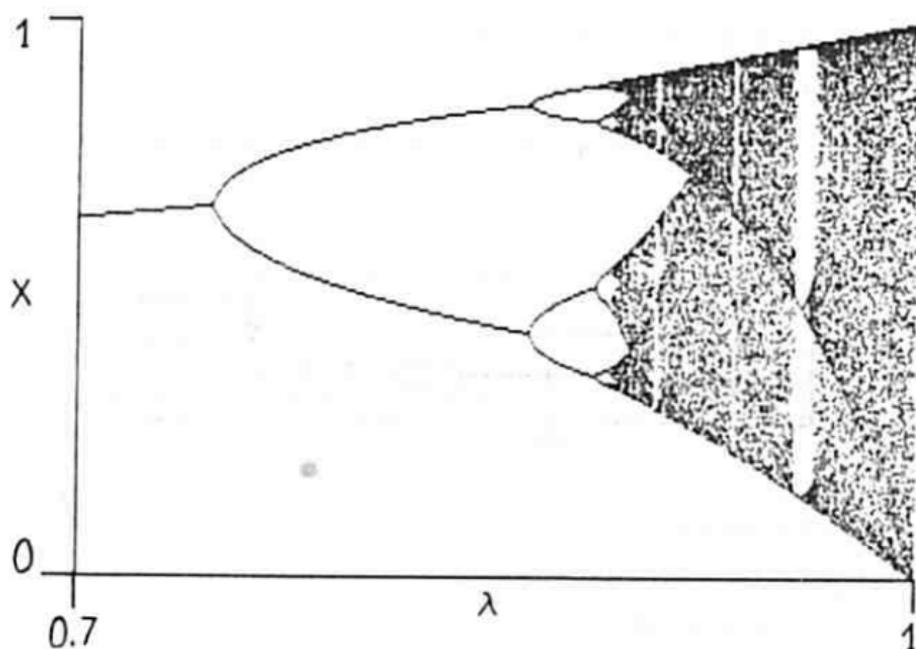


Figura 7 - Pontos estáveis em função de λ .

experimento lá realizado contém entretanto uma série de complementos adicionais.

Para a execução do experimento são necessários os seguintes instrumentos e componentes eletrônicos:

- Um gerador de frequência capaz de operar entre 1 kHz-5 MHz, com ajuste de amplitude variável de no mínimo 5 volts.
- Um pequeno osciloscópio de dois canais com resolução temporal de 0.5 μ s e capaz de representação x-y.

- Alguns diodos - de preferência simples diodos retificados. Diodos da série 1N4001 - 1N4009 funcionam bem, porém não desejamos de modo algum limitar a fantasia de quem desejar reproduzir este experimento.
- Uma bobina com indutância da ordem de 10 - 100 μH .
- Cabos para ligações.

O diagrama esquemático da experiência é mostrado na Figura 8.

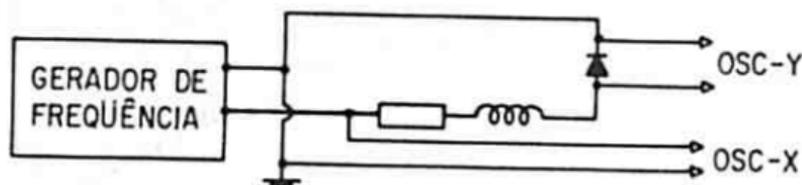


Figura 8 - Esquema do circuito para observação de dobramentos do período.

3.1 Execução do Experimento

Para a execução deste experimento recomendamos seguir o seguinte algoritmo:

- 1) Primeiramente, com uma tensão de excitação alta (= 5V), deve-se procurar na representação x-y uma frequência na qual o sinal tenha uma aparência caótica. Se não for possível encontrar tal frequência deve-se tentar ver se na representação x-t não se pode observar um sinal caótico em função da ligação indicada através dos dizeres "OSC-X" na Figura 8. Se isto também não produzir resultados, deve-se ligar à saída do gerador de frequência uma resistência apropriada (normalmente da ordem de 50 Ω).
- 2) Começa-se então com uma tensão de excitação de cerca de 0.5 V e aumenta-se essa tensão lentamente. Deve-se então anotar todos valores da tensão para os quais ocorrerem dobramento do período. Do mesmo modo deve-se medir das am-

plitudes "vizinhas". Para a definição das amplitudes vizinhas veja Figura 9.

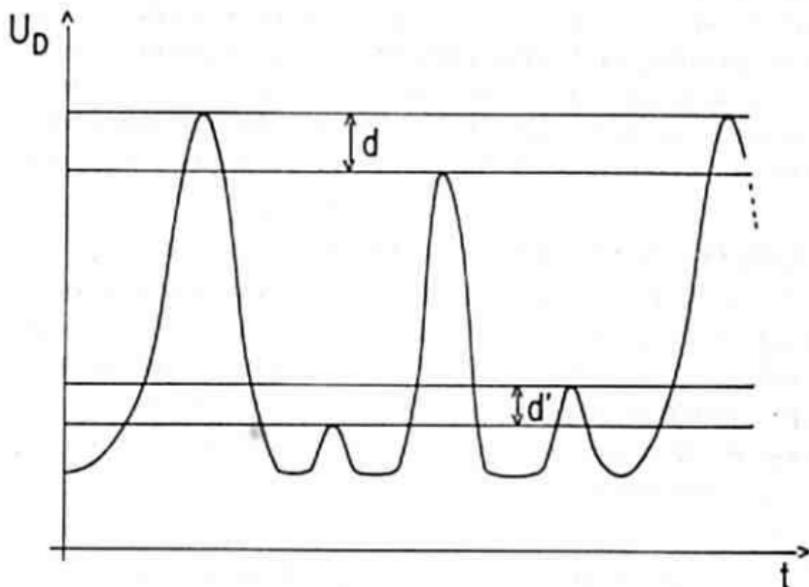


Figura 9 - Exemplo de determinação das diferenças entre amplitudes vizinhas. Deve-se medir a diferença de tensão entre duas amplitudes provenientes de um dobramento do período de uma amplitude única.

3) Determina-se α e δ de Feigenbaum através de

$$\delta_n = \frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n+1} - V_n} ; \quad \alpha_n = \frac{d_n}{d_{n+1}} . \quad (7)$$

Os dados assim obtidos darão somente aproximações grossas para α e δ . Isto porque, em primeiro lugar, nossas medidas não têm precisão suficiente; além disso, existe o problema de que a lei segundo a qual $I(t)$ transforma-se em $I(t+T)$ não é a equação logística, mas sim uma função não conhecida,

da qual apenas sabemos possuir um máximo quadrático. Por isso, somente no limite $n \rightarrow \infty$ (n : número de bifurcações) poderemos esperar obter um valor exato para α e δ . Nosso aparelho experimental permite entretanto a observação de somente 3 a 4 bifurcações. Esse fato é basicamente consequência da largura finita do traço do osciloscópio, da estabilidade da amplitude do gerador de frequências bem como, em parte, devido a ruído térmico em todos componentes eletrônicos utilizados. Esses efeitos tornam impossível a observação das pequenas separações provenientes de bifurcações de ordem mais elevadas.

3.2 Exemplos de Resultados Experimentais

As medidas que descrevemos a seguir foram feitas com um diodo do tipo 1N4002. A indutância da bobina utilizada não foi medida. Porém, baseado na nossa experiência com circuitos não-lineares desse tipo bem como da frequência de ressonância, a estimamos em aproximadamente 100 μ H.

Observamos os seguintes efeitos:

Experimento	$2 V_{exc}$	Distância dos Máximos
Dobramento do período 1 : 2	3,3V	-
Dobramento do período 2 : 4	6,6V	4,6V
Dobramento do período 4 : 8	7,8V	1,2V
Dobramento do período 8 : 16	8,05V	0,35V
Caos	8,2V	0,05V

Destes dados é fácil calcular-se usando (7):

$$\begin{aligned} \delta_1 & 2,8 \\ \delta_2 & 4,8 \\ \delta_1 & 3,8 \\ \delta_2 & 3,5 \end{aligned}$$

Os valores concordam (como era de se esperar) somente em ordem de grandeza com os valores teóricos. Pode-se entretanto

observar a tendência de que para valores de n crescentes os valores experimentais aproximam-se dos valores teóricos. Obviamente, já que a concordância é apenas na ordem de grandeza, não é necessário levar-se em conta na análise os erros de medida.

4. INSTRUÇÕES PARA USO DO PROGRAMA PARA COMPUTADOR

O programa para computador que apresentamos no apêndice A foi escrito em Turbo-Pascal 4.0 e, portanto, roda em todos microcomputadores do tipo IBM-PC, AT ou compatíveis nos quais estiver instalada esta versão ou versões mais elevadas.

Do modo como foi escrito o programa gera na tela do computador o diagrama de bifurcações para o mapa logístico utilizando a máxima resolução da tela. Com respeito a este programa desejo ainda apresentar as seguintes questões:

- 1) Amplificação do intervalo de transição para o caos. Escolha cortes convenientes na figura 7 de modo que quando ampliarmos o corte escolhido a figura obtida seja idêntica à figura original. Note que é possível achar-se infinitos cortes com esta propriedade!
- 2) Utilização de outra função. Será que (por exemplo) $\sin(x)$ apresenta a mesma "árvore" de bifurcações que o mapa logístico?
- 3) Tente funções que não possuam um máximo quadrático (por exemplo, $|x - 1/2|^q$, onde q é um número não-inteiro). O diagrama deve modificar-se.

5. AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer a Jason Gallas por incentivar-me a escrever este trabalho e por traduzi-lo do original em alemão; Thomas Braun (IF-UFRGS, Porto Alegre) tem meu reconhecimento pelo auxílio na elaboração das figuras providas do osciloscópio. Minha viagem e estada no Brasil devem-se a uma bolsa do Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico (DAAD).

REFERÊNCIAS

- [1] Schuster, H.G. *Deterministic Chaos, 2nd ed.* VCH Verlagsgesellschaft Weinheim, Basel Cambridge 1988, ISBN 3-527-26862-6.
- [2] Feigenbaum, M.J. "The Universal Properties of Nonlinear Transformations", *J.Stat.Phys.* 21, 669.
- [3] Feigenbaum, M.J. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", *J.Stat.Phys.* 19, 25.
- [4] Collet, P., Eckmann, J.P. *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (1980).
Collet, P., Eckmann, J.P. and Lanford, O.E. "Universal Properties of Maps on an Interval", *Commun.Math.Phys.* 76 211.
- [5] Um trabalho profissional sobre aspectos estéticos de transformações não-lineares está contido nos dois catálogos *Harmonie in Chaos und Kosmos e Morphologie komplexer Grenzen; Bilder aus der Theorie dynamischer Systeme*, ambos de autoria de H.O.Peitgen and P.H.Richter. Os catálogos podem ser adquiridos no seguinte endereço:
Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme Universität Bremen, D-2800 Bremen, R.F.A.
- [6] Linsay, P.S. "Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Anharmonic Oscillator", *Phys.Rev.Lett.* 49, 1285 (1982). (Artigo sobre o primeiro experimento envolvendo circuitos não-lineares do tipo aqui discutido)
- [7] Kastner, R. *Demonstrationsversuch zum deterministischen Chaos*, Staatsexamensarbeit, Freiburg (R.F.A.) 1986.
- [8] Mais referências podem ser encontradas na bibliografia no livro de Schuster acima mencionado.

APÊNDICE A - PROGRAMA PARA A GERAÇÃO DE UM DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

```
program feigenbaum;  
{ $N+ } (* Switch on Coprocessor *)  
uses CRT, Graph;
```

```

VAR
  GraphDriver, GraphMode, xPixel, yPixel, n, m, xmax, ymax : Integer;
  x, Lambda, LambdaStep, LambdaMin, LambdaMax           : Real;

BEGIN
  GraphDriver:= Detect;
  InitGraph (GraphDriver, GraphMode, ' ');
  xmax:=GetMaxX;
  ymax:=GetMaxY;

  writeln ('Input Lambdamin, Lambdamax');
  readln(Lambdamin, Lambdamax);
  ClearDevice;
  Lambda:=Lambdamin;
  Lambdastep:=(Lambdamax-Lambdamin)/xmax;
  REPEAT
    xPixel:=trunc(1.0/(Lambdamax-Lambdamin)*(Lambda-Lambdamin)*xmax);
    x:=0.5
    for n:=1 to 400 do x:=4*Lambda*x*(1-x);
    m:=2;      (* Color -- Code *)
    for n:=1 to 64 do begin
      x:=4*Lambda*x*(1-x);
      yPixel:= ymax-trunc(x*ymax);
      PutPixel(xPixel, yPixel, m);
      end;
      Lambda:=Lambda+Lambdastep;
  UNTIL (Lambda >= Lambdamax);
  line (1, ymax, xmax, ymax); line(1, 1, 1, ymax);
  gotoXY(5, 1);
  writeln('LambdaMin = ', lambdamin:1:2, ' Lambdamax = ', lambdamax:1:2);
  GotoXY(5, 2);
  writeln('Xmin = 0 , Xmax = 1');
  readln;
  closegraph;
end.

```

APENDICE B - FOTOGRAFIAS DO OSCILOSCÓPIO

