Revista de Ensino de Física vol. 11 dez/1989 24-29

ENERGIA MAGNETOSTÁTICA: UMA DEDUÇÃO SIMPLES E GERAL*

NIVALDO A. LEMOS
Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
24020 Niterói, RJ

RESUMO

É apresentada uma dedução simples e geral da energia armazenada num campo magnético estático no vácuo que não faz referência a circuitos ou baterias, nem utiliza quaisquer propriedades especiais de certas classes de materiais, tais como a lei de Ohm.

I. INTRODUÇÃO

A energia eletrostática de um sistema de cargas pontuais é definida como o trabalho externo necessário para, partindo de uma configuração inicial em que as cargas estão infinitamente afastadas uma das outras, trazê-las até suas posições finais de um modo infinitamente lento (adiabaticamente). A generalização para distribuições contínuas de carga é imediata. Seria de se esperar uma definição e dedução análogas para a energia magnetostática, mas não é isso o que se encontra nos livros didáticos. Algumas discussões da energia magnetostática[1,2] fazem uso explícito da lei de Ohm, deixando a falsa impressão de que o resultado obtido não é completamente geral, mas depende das propriedades especiais de certas classes de materiais. Outro tratamento, a ser encontrado mesmo em livros sofisticados[3-5], consiste em primeiro obter uma fórmula para a energia armazenada num circuito e, em seguida, estendê-la para uma distribuição de correntes estacio

*Parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq.

nárias arbitrária. Acreditamos que este último método sofre de duas desvantagens. A primeira é a necessidade de se inferir uma expressão geral para a energia magnetostática a partir de uma análise especial aplicada a um sistema muito particular envolvendo baterias e fios condutores, quando, de um ponto de vista lógico, seria desejável deduzir o particular do geral. A segunda é a necessidade de recorrer ao seguinte argumento que, embora correto, nos parece não muito natural: qualquer densidade de corrente solenoidal (ou seja, cuja divergência é nula) pode ser decomposta em elementos tubulares infinitesimais que são assemelhados a circuitos portadores de correntes[6]. A fim de evitar esses pontos que julgamos fracos, propomos uma dedução geral da energia magnetostática como o trabalho externo necessário para estabelecer adiabaticamente uma distribuição de corrente estacionária, mantendo, assim, uma analogia tão íntima quanto possível com o problema eletrostático correspondente.

II. DEDUÇÃO DA FÓRMULA GERAL DA ENERGIA MAGNETOSTÁTICA

Em vista de nosso interesse por um campo puramente magnetostático, lidaremos somente com correntes neutras, isto é, iremos supor que a densidade de carga total é zero com o intuito de descartar campos eletrostáticos. Adotaremos, ainda, um ponto de vista microscópico segundo o qual as fontes do campo eletromagnético consistem em cargas puntiformes movendo-se no vácuo. Suponhamos, portanto, que superpostas, coexistam duas densidades de carga iguais e opostas ρ_+ e ρ_- de tal modo que

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0 \quad . \tag{1}$$

Isto é exatamente o que acontece num fio metálico conduzindo uma corrente constante, por exemplo. Suponhamos, agora, que um agente externo ponha lentamente em movimento a densidade de carga positiva ρ_+, e, depois de um longo tempo T, a densidade de corrente final $\vec{J}$ seja atingida (a densidade de car ga negativa supõe-se permanecer em repouso[7]). Indiquemos com um subscrito t, tal como em $\vec{J}_t$, qualquer quantidade no instante t e escolhamos o intervalo de tempo T muito mais longo do que o tempo necessário para um sinal luminoso atravessar o sistema, de modo que o processo de estabelecimento da distribuição de corrente seja quase-estático ou adiabático. Nessas circunstâncias os efeitos de retardo são desprezíveis, sendo legítimo escrever em qualquer instante t

$$\vec{B}_t = \vec{\nabla} \times \vec{A}_t \quad , \tag{2}$$

com

$$\vec{A}_t(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{\pi} \int \frac{\vec{J}_t(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, dv' \tag{3}$$

e

$$\vec{\nabla} . \vec{J}_t = 0 \quad . \tag{4}$$

De acordo com a lei de Faraday, à medida que as cargas positivas vão sendo postas em movimento é induzido um campo elétrico $\vec{E}_t$ que satisfaz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_t = - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} \quad . \tag{5}$$

Combinando as Eqs. (2) e (5) obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_t = \vec{\nabla} \times \left(- \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial t} \right) \quad , \tag{6}$$

donde

$$\vec{E}_t = - \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial t} \quad . \tag{7}$$

Nós ignoramos o gradiente de um potencial escalar que poderia ser acrescentado ao lado direito da Eq. (7) porque ele representaria um campo eletrostático, mas tal campo não existe em nosso contexto em virtude da Eq. (1)[8]. É fácil verificar que $\vec{E}_t$ dado pela Eq. (7) é o campo elétrico completo notando que

$$\vec{\nabla}.\vec{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}_t\right) = 0 \quad , \tag{8}$$

de modo que ele satisfaz a equação correta consistente com a Eq. (1), tendo sido usada a propriedade[9] $\vec{\nabla}.\vec{A}_t = 0$ decorrente das Eqs. (3) e (4).

Uma vez que campos magnéticos não realizam trabalho sobre cargas em movimento, o trabalho realizado pela agência responsável pela edificação da corrente deve-se a um campo elétrico externo $\vec{E}_t^{(e)}$ necessário para contrabalançar o campo induzido:

$$\vec{E}_t^{(e)} = -\vec{E}_t = \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial t} \quad . \tag{9}$$

Seja $\vec{v}_t$ a velocidade do elemento de carga positiva $dq = \rho_+ dv$. A potência fornecida a este elemento de carga infinitesimal é $dq\ \vec{E}_t^{(e)}.\vec{v}_t$, de sorte que a potência total expendida pela agência externa no instante t é

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{J}_t.\vec{E}_t^{(e)} dv = \int \vec{J}_t.\frac{\partial \vec{A}_t}{\partial t}\, dv \quad , \tag{10}$$

onde usamos $\vec{J}_t = \rho_+ \vec{v}_t$.

Fazendo uso da Eq. (3) segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{\vec{J}}_t(\vec{r}).\vec{J}_t(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dv\, dv' = \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi}\left\{\int \frac{\vec{J}_t(\vec{r}).\dot{\vec{J}}_t(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dv\, dv' + \int \frac{\dot{\vec{J}}_t(\vec{r}).\vec{J}_t(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dv\, dv'\right\} , \end{aligned} \tag{11}$$

a última passagem justificando-se pela observação elementar que as duas integrais são iguais porque uma pode ser convertida na outra pelo mero intercâmbio de variáveis de integração $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}\,'$. Conseqüentemente,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{\vec{J}_t(\vec{r}).\vec{J}_t(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv\,dv'\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int \vec{J}_t(\vec{r}).\vec{A}_t(\vec{r})dv\right) , \qquad (12)$$

com novo emprego da Eq. (3). Assim, a energia magnética torna-se

$$U_M = \int_o^T \frac{dW}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\int \vec{J}.\vec{A}\,dv \quad , \qquad (13)$$

onde $\vec{J}$ e $\vec{A}$ representam os valores finais da densidade de corrente e do potencial vetor, respectivamente, seus valores iniciais sendo nulos[9]. A Eq. (13) é a fórmula geral que buscávamos, e daquí em diante o procedimento é padronizado.

A tradução de U_M em termos exclusivamente do campo magnético é muito simples. A lei de Ampère fornece

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o\vec{J} \quad , \qquad (14)$$

de modo que

$$U_M = \frac{1}{2\mu_o}\int \vec{\nabla}\times\vec{B}.\vec{A}\,dv = \frac{1}{2\mu_o}\int \left\{\vec{B}.\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B})\right\} dv =$$

$$= \frac{1}{2\mu_o}\int B^2 dv - \frac{1}{2\mu_o}\oint_{S_\infty} \vec{A}\times\vec{B}.d\vec{a} \quad . \qquad (15)$$

A integral de superfície ao longo da superfície esférica no infinito é zero porque $|\vec{A}\times\vec{B}|$ decresce pelo menos tão rapidamente quando $1/r^5$ a grandes distâncias, e ficamos com

$$U_M = \int \frac{B^2}{2\mu_o}\,dv \quad . \qquad (16)$$

III. COMENTÁRIOS FINAIS

A dedução da Eq. (13) que acabamos de apresentar é plenamente geral para um campo magnetostático no vácuo: não se menciona qualquer mecanismo particular para o estabelecimento das correntes e nenhuma propriedade especial de uma classe restrita de materiais é invocada. Em nossa abordagem a transição da Eq. (10) à Eq. (13) baseia-se somente num argumento de simetria extremamente simples, e não requer identidades vetoriais ou teoremas integrais[10]. Finalmente, outra característica saliente de nosso tratamento é o uso da expressão dada pela Eq. (7) para o campo elétrico induzido em termos da derivada temporal do potencial vetor. Essa forma útil, simples e explícita do campo elétrico produzido por correntes lentamente variáveis não parece receber a atenção que merece nos livros-textos tradicionais.

REFERÊNCIAS

1. LORRAIN, P. & CORSON, D.R. Electromagnetic Fields and Waves. 2.ed. San Francisco, Freeman, 1970. p. 351-6.
2. PANOFSKY, W.K.H. & PHILLIPS, M. Classical Electricity and Magnetism. 2.ed. Reading, Addison-Wesley, 1962. p. 170-2.
3. STRATTON, J.A. Electromagnetic Theory. New York, McGraw-Hill, 1941. p. 118-24.
4. JACKSON, J.D. Classical Electrodynamics. 2.ed. New York, John Wiley, 1975. p. 214-6.
5. KONOPINSKI, E.J. Electromagnetic Fields and Relativistic Particles. New York, McGraw-Hill, 1981. p. 110-6.
6. _____. _____. p. 115.
7. PETERS, P.C. In What Frame is a Current-Carrying Conductor Neutral? Am.J.Phys. New York, 53(12):1165-9, Dec. 1985.
8. HERNÁNDEZ, A.; VALLE, M.A.; AGUIRREGABIRIA, J.M. Comment on "In What Frame is a Current-Carrying Conductor Neutral?" Am.J.Phys. New York, 56(1):91, Jan. 1988.
   PETERS, P.C. Reply to "Comment on In What Frame is a Current-Carrying Conductor Neutral?" Am.J.Phys. New York, 56(1):92, Jan. 1988.
9. PORTIS, A.M. Electromagnetic Fields. New York, John Wiley, 1978. p. 310.
10. REITZ, J.R.; MILFORD, F.J.; CHRISTY, R.W. Foundations of Electromagnetic Theory. 3.ed. Reading, Addison-Wesley, 1980. p.175.