ENCOLHIMENTO DE UM PACOTE DE ONDAS GAUSSIANO

ANTONIO SOARES DE CASTRO
*Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, UNESP**

A maioria dos livros didáticos de Mecânica Quântica[1] conduz os estudantes a concluir que um pacote de ondas descrevendo o movimento de uma partícula livre sempre se espalha. O exemplo clássico apresentado é o pacote de ondas gaussiano. Recentemente Klein[2] chamou atenção para o fato que um pacote de ondas nem sempre se espalha mas pode encolher em um intervalo finito de tempo arbitrariamente grande. Este trabalho apresenta um pacote de ondas gaussiano com a característica observada por Klein.

Em Mecânica Quântica o estado de uma partícula em um instante t é completamente descrito pela função de onda $\psi(x,t)$, que pode ser construída através da superposição de ondas planas:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\ \phi(k) \exp[i(kx-\omega t)] \quad , \tag{1}$$

onde $\phi(k)$ é a transformada de Fourier de $\psi(x,0)$:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x,0)\ \exp(-ikx) \quad . \tag{2}$$

e para o caso de uma partícula livre de massa m, ω obedece a relação não linear:

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad . \tag{3}$$

Torna-se então possível obter o estado no instante t a partir do estado no instante inicial, pagando o preço do cálculo de duas integrações.

A função de onda

*CEP 12.500 - *Guaratinguetá, SP.*

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,\xi}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-\xi x^2 + i k_0 x) \quad , \tag{4}$$

com $\xi \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\,\xi > 0$, corresponde a um pacote de ondas gaussiano normalizado com

$$\langle X \rangle_0 = 0 \tag{5a}$$

$$(\Delta X)_0^2 = \frac{1}{4\,\mathrm{Re}\,\xi} \tag{5b}$$

$$\langle P \rangle_0 = \hbar k_0 \tag{5c}$$

$$(\Delta P)_0^2 = \frac{\hbar^2 |\xi|^2}{\mathrm{Re}\,\xi} \quad . \tag{5d}$$

Substituindo a Eq. (4) na Eq. (2) obtemos a transformada de Fourier desta função de onda:

$$\phi(k) = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2\pi^3}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp[-\xi x^2 + i(k_0 - k)x] \quad , \tag{6a}$$

completando o quadrado

$$\phi(k) = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2\pi^3}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{(k_0-k)^2}{4\xi}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left\{-\xi\left[x - \frac{i}{2\xi}(k_0-k)\right]^2\right\} \quad , \tag{6b}$$

e calculando a integral de Fresnel temos que

$$\phi(k) = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2\pi\xi^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\xi}\right] \quad . \tag{6c}$$

Para calcular $\psi(x,t)$ a partir de $\phi(k)$ executa-se uma seqüência de cálculos análogos ao caso anterior:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2\pi\xi^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\alpha(t)} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2\alpha^2(t)}\right] \exp\left[i k_0 \left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t\right)\right] \quad , \tag{7a}$$

onde

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{i\hbar t}{m}\right)^{1/2} \quad . \tag{7b}$$

A densidade de probabilidade é dada por

$$|\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2\pi|\xi|^2}\right)^{1/2} \frac{1}{|\alpha(t)|^2} \exp\left[-\frac{\mathrm{Re}\,\xi}{2|\xi|^2|\alpha(t)|^4}\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2\right]. \tag{8}$$

Vemos então que o pacote de ondas move-se com momento igual a $\hbar k_0$ enquanto o quadrado de sua largura é dado por

$$\begin{aligned}(\Delta X)^2(t) &= \frac{|\alpha(t)|^4\,|\xi|^2}{\mathrm{Re}\,\xi}\\ &= \frac{1}{\mathrm{Re}\,\xi}\left(\frac{\hbar^2|\xi|^2}{m^2}t^2 - \frac{\hbar\,\mathrm{Im}\,\xi}{m}t + \frac{1}{4}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

A largura mínima desse pacote de ondas

$$(\Delta X)^2_{\text{mín.}} = \frac{\mathrm{Re}\,\xi}{4|\xi|^2} \tag{10}$$

ocorre em um instante dado por

$$\tau = \frac{m}{2\hbar}\frac{\mathrm{Im}\,\xi}{|\xi|^2}. \tag{11}$$

Tomando $\mathrm{Im}\,\xi = 0$ todos os resultados aqui apresentados reduzem-se aos resultados convencionais. No entanto, se $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ o pacote de ondas encolhe até alcançar a largura mínima, no instante τ, e a partir desse instante o pacote se alarga.

A evolução temporal de um pacote de ondas depende da defasagem entre as componentes de Fourier que formam o pacote. No tratamento convencional todas as componentes harmônicas estão em fase no instante inicial, quando o pacote evolui surge uma defasagem causada pela relação $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ que origina o alargamento do pacote. No entanto, não existem restrições sobre a defasagem entre as componentes harmônicas que formam o pacote de ondas, sendo então possível que elas sejam dispostas de tal forma que todas as componentes estejam em fase em um instante futuro.

O análogo clássico a esta situação é o caso da distribuição das velocidades de um páreo do Jockey Club. Os cavalos sempre se dispersam após a partida, mas se os cavalos mais velozes iniciassem o páreo atrás dos mais lentos, poderia haver então um instante em que todos os cavalos estivessem na mesma posição e a partir desse instante se dispersariam.

Neste artigo o encolhimento de um pacote de ondas gaussiano foi analisado para o caso de uma partícula livre. No entanto, esse fenômeno é verificado na restauração de imagens por conjugação ótica[3] e no eco de spin observado na ressonância magnética nuclear[4].

REFERÊNCIAS

(1) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, "Mécanique Quantique", (Hermann, Paris, 1973), p. 62; E. Merzbacher, "Quantum Mechanics", (Wiley, New York, 1970), 2ª ed., p. 164; J.L. Powell e B. Crasemann, "Quantum Mechanics", (Addison-Wesley, Massachusetts, 1965), p. 77; L.I. Schiff, "Quantum Mechanics", (McGraw-Hill, New York, 1965), p. 57.

(2) J.R. Klein, Am. J. Phys. 48, 1035 (1980).

(3) L. Davidovich, Ciência Hoje 4(22), 16 (1986).

(4) H. Panepucci et al., Ciência Hoje 4(20), 46 (1985).