revista de ensino de física vol. 10 dez/1988

UMA REVISÃO SOBRE AS FUNÇÕES DE GREEN ESTACIONÁRIAS (I)

J. BELLANDI FILHO, R.J.M. COVOLAN*, A.B. DE PÁDUA** e J.T.S. PAES***
*Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas*****

INTRODUÇÃO

O estudo das funções de Green é assunto vasto e complexo, envolvendo inúmeras dificuldades matemáticas. A rigor, essas não são funções no sentido usual do termo, mas sim distribuições e como tal deveriam ser tratadas. No entanto, é possível estabelecer-se uma metodologia para o cálculo dessas funções de maneira ordinária.

Num recente trabalho, Bellandi, Oliveira e Pavão[1] apresentaram uma revisão didática das funções de Green dependentes do tempo, abordando-as de uma forma heurística e dando ênfase na interpretação física dessas funções.

Mostraram também como essas funções podem ser calculadas, em certos casos, de forma intuitiva e, particularmente, como as funções de Green estacionárias podem ser determinadas a partir da transformada de Fourier das funções dependentes do tempo.

Numa série de artigos, pretende-se fazer também uma revisão didática das funções de Green estacionárias, apresentando alguns métodos de cálculo e discutindo as relações entre eles.

Na Seção 1 deste trabalho, calcula-se a função de Green para uma dada equação diferencial unidimensional, utilizando-se do procedimento heurístico da Ref. (1), estabelecendo-se uma regra de cálculo particular em termos das soluções da equação homogênea. A partir desses resultados, discute-se na Seção 2 o Método da Variação dos Coeficientes.

Nos trabalhos subseqüentes serão discutidos, ainda para problemas unidimensionais, o Método de Sturn-Liouville e o Método de Expansão em Autofunções. Apresentar-se-á, também, métodos para se calcular funções de Green para equações diferenciais a derivadas parciais.

---

*Bolsista da FAPESP.
**Endereço permanente: Depto. de Física - Universidade Estadual de Londrina.
***Endereço permanente: Depto. de Física - Universidade Federal do Pará.
****CEP 13.100 - São Paulo, SP.

1. UM MÉTODO SIMPLES DE CÁLCULO

Considere-se a seguinte equação diferencial unidimensional não homogênea

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + k^2\, y(x) = f(x) \quad , \tag{1.1}$$

cujas soluções se quer obter no intervalo $0 \leq x \leq \ell$. Supondo-se que as condições de contorno impostas ao problema sejam

$$y(0) = 0 \qquad e \qquad y(\ell) = 0 \quad , \tag{1.2}$$

procurar-se-á as soluções dessa equação diferencial de modo análogo àquelas obtidas para o oscilador harmônico clássico[1], ou seja, na forma de uma integral envolvendo a função de Green.

Observe-se que nesse caso as condições de contorno estão impostas sobre as soluções nos extremos do intervalo, enquanto que para o oscilador harmônico elas são estabelecidas sobre a função e sua derivada primeira, ou seja, sobre posição e velocidade iniciais.

Isto exige uma modificação no método de cálculo. Para tal, escolhe-se um ponto x' no intervalo $[0,\ell]$ e define-se duas funções $g_1(x,x')$ diferente de zero para $x < x'$ e $g_2(x,x')$ diferente de zero para $x > x'$.

Seja a função $g(x,x')$ definida por

$$g(x,x') = \theta(x'-x)g_1(x,x') + \theta(x-x')g_2(x,x') \tag{1.3}$$

no intervalo $[0,\ell]$, onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \; , & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 \; , & \text{para} \quad x < 0 \quad . \end{cases} \tag{1.4}$$

Pode-se escrever as soluções da Eq. (1.1) na forma de uma integral do seguinte tipo

$$y(x) = \int_0^{\ell} g(x,x')\, f(x')\, dx' \quad . \tag{1.5}$$

As condições de contorno, Eqs. (1.2), ficam satisfeitas se

$$g(0,x) = 0 \qquad e \qquad g(\ell,x') = 0 \quad . \tag{1.6}$$

Da Eq. (1.3), vê-se que essas condições de contorno ocorrem quando

$$g_1(0,x') = 0 \qquad e \qquad g_2(\ell,x') = 0 \quad . \tag{1.7}$$

Verifiquemos quais são as condições que devem ser impostas sobre as funções $g_1(x,x')$ e $g_2(x,x')$, a fim de que a Eq. (1.5) seja uma solução da Eq. (1.1).

Para tal, deriva-se $y(x)$ com relação a x:

$$y'(x) = \int_0^{\ell} g'(x,x')\, f(x')dx' =$$

$$= -\int_0^{\ell} \delta(x'-x)\, g_1(x,x')\, f(x')dx' + \int_0^{\ell} \theta(x'-x)\, g_1'(x,x')\, f(x')dx' +$$

$$+ \int_0^{\ell} \delta(x-x')\, g_2(x,x')\, f(x')dx' + \int_0^{\ell} \theta(x-x')\, g_2'(x,x')\, f(x')dx' \quad ,$$

onde $\frac{d}{dx}\,\theta(x) = \delta(x)$, obtendo-se:

$$y'(x) = [g_2(x,x') - g_1(x,x')]\, f(x) + \int_0^{\ell} \theta(x'-x)\, g_1'(x,x')\, f(x')dx' +$$

$$+ \int_0^{\ell} \theta(x-x')\, g_2'(x,x')\, f(x')dx' \quad . \tag{1.8}$$

Impondo-se continuidade sobre as funções $g_1(x,x')$ e $g_2(x,x')$ para $x=x'$, tem-se

$$g_2(x,x) - g_1(x,x) = 0 \quad . \tag{1.9}$$

Derivando-se novamente com relação a x, encontra-se

$$y''(x) = [g_2'(x,x') - g_1'(x,x')]\, f(x) + \int_0^{\ell} \theta(x'-x)\, g_1''(x,x')\, f(x')dx' +$$

$$+ \int_0^{\ell} \theta(x-x')\, g_2''(x,x')\, f(x')\, dx' \quad . \tag{1.10}$$

Dessa forma, a equação

$$y''(x) + k^2\, y(x) = f(x) \quad ; \quad 0 \le x \le \ell$$

fica satisfeita se:

$$\begin{aligned} g_1''(x) + k^2\, g_1(x) &= 0 \quad ; \quad 0 \le x < x' \\ g_2''(x) + k^2\, g_2(x) &= 0 \quad ; \quad x' < x \le \ell \quad , \end{aligned} \tag{1.11}$$

a derivada primeira no ponto $x = x'$ for descontínua, ou seja,

$$g_2'(x,x) - g_1'(x,x) = 1 \quad , \tag{1.12}$$

e a condição de continuidade (1.9) se verificar.

As soluções das Eqs. (1.11), que satisfazem às condições de contorno dadas pelas Eqs. (1.7) são

$$\begin{aligned} g_1(x,x') &= A(x')\, \text{sen}\, k\, x \\ g_2(x,x') &= B(x')\, \text{sen}\, k(\ell - x) \quad . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Impondo-se as condições dadas pela Eq. (1.9) e Eq. (1.12), determina-se as funções $A(x')$ e $B(x')$, como soluções de um sistema linear de equações

$$B(x')\, \text{sen}\, k(\ell - x') - A(x')\, \text{sen}\, kx = 0$$

$$B(x')\, k \cos k(\ell - x') + A(x')\, k \cos kx' = -1$$

$$A(x') = -\frac{\text{sen}\, k(\ell - x')}{k\, \text{sen}\, k\ell} \qquad B(x') = -\frac{\text{sen}\, kx'}{k\, \text{sen}\, k\ell} \tag{1.14}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_1(x,x') &= -\frac{1}{k\, \text{sen}\, k\ell}\, \text{sen}\, kx\, \text{sen}\, k(\ell - x') \\ g_2(x,x') &= -\frac{1}{k\, \text{sen}\, k\ell}\, \text{sen}\, kx'\, \text{sen}\, k(\ell - x) \quad . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Assim, a função de Green $g(x,x')$ pode ser escrita na sua forma usual:

$$g(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx\;\mathrm{sen}\,k(\ell-x') \;, & \text{para} \quad x < x' \\ -\dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx'\,\mathrm{sen}\,k(\ell-x) \;, & \text{para} \quad x > x' \end{cases} \tag{1.16}$$

Pode-se ainda encontrar qual deve ser a equação diferencial que $g(x,x')$ satisfaz, usando-se a expressão dada pela Eq. (1.3):

$$g(x,x') = \theta(x'-x)g_1(x,x') + \theta(x-x')g_2(x,x') \quad .$$

Derivando-se com relação a x, tem-se

$$g'(x,x') = -\delta(x'-x)g_1(x,x') + \theta(x'-x)g_1'(x,x') +$$

$$+\delta(x-x')g_2(x,x') + \theta(x-x')g_2'(x,x')$$

como

$$\delta(x-x')g_2(x,x') - \delta(x'-x)g_1(x,x') = 0$$

devido à continuidade no ponto $x' = x$, obtém-se

$$g'(x,x') = \theta(x'-x)g_1'(x,x') + \theta(x-x')g_2'(x,x') \quad .$$

Derivando-se novamente:

$$g''(x,x') = -\delta(x'-x)g_1'(x,x') + \theta(x'-x)g_1''(x,x') +$$

$$+\delta(x-x')g_2'(x,x') + \theta(x-x')g_2''(x,x') \quad .$$

Usando-se a Eq. (1.12), pode-se escrever

$$g''(x,x') + k^2 g(x,x') = \delta(x,x') + \theta(x'-x)[g_1''(x,x') + k^2 g_1(x,x')] +$$

$$+\theta(x-x')[g_2''(x,x') + k^2 g_2(x,x')] \quad .$$

Como as funções $g_1(x,x')$ e $g_2(x,x')$ satisfazem a equação homogênea, encontra-se a seguinte equação diferencial para $g(x,x')$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,g(x,x') + k^2\,g(x,x') = \delta(x-x') \quad , \tag{1.17}$$

ou seja, $g(x,x')$ satisfaz a uma equação diferencial não homogênea com uma fonte pontual.

Costuma-se trocar o sinal do segundo membro dessa equação:

$$g''(x,x') + k^2 g(x,x') = -\delta(x-x') \quad ,$$

o que, consequentemente acarreta uma mudança de sinal nas soluções dadas pela Eq. (1.16):

$$g(x,x') = \begin{cases} \dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{sen}\,k(\ell-x') & x < x' \\ \\ \dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx'\,\mathrm{sen}\,k(\ell-x) & x > x' \end{cases} \qquad (1.18)$$

Essa função de Green foi, na verdade, determinada em termos das soluções da equação diferencial homogênea; uma que se anula na origem, $y_1(x) = \mathrm{sen}\,kx$ e outra que se anula em $x = \ell$, $y_2(x) = \mathrm{sen}\,k(\ell-x)$. O denominador, $k\,\mathrm{sen}\,k\ell$, nada mais é do que o determinante wronskiano entre $y_1(x)$ e $y_2(x)$

$$W(y_1, y_2) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) = -k\,\mathrm{sen}\,k\ell \qquad (1.19)$$

A função de Green nesse caso pode ser escrita na forma

$$g(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\,y_2(x')}{W(y_1,y_2)} & x < x' \\ \\ \dfrac{y_1(x')\,y_2(x)}{W(y_1,y_2)} & x > x' \end{cases} \qquad (1.20)$$

Essa mesma solução pode ser determinada como uma particular aplicação de um método geral de soluções, o método de Sturm-Liouville, que será apresentado num trabalho posterior.

2. *MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS COEFICIENTES*

O método de determinação da função de Green visto na seção precedente sugere que esta pode ser determinada uma vez conhecidas as soluções da equação diferencial homogênea.

Considere-se novamente a equação diferencial não homogênea obtida na seção anterior,

$$\frac{d^2}{dx^2}\,g(x,x') + k^2\,g(x,x') = -\delta(x-x') \quad , \qquad (2.1)$$

com as condições de contorno:

$$g(0,x') = 0 \qquad e \qquad g(\ell,x') = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Duas soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente são $\operatorname{sen} kx$ e $\cos kx$.

Assim, pode-se propor para $g(x,x')$ o seguinte Ansatz

$$g(x,x') = A(x,x') \cos kx + B(x,x') \operatorname{sen} kx \quad , \tag{2.3}$$

e determinar $A(x,x')$ e $B(x,x')$ de modo que $g(x,x')$ seja solução da Eq. (2.1), satisfazendo as condições de contorno dadas nas Eqs. (2.2).

Derivando-se $g(x,x')$ com relação a x, tem-se

$$g'(x,x') = -k[A \operatorname{sen} kx - B \cos kx] + A' \cos kx + B' \operatorname{sen} kx \quad .$$

É necessário se impor que

$$A' \cos kx + B' \operatorname{sen} kx = 0 \quad . \tag{2.4}$$

Essa condição assegura que a função de Green é contínua no intervalo $[0,\ell]$. Para se verificar isso, considera-se x' num intervalo infinitesimal ε em torno de x. Pode-se escrever

$$g(x,x-\varepsilon) = A(x,x-\varepsilon) \cos kx + B(x,x-\varepsilon) \operatorname{sen} kx$$

e

$$g(x,x+\varepsilon) = A(x,x+\varepsilon) \cos kx + B(x,x+\varepsilon) \operatorname{sen} kx \quad .$$

Expandindo-se A e B até termos de primeira ordem em ε, tem-se

$$g(x,x+\varepsilon) - g(x,x-\varepsilon) = 2\varepsilon[A' \cos kx + B' \operatorname{sen} kx] \quad .$$

Assim, $A' \cos kx + B' \operatorname{sen} kx = 0$ implica que $g(x,x')$ é contínua no intervalo $[0,\ell]$.

A derivada segunda de $g(x,x')$ com relação a x será:

$$g''(x,x') = -k^2 [A \cos kx + B \operatorname{sen} kx] - k[A' \operatorname{sen} kx - B' \cos kx] \quad .$$

Portanto,

$$g''(x,x') + k^2 g(x,x') = -k\,[A' \operatorname{sen} kx - B' \cos kx] = -\delta(x-x') \tag{2.5}$$

Obtém-se assim, duas equações lineares nas variáveis A' e B'

$$\begin{aligned} A' \cos kx + B' \operatorname{sen} kx &= 0 \\ A' \operatorname{sen} kx - B' \cos kx &= 1/k\ \delta(x-x') \end{aligned} \tag{2.6}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\operatorname{sen} kx}{k}\,\delta(x-x') \\ B' &= -\frac{\cos kx}{k}\,\delta(x-x') \quad . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Integrando-se com relação a x, tem-se

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \frac{\operatorname{sen} kx'}{k} && \text{para} \quad x > x' \\ &= A_1 && \text{para} \quad x < x' \\ B &= B_1 - \frac{\cos kx'}{k} && \text{para} \quad x > x' \\ &= B_1 && \text{para} \quad x < x' \quad . \end{aligned}$$

Pode-se, assim, escrever:

$$\begin{aligned} g(x,x') = {} & A_1 \cos kx + 1/k \operatorname{sen} kx' \cos kx + B_1 \operatorname{sen} kx + \\ & - 1/k \cos kx' \operatorname{sen} kx \qquad \text{para} \quad x > x' \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$g(x,x') = A_1 \cos kx + B_1 \operatorname{sen} kx \qquad \text{para} \quad x < x' \quad . \tag{2.9}$$

Impondo-se as condições de contorno, determina-se

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_1 &= \frac{\operatorname{sen} k(\ell - x')}{k \operatorname{sen} k\ell} \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto,

$$g(x,x') = \begin{cases} \dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx\;\mathrm{sen}\,k(\ell-x') & \text{para} \quad x < x' \\[2ex] \dfrac{1}{k\,\mathrm{sen}\,k\ell}\,\mathrm{sen}\,kx'\;\mathrm{sen}\,k(\ell-x) & \text{para} \quad x > x' \end{cases} ,$$

resultado que coincide com o obtido na seção anterior. Note-se que a função de Green assim calculada apresenta explicitamente a condição de continuidade no intervalo $[0,\ell]$. Este método de determinação da função de Green estacionária é conhecido como o Método da Variação dos Coeficientes.

REGRA GERAL

Seja D um operador diferencial linear e a seguinte equação diferencial

$$D\,g(x,x') = \delta(x-x')$$

cujas soluções se quer determinar num certo intervalo $[a,b]$, satisfazendo condições de contorno definidas.

1) Determina-se as duas soluções linearmente independentes $f_1(x)$ e $f_2(x)$, da equação diferencial homogênea

$$Df = 0$$

tal que, $f_1(x)$, seja regular em a e $f_2(x)$ regular em b.

2) Escreve-se para $g(x,x')$

$$g(x,x') = A(x,x')\,f_1(x) + B(x,x')\,f_2(x) \quad .$$

3) Substitui-se na equação diferencial, impondo-se que

$$\left(\frac{d}{dx}A\right)f_1 + \left(\frac{d}{dx}B\right)f_2 = 0$$

4) Determina-se A e B, de forma que essa condição esteja satisfeita e que $g(x,x')$ satisfaça a equação

$$D\,g(x,x') = \delta(x-x')$$

e as condições de contorno impostas ao problema.

Para reforçar o entendimento sobre a aplicação desse método calcular-se-á explicitamente a função de Green para a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x,x') + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} g(x,x') + (1 - \frac{m^2}{x^2}) g(x,x') = - \frac{1}{x} \delta(x-x')$$

onde m é inteiro, positivo ou negativo, $0 \leq x \leq R$, com as condições de contorno:

$$g(0,x') \quad \text{é finita}$$

$$g(R,x') = 0 \quad .$$

Essa é a equação diferencial radial para o problema das vibrações transversais de uma membrana circular.

Para a aplicação do método deve-se conhecer as soluções da equação diferencial homogênea correspondente, que é uma equação diferencial de Bessel. As soluções linearmente independentes são[2]: $J_m(x)$, regular na origem, e $N_m(x)$, regular em qualquer ponto do intervalo fora da origem, ou seja,

$$f_1(x) = J_m(x)$$

$$f_2(x) = N_m(x) \quad .$$

Escreve-se para a função de Green

$$g(x,x') = A(x,x') J_m(x) + B(x,x') N_m(x) \quad ,$$

impondo-se que

$$A' J_m(x) + B' N_m(x) = 0 \quad .$$

Substituindo-se $g(x,x')$ na equação diferencial obtém-se

$$A' J_m'(x) + B' N_m'(x) = - 1/x \; \delta(x-x')$$

que, com a condição anterior, forma um sistema de equações lineares em A' e B'. Para determinante do sistema se encontra

$$\Delta = J_m'(x) N_m(x) - J_m(x) N_m'(x)$$

que nada mais é do que o determinante wronskiano[2] entre as soluções $f_1(x)$ e $f_2(x)$,

$$\Delta = W(f_1, f_2) = \frac{2}{\pi x} \quad .$$

Assim,

$$A' = 1/W \; (-1/x) \, N_m(x) \, \delta(x-x')$$

$$B' = 1/W \; (1/x) \, J_m(x) \, \delta(x-x')$$

Integrando-se com relação a x, obtém-se

$$A = \begin{cases} A_1 - \pi/2 \; N_m(x') & , \quad x > x' \\ A_1 & , \quad x < x' \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} B_1 + \pi/2 \; J_m(x') & , \quad x > x' \\ B_1 & \quad x < x' \end{cases}$$

e para $g(x,x')$

$$g(x,x') = \begin{cases} A_1 \, J_m(x) + B_1 \, N_m(x) & , \quad x < x' \\ A_1 \, J_m(x) + B_1 \, N_m(x) - \pi/2 \; N_m(x') \, J_m(x) + \pi/2 \; J_m(x') & \\ + \pi/2 \; J_m(x') \, N_m(x) & , \quad x > x' \quad . \end{cases}$$

Como $g(0,x')$ deve ser finita, isto implica que $B_1 = 0$, pois $N_m(x)$ não é finita na origem. Da condição $g(R,x') = 0$ obtém-se que:

$$A_1 = \frac{\pi}{2 \, J_m(R)} \, [J_m(R) \, N_m(x') - J_m(x') \, N_m(R)] \quad .$$

Portanto, a função de Green será dada por:

$$g(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2 \, J_m(R)} \, [J_m(R) \, N_m(x') - J_m(x') \, N_m(R)] \, J_m(x) & , \quad x < x' \\ \dfrac{\pi}{2 \, J_m(R)} \, [N_m(x) \, J_m(R) - N_m(R) \, J_m(x)] \, J_m(x') & , \quad x > x' \quad . \end{cases}$$

A exemplo de que se fez no final da seção 1 para se obter a

Eq. (1.20), esse resultado pode ser escrito na forma de um produto de soluções da equação homogênea, que satisfazem as condições de contorno impostas ao problema. Note-se que, para a equação homogênea, $J_m(x)$ corresponde à solução $y_1(x)$ que é regular na origem. Quanto à segunda solução $y_2(x)$, pode ser escrita como uma combinação linear de $J_m(x)$ e $N_m(x)$, uma vez que $J_m(x)$ também é regular em $x=R$. Dessa forma

$$y_2(x) = A\,J_m(x) + B\,N_m(x) \quad .$$

Impondo-se a condição de contorno em $x = R$, $y_2(R) = 0$, obtém-se uma relação entre A e B,

$$A = -\frac{B\,N_m(R)}{J_m(R)} \quad ,$$

portanto,

$$y_2(x) = \frac{B}{J_m(R)}\,[N_m(x)\,J_m(R) - J_m(x)\,N_m(R)] \quad .$$

O determinante wronskiano entre y_1 e y_2 fica proporcional ao wronskiano entre $J_m(x)$ e $N_m(x)$,

$$W(y_1, y_2) = BW[J_m(x), N_m(x)] = B\,\frac{2}{\pi x}$$

pois o wronskiano de $J_m(x)$ com ela mesma é zero.

Quanto ao operador diferencial D, da equação

$$D\,g(x,x') = -\,\delta(x-x')$$

pode ser escrito na forma:

$$D = \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)$$

ou ainda

$$D = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)$$

com $p(x) = x$.

Pode-se escrever, assim, $g(x,x')$ da seguinte maneira:

$$g(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\ y_2(x')}{p(x)\ W(y_1(x)\ ,\ y_2(x))} & x < x' \\ \\ \dfrac{y_1(x')\ y_2(x)}{p(x)\ W(y_1(x)\ ,\ y_2(x))} & x > x' \end{cases} \qquad (2.12)$$

Novamente, a solução se apresenta numa forma típica correspondente àquelas obtidas por meio do método de Sturn-Liouville. No exemplo da seção 1, a solução (1.20) tem essa forma, sendo que $p(x) = 1$.

Os operadores que podem ser escritos como:

$$D = \frac{d}{dx}\,[p(x)\,\frac{d}{dx}] + g(x)$$

ou

$$D = \frac{d}{dx}\,[p(x)\,\frac{d}{dx}] + g(x) + \lambda f(x)$$

onde $p(x)$ tem derivada contínua: $g(x)$ e $f(x)$ são contínuas e λ não dependente de x, são operadores de Sturn-Liouville e suas funções de Green podem ser determinadas na forma dada pela Eq. (2.12).

A discussão desse método se fará no próximo artigo.

REFERÊNCIAS

(1) J. Bellandi Filho, E. Capelas de Oliveira e H. Germano Pavão, Revista de Ensino de Física, 6(2), 9-22 (1984).

(2) J. Bellandi Filho, "Funções Especiais", Editora Papirus, Campinas (1986).