

**PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA**  
ROBERTO THUT MEDEIROS\*

Na comemoração dos trezentos anos da publicação dos "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", o "Principia", causa-nos es tranheza que esse livro fundamental e riquíssimo continue, em geral, ausente das salas de aula dos cursos de Física e Matemática.

Salvo raras exceções, o livro de Sir Isaac Newton tornou-se uma relíquia, objeto de interesse apenas dos historiadores da ciência. Muitos professores têm receio de incluírem obras originais em sua bibliografia, argumentando complexidade de conceitos e demonstrações e obscuridade na linguagem. Como veremos, pelo menos no que se refere ao "Principia", qualquer aluno que tenha cursado o primeiro semestre dos cursos de Cálculo e Geometria Analítica está apto a entender a maior parte dos lemas e proposições que Newton criou em seu livro. Quanto à obscuridade na linguagem, parece-nos um exercício extremamente fértil quando se propõe ao aluno que tente modernizá-la, isto é, traduzir a notação das demonstrações para uma notação atual, uma vez que isso só poderá ser realizado se ele dominar o corpo de conceitos envolvido. Além disso, ele poderá observar como a mecânica foi criada: os raciocínios, os procedimentos, os limites que existiam na época.

Assim sendo, nosso objetivo com esse artigo é menos apresentar um trabalho completo e rigoroso do que indicar exemplos que justifiquem o que expusemos acima. Na primeira parte fizemos um esboço histórico do desenvolvimento do cálculo até o século XVII. Passamos então a discutir uma das proposições do "Principia", procurando trazê-la para uma linguagem atual.

**I. INTRODUÇÃO HISTÓRICA**

A preocupação com o infinitesimal é bastante antiga. Podemos citar nomes como Eudoxo de Cnido e Arquimedes que tentaram re-

---

\*O presente trabalho originou-se de um seminário dado pelo autor em 1986, no curso de Métodos da Física Teórica, ministrado pelo professor A.L. da Rocha Barros, que propôs o estudo do desenho geométrico que figura no verso da nota inglesa de "one pound" (uma libra) em homenagem a Sir Isaac Newton. Este desenho foi usado por Newton na demonstração da lei do inverso do quadrado da distância e está no Livro I, seção III, Proposição XI, Problema VI dos "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

solver o problema dos números irracionais ou "incomensuráveis", apresentado pelos pitagóricos e cuja origem está na seguinte questão: como expressar a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles? Eudox propõe um método que encerra o conceito atual de limite e que permite resolver o problema. Já Arquimedes havia criado um método de integração para o cálculo da área de regiões limitadas por curvas e volume de regiões limitadas por superfícies que encerrava o conceito de infinitesimal. No entanto, essas idéias se relacionavam com entes geométricos e não algébricos como o conceito de função, importantíssimo no cálculo diferencial e integral moderno.

Ao passarmos para o período moderno (século XVI e XVII) a situação começa a se modificar. O interesse de Galileu e Kepler pelo movimento provocou um grande desenvolvimento no estudo de curvas geradas pelo movimento dos corpos. No entanto, o fato de não existir qualquer notação algébrica para variáveis ou para índices forçava os matemáticos a utilizarem-se do modelo grego para as demonstrações das propriedades e para o estudo em geral de tais curvas.

Foi somente após o intercâmbio com os árabes e sua álgebra já bastante desenvolvida que o "imperialismo da geometria, apesar de todos os seus êxitos"<sup>(1)</sup>, deixou a matemática. As possibilidades de generalização da álgebra, nas mãos de René Descartes, tornam-na um método poderoso para se aplicar aos problemas geométricos e mecânicos. Nasce assim, a geometria analítica.

Os infinitésimos e os indivisíveis começam então a serem ma nejadados despreocupadamente: expressões como "infinitamente pequenos", "incrementos evanescentes", "sucessões infinitas" são utilizadas sem que se tenha uma idéia clara de tais conceitos. Como exemplo dessa situação podemos citar o teorema de Cavalieri: para ele um plano é constituído de um número infinito de retas paralelas. Assim, poderíamos comparar áreas de figuras planas e volumes de sólidos comparando os indivisíveis (retas ou planos) de uma figura com os de outra. Entretanto, surge uma pergunta: como pode a soma de algo que não possui espessura (os indivisíveis) adquirir uma altura?

Neste ponto, é interessante citar uma observação de J. Babi ni<sup>(1)</sup>: "*Os homens do Renascimento são pessoas urgidas pelos problemas que as novas condições econômicas e os progressos tecnológicos impõem. Ao contrário da concepção antiga na qual o caminho é mais importante que o resultado, agora é o resultado que interessa*".

Não obstante a carência de fundamentos, é nos séculos XVII e XVIII que o cálculo infinitesimal toma corpo e alcança seus maiores êxitos em sistematização e aplicação, principalmente devido aos trabalhos de Newton e Leibniz. Seu grande mérito deve-se ao fato de terem eles unificado uma série de processos até então desconexos: tra

çado de tangentes, máximos e mínimos, áreas de figuras planas, volumes de sólidos, etc..

Em sua obra, Newton varia todas as quantidades em relação ao tempo; as velocidades de variação são as "fluxões" - equivalente por tanto à derivada da função em relação ao tempo - e as quantidades mesmas são os "fluentes". Ele utiliza a notação do ponto para indicar a fluxão de uma variável, isto é, se  $y$  é a quantidade variável,  $\dot{y}$  será fluxão. Seu método ficou conhecido como "Método das Fluxões". Note-se a vinculação direta que Newton faz entre seu método e o conceito de movimento. Como ele próprio diz, na introdução ao seu "Tratado sobre a Quadratura das Curvas": "Neste trabalho, considero as magnitudes matemáticas constituídas, não por partes arbitrariamente pequenas, mas sim engendradas por um movimento contínuo. As linhas não se engendram mediante a soma de partes, mas pelo movimento contínuo de pontos...". Com isso, Newton evita os paradoxos consequentes do teorema de Cavalieri.

Em seu "Método das Primeiras e Últimas Razões", Newton apresenta o equivalente ao nosso conceito de limite, que ainda carecia de uma definição segura. Por "quadratura de uma curva", ele entende a integral da função em um determinado intervalo, ou seja, a área abaixo do gráfico da função.

Por sua vez, Leibniz havia elaborado seu método utilizando um simbolismo que, por sua funcionalidade acabou se tornando a notação que ainda hoje utilizamos. Além disso, Leibniz variava as quantidades matemáticas com respeito a outras quantidades e não somente em relação ao tempo. É interessante atribuímos às diferenças de mentalidades, os aspectos diferentes dos trabalhos dele e de Newton: este último, sendo um "filósofo natural" (diríamos hoje em dia um físico) que procurava vincular suas idéias ao mundo dos fenômenos, e o primeiro, um matemático, um filósofo cujas idéias possuem aquele caráter mais abstrato e simbólico.

Já dissemos que o grande mérito desses dois grandes cientistas foi unificar uma série de métodos desconexos. Para Newton, o ponto essencial encontra-se na inversão do processo de determinação da área contida sob uma curva partindo da ordenada ao qual, na expressão da área, ele aplica o método das tangentes e obtém a ordenada, demonstrando que são problemas inversos. Podemos indetificar aí o Teorema Fundamental do Cálculo. Em Leibniz o problema das áreas é encarado como uma soma de ordenadas e o das tangentes como uma diferença de ordenadas uma vez que soma e diferença são operações inversas o cálculo das áreas e a determinação das tangentes também o seriam.

## II. OS "PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA"

Se Newton não houvesse escrito o Principia, poderíamos ainda assim considerá-lo como um dos maiores cientistas que já viveram. No entanto, com a publicação desse livro, ponto alto de seu pensamento, ele se tornou - sem dúvida alguma - o mais brilhante pensador da natureza, o "filósofo natural" mais completo que se tem notícia. À medida em que folheamos o Principia e tomamos contato com seus axiomas, lemas e proposições, uma sensação de profundo respeito vai se desenvolvendo em nosso espírito. Sua coerência interna e quase infinita riqueza de idéias tornam-no um livro digno de ser lido por qualquer pessoa que ainda possua sensibilidade a intuições físicas e demonstrações matemáticas.

Newton utiliza-se largamente dos conceitos de limite, continuidade e derivada ao longo de todo o livro. Na primeira seção do livro I - sob a denominação de "O Método das Primeiras e Últimas Razões" - essas idéias são apresentadas. Ao contrário do procedimento moderno, Newton relaciona esses conceitos e suas demonstrações às quantidades geométricas tais como comprimento de semi-retas, de arcos, etc.. Com isso, o método das "fluxões", junto com sua notação não aparece em nenhum momento de modo explícito.

### III. UM EXEMPLO: LIVRO I. SEÇÃO III. PROPOSIÇÃO XI. PROBLEMA VI

"Se um corpo possui uma órbita elíptica, é necessário encontrar a expressão da força centrípeta que tende ao foco da elipse."

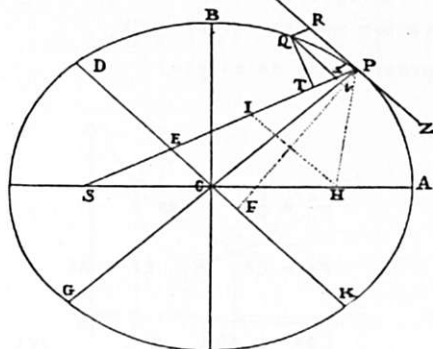
Na seção II, Newton procura estabelecer uma relação entre a força centrípeta e grandezas geométricas (distâncias) para um corpo se movendo sobre uma trajetória qualquer. O resultado obtido é: - a força centrípeta é inversamente proporcional a  $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$  (seção II, proposição VI, corolários I e V).

É na seção III que ele passa a analisar diversos tipos de órbitas particulares. No nosso caso, a órbita elíptica com a força centrípeta dirigida para um dos focos da elipse. O trabalho resume-se, portanto, em encontrar uma razão igual à expressão acima. Isto é feito multiplicando-se três proporções determinadas exclusivamente por métodos geométricos (semelhança de triângulos, propriedades da elipse, etc.) e com o auxílio do conceito de limite, sendo este último estabelecido na seção I (Método das primeiras e últimas razões).

TEXTO EXTRAÍDO DO ORIGINAL DE NEWTON\*  
 PROPOSIÇÃO XI. PROBLEMA VI.

"If a body revolves in an ellipse; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipse."

"Seja S o foco da elipse. Tracemos SP cortando o diâmetro DK da elipse em E, e a ordenada Qv em x; completemos o paralelogramo QxPr. É evidente que EP é igual ao semieixo AC: pois se traçarmos HI a partir do foco H da elipse e paralelo a EC, como CS e CH são iguais, ES e EI também se



rão iguais; então EP é a meia-soma de PS e PI, isto é (por causa das paralelas HI e PR e dos ângulos iguais IPR e HPZ), de PS e PH, os quais tomados juntos são iguais ao eixo inteiro 2AC. Tracemos QT perpendicular a SP, e designando por L o latus rectum principal da elipse (ou  $\frac{2BC^2}{AC}$ ), teremos:

$$L.QR:L.Pv = QR:Pv = PE:PC = AC.PC,$$

e, também,  $L.Pv:Gv.Pv = L:Gv$ , e  $Gv.Pv:Qv^2 = PC^2:CD^2$ .

Pelo Corolário II, Lema VII, quando os pontos P e Q coincidem,  $Qv^2 = Qx^2$ , e  $Qx^2$  ou  $Qv^2:QT^2 = EP^2:PP^2 = CA^2:PF^2$ , e (pelo Lema XII)  $= CD^2:CB^2$ .

Multiplicando os termos correspondentes das quatro proporções e simplificando, teremos:

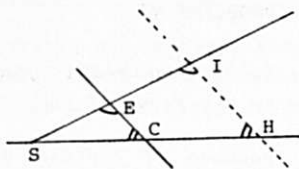
$L.QR:QT^2 = AC.L.PC^2.CD^2:PC.Gv.CD^2.CB^2 = 2PC:Gv$ , desde que  $AC.L = 2BC^2$ . Mas coincidindo os pontos Q e P, 2PC e Gv são iguais. E portanto as quantidades L.QR e  $QT^2$ , proporcionais a estas, também serão iguais. Multiplicando esses iguais por  $\frac{SP^2}{QR}$ , L.SP<sup>2</sup> se tornará igual a  $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$ . Portanto (pelos Corolários I e V, Proposição VI) a força centrípeta é inversamente proporcional a L.SP<sup>2</sup>, isto é, inversamente proporcional ao quadrado da distância SP."

QEI

\*"Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World", Sir Isaac Newton, traduzido ao inglês por Andrew Motte em 1729 e revista por Florian Cajori. University of California Press, edição de 1946, págs. 56/7.

### PRIMEIRA PROPORÇÃO

$$CS = CH \Rightarrow$$



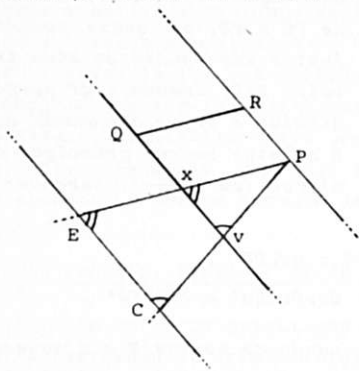
$$\frac{ES}{IS} = \frac{CS}{HS} \Rightarrow \frac{ES}{ES+EI} = \frac{CS}{2 \cdot CS} \Rightarrow ES = EI$$

$$SP + PI = (ES + EI + PI) + PI = 2(EI + PI) = 2 \cdot EP$$

$\Rightarrow EP = \frac{SP+PI}{2}$  ; mas os ângulos formados pelas distâncias focais e a tangente (IPR, HPZ) são iguais, e como  $HI // RZ$ , os ângulos  $PIH$  e  $PHI$  também são iguais  $\Rightarrow PI = PH$

$\Rightarrow EP = \frac{SP+PH}{2}$  ; mas  $PS+PH=2 \cdot AC$  (propriedade da elipse)

obtemos portanto:  $EP = AC$ .

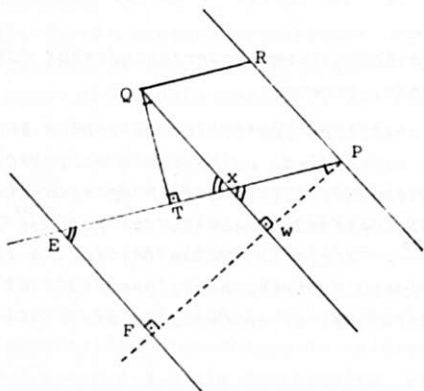


$$\frac{Px}{Pv} = \frac{EP}{PC} \quad \text{mas}$$

$$Px = QR \quad \text{e} \quad EP = AC$$

$$\boxed{\frac{QR}{Pv} = \frac{AC}{PC}} \quad (1)$$

### SEGUNDA PROPORÇÃO



$$\frac{Qx}{Qt} = \frac{Px}{Pw} = \frac{EP}{PF} ; \text{ pelo lema VII, corolário II, quando } Q + P$$

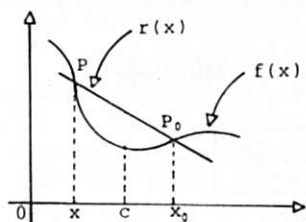
$$\Rightarrow x + v + w \Rightarrow Qx + Qv + Qw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Qv}{Qt} = \frac{EP}{PF} .$$

Aqui já aparece uma das idéias fundamentais do cálculo: o conceito de limite. O lema VII diz que "... a razão última entre o arco, a corda e a tangente, qualquer um para qualquer outro, é a razão da igualdade". Tentemos então, utilizando-nos de uma notação moderna, provar este lema:

Seja  $C_f$  o comprimento do arco determinado pelos pontos  $P_0$  e  $P$  e seja  $C_r$  o comprimento do segmento de reta determinado por  $P_0$  e  $P$ . Desejamos determinar o limite de  $C_f/C_r$  quando  $x$  tende a  $x_0$ . Sabemos que:

$$C_f(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad ; \quad C_r(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + [f(x)-f(x_0)]^2}$$



Quando  $x \rightarrow x_0$ ,  $f'(c) \rightarrow f'(x)$  e no limite (uma vez que  $f(x)$  é contínua)  $f'(c) = f'(x)$ ; mas pelo Teorema do Valor Médio para derivadas:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad (I)$$

$$C_f(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + [f(x)-f(x_0)]^2}}{(x-x_0)} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C_f}{C_r} = \frac{\int_{x_0}^x \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + [f(x)-f(x_0)]^2}}{(x-x_0)} dx}{\sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}} \quad (II)$$

Aplicando a regra de L'Hospital:

$$\frac{dC_f}{dx} = \frac{\sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}}{(x-x_0)} \quad (III)$$

$$\frac{dC_r}{dx} = \frac{2 \cdot f'(x) \cdot (f(x)-f(x_0)) + 2(x-x_0)}{2 \sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}} \quad ; \quad \text{utilizando}$$

$$\frac{dC_r}{dx} = \frac{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}{(x-x_0) \sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}} \quad (IV)$$

Substituindo (III) e (IV) em (II):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}}{(x-x_0)}}{\frac{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}{(x-x_0) \sqrt{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C_f}{C_r} = \frac{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2}{[f(x)-f(x_0)]^2 + (x-x_0)^2} = 1$$

Isso demonstra uma parte do lema: a "razão última" (diríamos hoje, o limite da razão) entre o comprimento da corda e o comprimento do arco é igual a um. As outras razões podem ser demonstradas de maneira semelhante. Prosseguindo o raciocínio, Newton escreve:

$$\frac{QV}{QT} = \frac{EP}{PF} \quad \text{mas} \quad EP = AC \Rightarrow \frac{QV}{QT} = \frac{AC}{PF} \Rightarrow \frac{QV^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$$

pelo lema XII:  $\frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{BC^2} \Rightarrow \boxed{\frac{QV^2}{QT^2} = \frac{CD^2}{BC^2}}$  . (2)

No lema XII, Newton diz: "Todo paralelogramo circunscrito sobre quaisquer diâmetros conjugados de uma dada elipse ou hipérbole são iguais entre si"; ou seja, possuem áreas iguais. É importante frisar que a palavra "paralelogramo" inclui o retângulo, uma vez que este é um caso particular do primeiro. Vejamos como esse teorema conduz à proporção utilizada:

$$\text{Área (PDGK)} = \text{Área (ABMN)}$$

$$\text{Área (PDGK)} = 8 \cdot A_1$$

$$\text{Área (ABMN)} = 4 \cdot A_2$$

$$A_1 = \frac{PZ \cdot CZ}{2} ; A_2 = \frac{BC \cdot AC}{2}$$

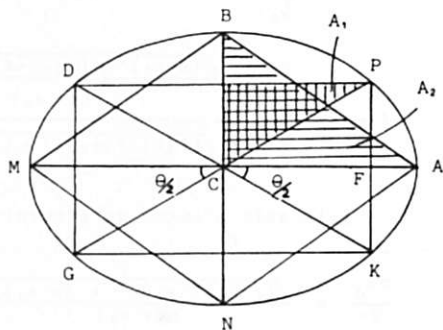
$$PZ = PC \cdot \cos(\theta/2)$$

$$CZ = PC \cdot \sin(\theta/2)$$

$$A_1 = \frac{PC^2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2)}{2}$$

$$A_1 = \frac{PC^2 \cdot \text{sen} \theta}{4} ; \text{mas } PC = CD \text{ e } PC \cdot \text{sen} \theta = PF \Rightarrow$$

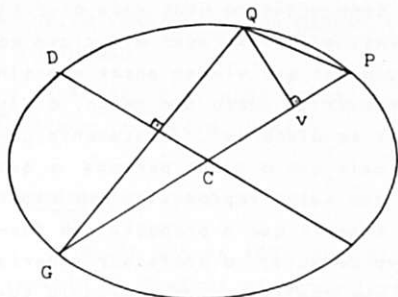
$$A_1 = \frac{CD \cdot PF}{4} \Rightarrow 8 \cdot \frac{CB \cdot PF}{4} = 4 \cdot \frac{BC \cdot AC}{2} \Rightarrow \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{BC^2}$$





### TERCEIRA PROPORÇÃO

Quando  $Q + P$ , os triângulos  $T$  e  $T'$  tenderão a se tornar semelhantes. Podemos, portanto, montar a seguinte proporção:



$$\frac{Pv}{Qv} = \frac{Qv}{Gv} \Rightarrow \frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = 1$$

mas  $\frac{PC^2}{CD^2} = 1$  ; portanto:

$$\boxed{\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}} \quad (3)$$

Multiplicando os membros correspondentes de (1), (2) e (3), obteremos:

$$\frac{QR}{Pv} \cdot \frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} \cdot \frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{PC^2}{CD^2} \cdot \frac{CD^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \frac{AC \cdot PC}{BC^2}$$

mas  $L = 2 \cdot \frac{BC^2}{AC}$  onde  $L$  = latus rectum, ou seja, o comprimento do segmento de reta, perpendicular ao diâmetro maior da elipse, que passa pelo foco (para maiores informações, ver (2)):

$$\left(\frac{L}{Gv}\right) \cdot \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \left(\frac{L}{Gv}\right) \cdot \frac{AC \cdot PC}{BC^2} \quad \frac{QR \cdot L}{QT^2} = 2 \cdot \frac{PC}{Gv}$$

novamente, quando  $Q + P$ ,  $2 \cdot PC + Gv$ , tal que

$$\lim 2 \cdot \frac{PC}{Gv} = 1 \quad \therefore QR \cdot L = QT^2 ; \text{ multiplicando por } \left(\frac{SP^2}{QR}\right)$$

$$\left(\frac{SP^2}{QR}\right) \cdot QR \cdot L = \left(\frac{SP^2}{QR}\right) \cdot QT^2 \Rightarrow L \cdot SP^2 = \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$$

Entretanto, para uma dada elipse,  $L$  é constante, o que implica que a força centrípeta é inversamente proporcional ao quadrado da distância do foco.

### IV. CONCLUSÃO

Nossa proposta não pretende que se transforme obras originais em livros para cursos de graduação em Física ou Matemática, re

conhecemos a inviabilidade dessa idéia. Queremos apenas chamar a atenção para esse recurso que sabemos, por experiência própria, ser a melhor motivação para o estudo de qualquer ramo da Física.

No caso particular dos Principia, gostaríamos de fazer uma última observação: o livro forma um todo orgânico onde cada proposição, cada lema, depende dos anteriores; a demonstração minuciosa de alguns deles necessita da demonstração dos que vieram antes e assim por diante, de tal modo que se não houver um certo bom senso, o aluno e o próprio professor acabarão por se dispersar. Exatamente pelo seu caráter de motivação importa mais que o aluno perceba o que vem a ser uma criação científica do que saber reproduzir com rigor as demonstrações. Poderíamos ainda sugerir que a proposta não fosse encaixada em um esquema expositivo de aula: o professor poderia pedir a um aluno ou grupo de alunos que realizasse um seminário sobre determinado lema ou parte dos Principia.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) J. Babini, "El Cálculo Infinitesimal", Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1977.
- (2) F.S. Percy, "Geometria Analítica", Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1960, p. 11.
- (3) M.E. Baron, "Curso de História da Matemática", Ed. Universidade de Brasília, Brasília, 1985, Unidades 1, 2, 3.
- (4) I. Newton, "Mathematical Principles of Natural Philosophy", University of California Press, California, 1946.

