

PELÍCULAS DE SABÃO E O SEU TEOR DIDÁTICO*

EDISON DE SOUZA MOREIRA JÚNIOR e MARCOS DA FONSECA ELIA
Instituto de Física, UFRJ

INTRODUÇÃO

Todos nós temos alguma familiaridade com o processo de obtenção de películas de sabão planas ou esféricas (bolhas de sabão). Entretanto, apesar da simplicidade (água, detergente e algumas armaduras de arame), do potencial motivador para os alunos (multiplicidade e simetria das formas) e da riqueza dos conceitos físicos fundamentais (física de superfície, energia mínima, etc.) envolvidos nesse processo, não temos sido capazes de aproveitar o seu conteúdo didático em nossas aulas de Ciência, a exemplo do que, há alguns anos, já se vem fazendo em outros países.

Com esse artigo, procuramos chamar a atenção para essa omissão, apresentando e discutindo sete experimentos com objetivos claramente definidos, os quais poderiam ser facilmente reproduzidos em sala de aula.

MATERIAL

O material, assim como as dimensões, não são críticos e adaptações podem ser feitas de acordo com as disponibilidades:

- 1) bacia;
- 2) detergente líquido;
- 3) água;
- 4) arame ou fio de cobre;
- 5) glicerina;
- 6) alicate;
- 7) soldador ou durepoxi;
- 8) barbante;
- 9) duas lâminas transparentes de acrílico ou vidro;
- 10) pinos de metal e
- 11) massa de modelar.

* Trabalho apresentado na XXXVI Reunião Anual da SBPC.

SOLUÇÃO DE ÁGUA E DETERGENTE

Prepara-se, numa bacia, uma solução aquosa com 1% de detergente. O detergente deve ser colocado após a água, para se evitar a formação de bolhas. Mistura-se bem a solução e, em seguida, eliminam-se as bolhas da superfície. O tempo médio de vida das películas obtidas desta solução é 20 segundos. Este tempo é suficiente para se fazer boas observações, podendo ser dilatado evitando-se: correntes de ar, vibrações, mudanças freqüentes de temperatura, ambientes secos, água com impurezas. O tempo médio de vida aumenta muito adicionando-se glicerina. Com 1% de detergente, 5% de glicerina e o restante de água, o tempo médio de vida é alguns minutos. Utilizando-se 50% de glicerina, as películas resistem algumas horas ^(4,7).

ARMAÇÕES DE ARAME

Nos experimentos são utilizadas as seguintes armações:

- A) um retângulo dividido por um pedaço de arame leve M, que pode mover-se paralelamente aos menores lados do retângulo (Figura 5);
- B) três partes iguais em forma de U dispostas de modo que o ângulo entre elas seja 120° (Figura 8);
- C) armação B deformada de modo que uma das partes seja perpendicular às outras duas (Figura 9);
- D) um tetraedro regular (Figura 11);
- E) dois anéis idênticos de arame (Figura 13).

Na montagem das armações, frequentemente é necessário unir extremidades de arame. Isto pode ser feito enganchando-se com alicates ou co'ando-as com durepoxi. Utilizando-se fio de cobre as extremidades podem ser soldadas.

A FÍSICA DAS PELÍCULAS DE SABÃO

A formação de películas de sabão é causada pelos chamados e feitos de superfície. Outros fenômenos bastante conhecidos que também são causados por esses fatores são, para citar apenas dois: a formação de gotas durante o escoamento vagaroso de um líquido na ponta de um conta-gotas e a elevação de líquidos em tubos capilares. Uma descrição desses efeitos pode ser encontrada na bibliografia em anexo ⁽⁷⁾. Discutimos a seguir apenas alguns aspectos fundamentais do problema.

Primeiramente, vamos analisar a formação de gotas durante o escoamento vagaroso de um líquido na ponta de um conta-gotas a temperatura constante. Durante esse processo as moléculas do líquido na e próximas à sua superfície livre não estão em equilíbrio termodinâmico porque sofrem, em média, uma força menos intensa das moléculas da região gasosa, que envolve o líquido, do que aquela que elas sofreriam se essa região fosse substituída pelo líquido em questão.

Por conseguinte, as moléculas na e próximas à superfície livre do líquido sofrem, em média, uma força não balanceada que tende a puxá-las de volta para dentro do líquido e que diminui, até se anular, à medida em que se afastam da superfície para o interior do líquido (admitindo-se, neste caso, que o interior esteja em equilíbrio termodinâmico).

Podemos concluir, então, que quando a superfície livre de um líquido é formada deve haver uma menor densidade na superfície (menor número de moléculas por unidade de área) do que no interior do líquido, provocando uma diminuição da área dessa superfície, visto que um líquido é livre para mudar de forma. Isso explica porque a gota de um líquido sempre assume a forma esférica (desprezando os efeitos gravitacionais e de resistência do ar): assume a área mínima possível para um dado volume.

Sob um ponto de vista energético, podemos concluir também que, se quisermos aumentar a área da superfície livre do líquido (contrariando a sua tendência natural), será necessário realizarmos um trabalho por unidade de área aumentada. Esse trabalho pode ser recuperado quando a área diminuir, de modo que a superfície parece ser capaz de armazenar energia potencial. A energia potencial armazenada em um elemento unitário de área de uma superfície tem sido definida como tensão superficial ($\sigma = \frac{dE}{dA}$).

Consideremos agora uma solução formada por moléculas de água e sabão (detergente). Um exemplo típico de moléculas de sabão é o sal iônico de sódio, $C_{17}H_{35}COO^-Na^+$, encontrado nas gorduras animais e vegetais. O íon negativo dessa molécula iônica é formado por uma "cabeça" polar (carboxila COO^-) e por um "rabicho" apolar de hidrocarbonetos (grupo $C_{17}H_{35}$), conforme mostra a Figura 1.

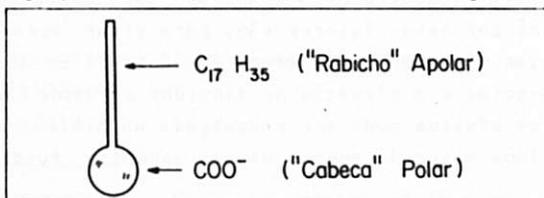


Figura 1 - Estrutura de uma molécula iônica de sabão.

Assim, quando as moléculas de sabão são misturadas em baixa concentração com moléculas de água, dissociando-se e formando uma solução iônica, ocorre que a força elétrica atrativa entre a cabeça polar e as moléculas (polares) de água será maior do que as forças elétricas atrativas entre água-água e parte apolar - parte apolar, criando uma configuração energética que favorece a migração dos ions negativos para a superfície (adsorção desses ions pela superfície), numa situação em que os rabichos apolares tenderão a ser expelidos da solução e as cabeças polares tenderão a ficar voltadas para a solução (Figura 2). Dispersos no interior da solução aquosa, estarão os ions positivos de sódio e também ions negativos não adsorvidos pela superfície.

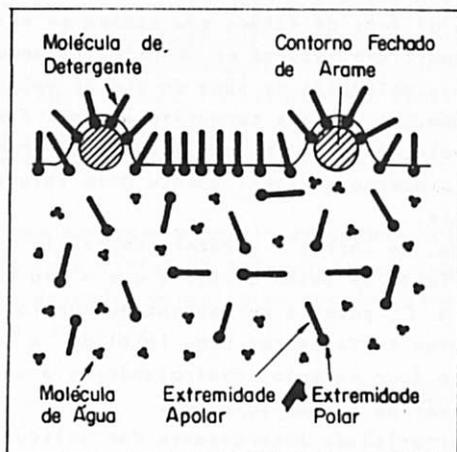


Figura 2 - Estrutura da superfície de uma solução de água e sabão. Um contorno fechado de arame abandona a solução.

Lembrando que a tensão superficial é consequência do desbalanceamento de forças intermoleculares (de natureza elétrica) quando a superfície é formada, assim como a migração de moléculas da superfície para o interior do líquido, podemos dizer que a fina camada de ions negativos de sabão, adsorvidos pela superfície, deve provocar uma redução da tensão superficial^(1,7). Em outras palavras, é esse efeito microscópico de adsorção pela superfície dos ions surfactantes de sabão que provoca o efeito macroscópico de diminuição da tensão superficial (em relação à água), que denominamos "efeito detergente".

Surge agora uma questão: se a solução de sabão com água produz um efeito detergente, como explicar a formação de películas de sabão? A explicação para a propriedade elástica exibida por uma pe

lícula de sabão pode ser compreendida se lembrarmos que elasticidade significa o aparecimento de forças restauradoras quando o sistema é afastado de sua posição de equilíbrio.

Ora, ao provocar-se um afastamento das moléculas de sabão que formam a película (digamos, por exemplo, retirando-se vagarosamente uma estrutura de arame imersa na solução, conforme mostra a Figura 2), devemos esperar um aumento da tensão superficial da película causado pela ocupação, nos interstícios criados, por moléculas de água que se encontram disponíveis próximo à película. Ou seja, ao se esticar a película ela reage no sentido de restaurar o equilíbrio.

A ocupação dos interstícios é mais favorável para moléculas de água do que para os íons de sabão, que também se encontram disponíveis próximo à superfície, apenas em um primeiro momento, porque há relativamente mais moléculas de água do que de sabão. Contudo, com o passar do tempo, as chances tornar-se-ão mais favoráveis para os íons de sabão, pois, como já foi explicado anteriormente, esses íons apresentam um processo energeticamente mais favorável de difusão para a superfície.

Isso explica, em parte, o caráter temporário da propriedade elástica de uma película de sabão e sugere que o seu tempo de vida, para uma temperatura T , poderia ser aumentado controlando-se a concentração de moléculas surfactantes e/ou inibindo a evaporação da água para o ambiente (por exemplo, controlando-se a umidade do meio ou introduzindo glicerina na sua solução).

Uma outra propriedade interessante das películas de sabão que agora pode ser compreendida é o fato de a tensão superficial não depender da área da película, quando a concentração de moléculas surfactantes for suficientemente alta (vide 1º experimento). Um aumento de área, causado pelo afastamento de moléculas, diminui o número de moléculas detergentes por unidade de área e, conseqüentemente, provoca um aumento da tensão superficial. Contudo, se há uma concentração suficientemente alta de moléculas detergentes (surfactantes), então os interstícios criados pelo afastamento são preenchidos por essas moléculas gerando um efeito compensatório.

Um contorno fechado de arame, ao abandonar uma solução de água e detergente, ergue a superfície elástica da solução (Figura 2). A água, sob ação da gravidade, drena para fora da superfície, fazendo com que esta comece a se colapsar. O processo acentua-se à medida que o contorno afasta-se da superfície, culminando com a captura de uma película de sabão (Figura 3) (2).

Devido ao colapso da superfície da solução, uma película de sabão, assim obtida, é formada por duas superfícies constituídas de

moléculas de detergente (Figura 4). As superfícies são separadas em grande parte por água. A partir do momento em que a película se forma, a água começa a drenar para fora desta, através de uma série de processos, até que uma espessura de equilíbrio seja atingida^(1,4,7).

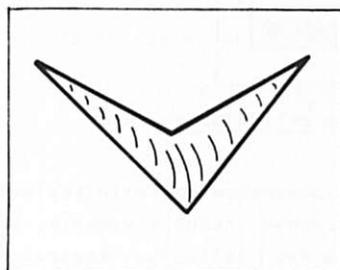


Figura 3 - Película de sabão limitada por um contorno fechado de arame.

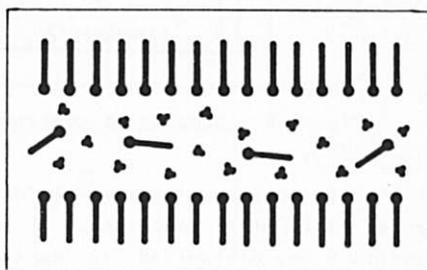


Figura 4 - Estrutura de uma película de sabão.

Cada uma das duas superfícies de uma película de sabão tem a mesma tensão superficial da solução água e sabão, caso a película não seja muito delgada. Denomina-se tensão pelicular o dobro da tensão superficial ($\sigma_p = 2\sigma$).

1º Experimento:

Objetivos:

- 1) demonstrar que a tensão superficial independe da área da película;
- 2) apresentar uma outra interpretação para tensão superficial;
- 3) deduzir a equação da energia superficial de uma película de sabão.

Retirando-se a armação A da solução de água e detergente, obtêm-se duas películas separadas por M (Figura 5). Variando-se suas áreas, mediante o deslocamento de M, observa-se que este permanece em repouso, após ser deixado livre para se mover. Conclui-se, assim, que as forças de tensão exercidas pelas películas sobre M são iguais em módulos e opostas, independentemente de suas áreas.

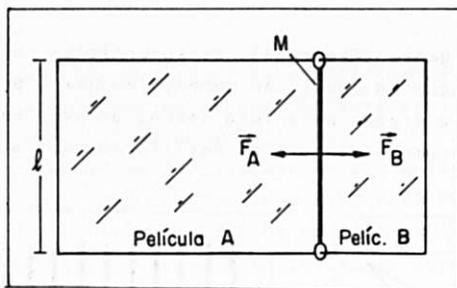


Figura 5 - Armação A contendo duas películas de sabão.

Em outras palavras, considere um deslocamento infinitesimal dx da haste M de comprimento l que provoque, respectivamente, um aumento e uma diminuição dA de cada uma das películas separadas por M. Nestas condições podemos escrever:

pela conservação da energia

$$dU_A = -dU_B$$

pela definição de tensão superficial (no caso, tensão pelicular σ_p)

$$dU_A = \sigma_{p_A} dA = \sigma_{p_A} l dx$$

$$dU_B = \sigma_{p_B} dA = \sigma_{p_B} l (-dx)$$

pela definição de força associada a uma energia potencial U

$$F_A = -\frac{dU_A}{dx} = -\sigma_{p_A} l$$

$$F_B = -\frac{dU_B}{dx} = \sigma_{p_B} l$$

ou ainda (como $\frac{dU_A}{dx} = -\frac{dU_B}{dx}$)

$$\sigma_{p_A} = \sigma_{p_B} = \sigma_p$$

$$F_A = -F_B$$

Interpretando esses resultados, podemos dizer que tudo se

passa como se cada película puxasse a haste M, independentemente do valor de sua área, com uma força $\sigma_p \ell$. Além disso, podemos agora reinterpretar a tensão superficial definindo-a como a força exercida por unidade de comprimento na superfície de um líquido ($\sigma = \frac{F}{\ell}$).

Rompendo-se uma das películas contidas na armação A (Figura 6), M desloca-se de x até x_0 sob ação da força exercida pela película restante, cuja componente segundo o eixo X é:

$$F = -\sigma_p \ell \quad (3)$$

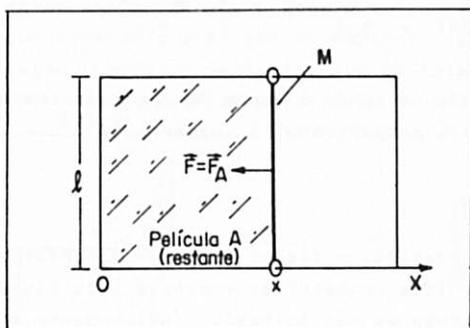


Figura 6 - Armação A contendo uma película.

O trabalho desta força para deslocar M é:

$$W = \int_x^{x_0} F dx = \int_x^{x_0} -\sigma_p \ell dx \quad (4)$$

onde dx é um deslocamento infinitesimal.

Mantendo-se a temperatura constante, σ_p permanece constante, e da eq. (4) tem-se:

$$W = -\sigma_p \ell \int_x^{x_0} dx = -\sigma_p \ell x \quad (5)$$

tomando-se $x_0 = 0$.

Como a área da película é dada por:

$$A = \ell x \quad (6)$$

a eq. (5) torna-se

$$W = -\sigma_p A \quad (7)$$

A variação da energia potencial (superficial) da película é dada por:

$$\Delta E_S = E_S(A_0) - E_S(A) = -W = -\sigma_p A \quad (8)$$

onde: $E_S(A_0)$ e $E_S(A)$ são, respectivamente, a energia superficial referente à área $A_0 = 0$ e à área A .

Tomando-se $E_S(A_0) = 0$, da eq. (8) tem-se:

$$E_S(A) = \sigma_p A \quad (9)$$

isto é, uma película de sabão é capaz de realizar trabalho e sua energia superficial é proporcional à sua área^(7,10).

AS LEIS DE PLATEAU

No século passado, o físico belga Joseph Plateau descobriu empiricamente três leis geométricas comuns a todo sistema de películas de sabão (contendo ou não bolhas): (1ª) somente três películas interceptam-se ao longo de uma linha; (2ª) o ângulo entre duas películas que se interceptam é 120° ; (3ª) quatro linhas, cada uma destas formadas pela interseção de três películas, encontram-se em um ponto, e o ângulo entre um par de linhas adjacentes é $109^\circ 28'$.^(1,7)

Das considerações feitas anteriormente sobre tensão pelicular, pode-se deduzir a 2ª lei de Plateau a partir da 1ª: como três películas, de igual tensão pelicular, exercem forças iguais sobre qualquer elemento da linha de interseção, formando uma configuração estática, o ângulo entre duas películas deve ser 120° (três forças coplanares de mesmo módulo estão em equilíbrio, quando o ângulo entre elas é 120°)⁽⁶⁾ (Figura 7).

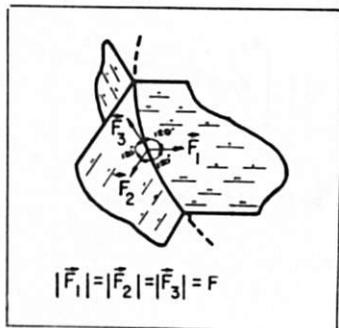


Figura 7 - Ilustração da 1ª e 2ª leis de Plateau.

2ª Experimento:

Objetivo: Ilustrar a 1ª e a 2ª leis de Plateau.

Retirando-se a armação B da solução de água e detergente, obtêm-se três películas planas, que se interceptam na reta determinada pelas junções das partes da armação (Figura 8). Assim, o ângulo entre duas películas é 120° , o que está de acordo com a 2ª lei de Plateau. A armação C não pode apresentar três películas planas que se interceptam da mesma forma, pois se assim o fosse, o ângulo entre duas películas seria 180° , e o ângulo entre estas e a terceira seria 90° , o que contradiz a 2ª lei de Plateau. Retirando-se a armação C da solução, obtêm-se películas que se interceptam numa linha curva (Figura 9), o que verifica a validade da 2ª lei de Plateau.

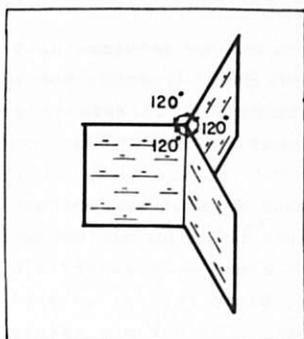


Figura 8 - Armação B contendo três películas planas que se interceptam numa reta.

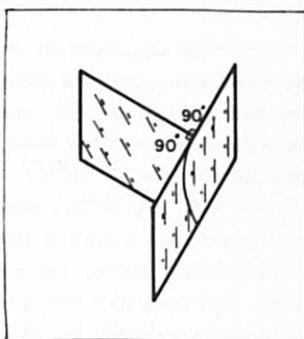


Figura 9 - Armação C contendo três películas que se interceptam numa linha curva.

Num sistema de películas de sabão, a equação da energia total é dada por:

$$E = E_G + E_A + E_S \quad (10)$$

onde: E_G é a energia potencial gravitacional, E_A a energia contida entre as duas superfícies (ou nas bolhas) e E_S a energia superficial.

Como a massa das películas é muito pequena, pode-se desprezar a energia potencial gravitacional, e a eq. (10) torna-se:

$$E = E_A + E_S \quad (11)$$

Se um sistema não contém bolhas, $E_A = 0$, e a eq. (11) torna-se

$$E = E_S \quad (12)$$

Da eq. (9), tem-se:

$$E = \sigma_p A \quad (13)$$

Um sistema de películas de sabão permanece num estado de energia total mínima, quando em equilíbrio termodinâmico, o qual é atingido na prática, assim que esteja em repouso. Este princípio e a eq. (13) permitem obter soluções para certos problemas matemáticos, como será mostrado a seguir^(1,4,5,6,7).

SOLUÇÃO EXPERIMENTAL DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

No século XIX, Plateau mostrou que as soluções de problemas de determinação da superfície de menor área, limitada por um contorno fechado no espaço, poderiam ser obtidas utilizando-se películas de sabão. Devido a isto, tais problemas são conhecidos como problemas de Plateau^(2,3,4,7)

Da eq. (13), conclui-se que, num sistema sem bolhas, a um valor mínimo da energia total corresponde um valor mínimo da área das películas. Assim, para se obter, por exemplo, a superfície de menor área limitada por uma circunferência, basta retirar um anel de arame de uma solução de água e detergente. Uma vez que esteja em repouso, a película limitada pelo contorno terá a menor energia possível e, portanto, representará a superfície de menor área limitada por uma circunferência: um disco (Figura 10). Este método pode ser aplicado a qualquer contorno. Entretanto, é importante observar que um determinado contorno de arame pode apresentar mais de um sistema de películas com energia mínima (mínimos relativos). Entre estes em contra-se o de menor energia (mínimo absoluto), que representa a superfície de menor área limitada pelo contorno. Um anel de arame apresenta apenas uma configuração com energia mínima: uma película plana^(4,5,6,7).

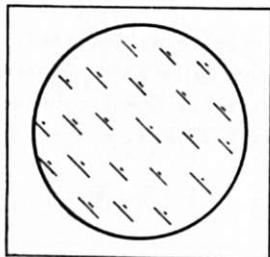


Figura 10 - Anel de arame limitando uma película plana.

Os problemas de Plateau foram propostos por Euler, no início do século XVIII ⁽²⁾. Em 1744, Euler deduziu uma equação diferencial, visando solucioná-los. Mais tarde, Lagrange simplificou a análise de Euler, e a equação tornou-se conhecida como equação de Euler-Lagrange. Tal equação possibilita determinar-se a superfície de menor área para certos contornos. Contudo, para a maioria dos contornos, uma solução analítica não foi ainda encontrada ^(4,7). Atualmente, os matemáticos que estudam os problemas de Plateau utilizam-se largamente de películas de sabão ^(2,3,4).

3º Experimento:

Objetivo: Obter a superfície de menor área limitada pelas arestas de um tetraedro regular e ilustrar as leis de Plateau.

Retirando-se a armação D da solução de água e detergente, obtêm-se um sistema formado por seis películas planas, na forma de triângulos isósceles, que representa a superfície de menor área limitada pelo contorno (Figura 11). De cada vértice parte uma linha, formada pela interseção de três películas, que se encontram no centro do tetraedro. O ângulo entre duas linhas é $109^{\circ}28'$, e o ângulo entre duas películas é 120° ^(1,4,5,6,7).

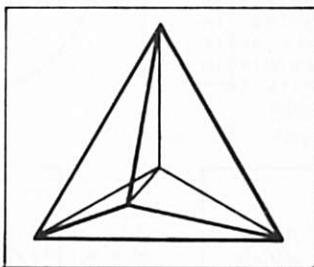


Figura 11 - Superfície de menor área limitada pelas arestas de um tetraedro regular (armação D).

Almgren e Taylor ⁽¹⁾ demonstraram que as leis empíricas de Plateau são uma consequência matemática do princípio de minimização de áreas.

4º Experimento:

Objetivo: Obter a superfície de menor área limitada por duas circunferências de mesmo diâmetro, co-axiais e paralelas.

Ao se retirar da solução dois anéis de raio r , de forma que

fiquem paralelos e co-axiais, obtêm-se um sistema formado por três películas que se interceptam simetricamente entre os anéis, formando uma circunferência (Figura 12). Rompendo-se a película central, obtêm-se uma catenária de revolução ou catenóide, caso os anéis estejam suficientemente próximos (Figura 13). Afastando-se os anéis, a catenóide aproxima-se do eixo (Figura 14), rompendo-se nos dois discos limitados pelos anéis, quando a distância entre estes for $1,325 r$ (Figura 15). A área da catenóide é o mínimo absoluto (superfície de menor área) para distâncias inferiores a $1,056 r$, e um mínimo relativo para distâncias entre $1,056 r$ e $1,325 r$. Quando a distância entre os anéis for maior que $1,056 r$, a área dos dois discos será o mínimo absoluto (5,7).

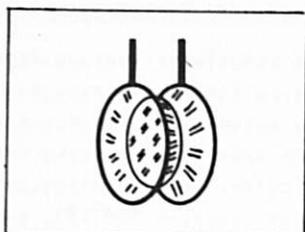


Figura 12 - Sistema de películas com energia mínima limitado por dois anéis co-axiais, paralelos e de mesmo diâmetro (ar-maçãõ E).

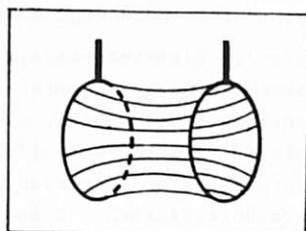


Figura 13 - Película formando uma catenóide.

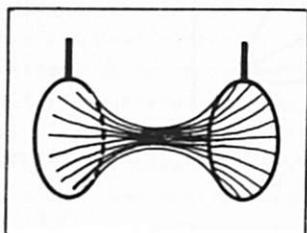


Figura 14 - Catenóide na iminência de se romper.

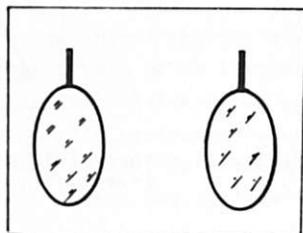


Figura 15 - Os dois anéis limitados por películas planas.

As superfícies ilustradas nas Figuras 13 (catenóide) e 15 (dois discos) são previstas analiticamente; já as ilustradas nas Figuras 11 e 12 não o são, por apresentarem certas singularidades matemáticas (5,7).

5º Experimento:

Objetivo: Obter a superfície de maior área limitada por um perímetro fixo.

Unem-se as extremidades de um pedaço de barbante, e em seguida, ata-se este perímetro a um anel de arame. Retirando-se o anel da solução de água e detergente, obtêm-se duas películas separadas pelo perímetro de barbante (Figura 16). Ao se romper a película interna, a película externa minimiza sua área e, portanto, a área dentro do perímetro torna-se máxima, fazendo com que este tome a forma de uma circunferência (Figura 17). Assim, a superfície de maior área é a de um círculo (7).

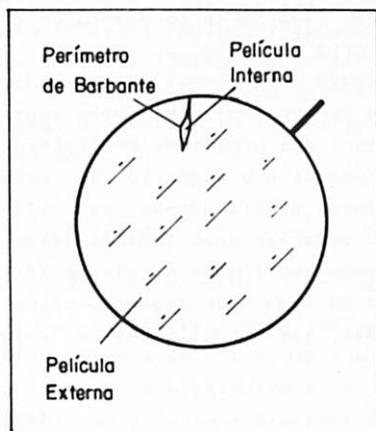


Figura 16 - Duas películas planas separadas pelo perímetro de barbante.

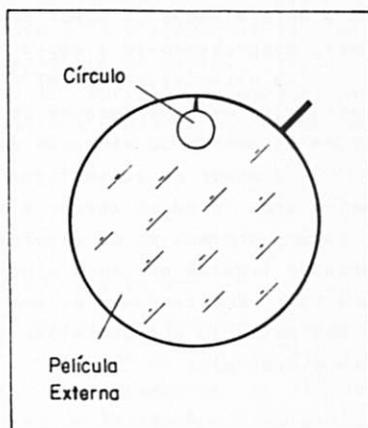


Figura 17 - Após o rompimento da película interna, o perímetro de barbante toma a forma de uma circunferência.

6º Experimento:

Objetivo: Ilustrar um sistema de películas contendo uma bolha não esférica.

Submerge-se parcialmente na solução, a armação D, contendo o sistema de películas ilustrado na Figura 11. Retirando-a, obtêm-se um novo sistema contendo uma bolha com a mesma simetria da armação (Figura 18). Nesta configuração, a energia que se minimizou é dada pela eq. (11), já que E_A não é nula (1,4,5,6,7).

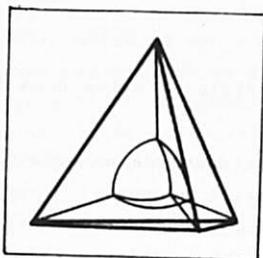


Figura 18 - Sistema de películas contendo uma bolha "tetraédrica".

Os problemas de se ligar n pontos coplanares, pelo menor percurso, foram tratados pela primeira vez pelo matemático Jacob Steiner, no século XIX, e são, por isso, conhecidos como problemas de Steiner. Estes problemas têm uma série de aplicações práticas, como por exemplo a determinação do menor percurso que liga um certo número de cidades, desprezando-se a curvatura da terra^(2,3,4,6,7).

O matemático COURANT⁽³⁾, na década de quarenta deste século, mostrou que os experimentos de Plateau com películas de sabão constituem um método de obtenção das soluções dos problemas de Steiner.

O menor percurso ligando dois pontos é o segmento de reta que os une. Para se chegar a esta solução utilizando-se películas de sabão, procede-se do seguinte modo: tomam-se duas lâminas transparentes ligadas por dois pinos, de forma que fiquem paralelas (Figura 19). Retirando-as de uma solução de água e detergente, obtém-se uma película perpendicular às lâminas, que une os pinos e cuja área é dada por:

$$A = d\ell \quad (14)$$

onde: d é a distância entre as lâminas e ℓ o comprimento da película.

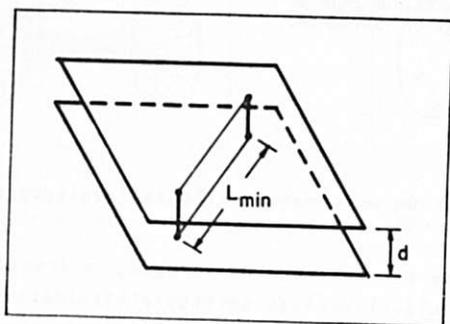


Figura 19 - Lâminas paralelas ligadas por dois pinos, contendo uma película retangular.

Como d é constante, tem-se, da eq. (14), que a menor área corresponde o menor comprimento. Assim, a película minimiza sua área, quando em repouso, e sua projeção sobre as lâminas é o segmento de reta que une as projeções dos pinos.

Problemas de Steiner envolvendo n pontos podem ser resolvidos, utilizando-se n pinos entre as lâminas. Tal como os contornos de arame, uma determinada disposição de pinos pode apresentar mais de um sistema de películas com energia mínima. Para se obter entre estes o de menor percurso, deve-se medí-los. No caso simples de dois pinos, há apenas uma configuração com energia mínima: uma película retangular (3,4,5,6,7).

Lâminas quadradas de mesmo tamanho facilitam o manuseio. Os pinos podem ser fixados às lâminas com massa de modelar, e seu diâmetro deve ser desprezível comparado às distâncias que os separam, para se evitar soluções incorretas. Isto é, a projeção de cada pino, sobre as lâminas, deve ser aproximadamente um ponto.

Nenhuma solução analítica geral foi apresentada para os problemas de Steiner, e as soluções são obtidas mediante auxílio de computador (6,7).

7º Experimento:

Objetivo: Obter o menor percurso ligando três pontos.

Dispõe-se três pinos entre as lâminas, de forma que suas projeções formem um triângulo equilátero. Dois dos pinos são fixados às lâminas, e o terceiro é deixado livre. Retirando-se as lâminas da solução de água e detergente, obtém-se um sistema de três películas (Figura 20), cuja projeção sobre as lâminas é constituída por três segmentos de reta, cada um partindo de um vértice do triângulo, e encontrando-se dentro deste, formando ângulos de 120° . A esta estrutura denominamos trevo (Figura 21).

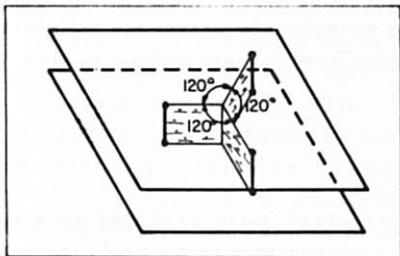


Figura 20 - Lâminas paralelas ligadas por três pinos, contendo três películas retangulares.

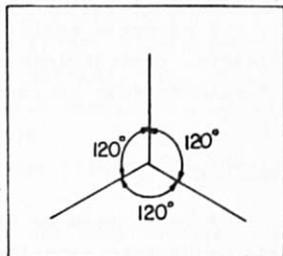


Figura 21 - Trevo.

Seja P a projeção da interseção das películas sobre as lâminas. Sejam A e B as projeções dos pinos fixos, e C a do pino livre. Movimentando-se o pino livre entre as lâminas (o que pode ser feito com um arame preso a este), de forma que o ângulo ACB permaneça menor que 120° , P descreve um arco de circunferência que passa por A e B (Figura 22). Este fato deve-se ao seguinte teorema: ângulos sobre um mesmo arco de circunferência são iguais. Portanto, como $\angle APB$ deve ser sempre 120° (2ª lei de Plateau), esta é a única trajetória possível para P .

Movimentando-se o pino livre, de forma que $\angle ACB$ cresça, nota-se que o comprimento do segmento PC diminui, anulando-se quando $\angle ACB$ for 120° , e permanecendo assim, para ângulos maiores (Figura 22).

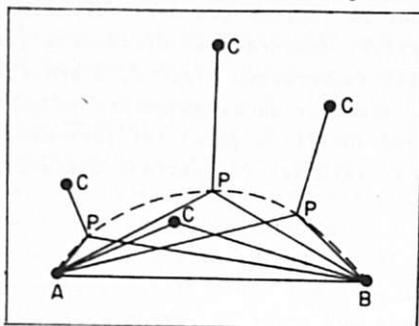


Figura 22 - Solução do problema de Steiner referente a três pontos.

As lâminas com três pinos apresentam apenas um sistema de películas com energia mínima (mínimo absoluto). Assim, a solução do problema é a seguinte: se o maior ângulo do triângulo, determinado pelos pontos, for maior ou igual a 120° , o menor percurso será constituído por seus menores lados. Se o maior ângulo do triângulo for menor que 120° , o menor percurso será o trevo (3,6,7).

A obtenção analítica desta solução não apresenta muitas dificuldades, constituindo um bom exercício de cálculo do mínimo de uma função de duas variáveis (3).

CONCLUSÕES

A consecução do objetivo principal deste trabalho está assegurada pelos sete experimentos básicos propostos, os quais, desde que devidamente adaptados, podem ser utilizados como práticas de laboratório altamente motivadoras, em qualquer nível de escolaridade (1º, 2º ou 3º graus).

Para o 1º grau, alguns dos experimentos (por exemplo: 2º, 5º e 6º) podem ser didaticamente estruturados no sentido de desenvolver a capacidade de observação e de descrição qualitativa de uma situação física familiar (concreta) à maioria dos alunos. (Quem nunca brincou ou viu alguém brincar, com bolhas de sabão?).

Para o 2º grau, pode-se exigir que os alunos, partindo também primeiramente de suas próprias observações e descrições qualitativas, cheguem a estabelecer relações quantitativas, como por exemplo: 1º, 2º, 3º e 7º experimentos. A interpretação física destes experimentos poderia ser discutida pelo professor e os seus alunos, em sala de aula.

Para o 3º grau, além do que já foi sugerido para os dois níveis anteriores, poder-se-ia exigir dos alunos a construção de um modelo físico (hipóteses, leis físicas e equações matemáticas) que fosse consistente com as observações feitas. Os 1º, 2º, 4º e 7º experimentos são apropriados para este fim.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao professor Edisom de Souza Moreira pela orientação quanto às normas monográficas. À professora Suzana de Souza Barros por sua crítica e sugestões. À Célia Romagnano pelo auxílio na montagem das armações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) F.J. Almgren Jr. & J.E. Taylor, "The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles", *Scientific American* 235 (1), 82-93, Jul. 1976.
- (2) R. Courant, "Soap Films Experiments with Minimal Surfaces", *American Mathematical Monthly* 47, 167-174, 1940.
- (3) R. Courant & H. Robbins, "Que ès la Matematica?", Trad. L.B. Gala, 5ª ed., Madrid, Ed. Sain, 1971, cap. VII, p. 395-407.
- (4) C. Isenberg, "Problem Solving with Soap Films", *Physics Education*, Part I, 10 (6), 452-456; Part II, 10 (7), 500-503, Sep. 1975.
- (5) C. Isenberg, "The Soap Film: An Analogue Computer", *American Scientist*, 64 (5), 514-518, Sep./Oct. 1976.
- (6) C. Isenberg, "Problem Solving with Soap Films", *The Physics Teacher*, 15 (1), 9-18, Jan. 1977.
- (7) C. Isenberg, "The Science of Soap Films and Soap Bubbles", 1 ed., Ed. Tieto Ltd., 1978, cap. 3, p. 53-67; cap. 4, p. 75-87.
- (8) E.S. Moreira, "Normas Monográficas", 1ª ed., Volta Redonda, Ed. Maclan Artes Gráficas Ltda., 1982.

- (9) J. Willians, "A Complicada Matemática Oculta na Bolha de Sabão", The New York Times (in Jornal do Brasil), Rio de Janeiro, 31 Out., p. 4, 1982.
- (10) M.W. Zemansky, "Calor e Termodinâmica", Trad. Preda, B.C.P., 5ª ed., Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois S.A., 1978.