# UMA REVISÃO SOBRE FUNÇÕES DE GREEN DEPENDENTES DO TEMPO

J. BELLANDI FILHO e E. CAPELAS DE OLIVEIRA
*Instituto de Física - Universidade Estadual de Campinas*

H. GERMANO PAVÃO
*Departamento de Física e Química - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul*

## I. INTRODUÇÃO

O primeiro exemplo de função de Green aparece com a derivação do potencial eletrostático no interior de uma região fechada no espaço, em termos de seu valor na superfície dessa região[1].

O conceito de função de Green é generalizado para especificar uma classe de soluções de equações diferenciais não homogêneas com fontes pontuais. A função de Green tem uma interpretação física simples, como sendo a resposta de qualquer sistema físico quando na presença de tais tipos de fontes.

As soluções de equações diferenciais não homogêneas com outros tipos de fontes podem ser determinadas, uma vez conhecidas as soluções com fontes pontuais, com as mesmas condições de contorno impostas à equação original.

Em mecânica ondulatória, por exemplo, a evolução temporal de uma frente de onda pode ser determinada, uma vez conhecida a função de Green dependente do tempo que satisfaz as condições de contorno impostas ao problema.

Se a função de onda é conhecida num particular instante $t_0$, num ponto $\vec{x}_0$ do espaço, então a função de onda num instante $t > t_0$, num ponto $\vec{x}$ é dada por

$$\psi(\vec{x},t) = \int d\vec{x}_0 \; G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)\psi(\vec{x}_0,t_0)$$

sendo $G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)$ a função de Green, que é também conhecida como propagador.

Essa expressão é geralmente interpretada como a descrição matemática do princípio de Huygens, que diz que cada ponto da frente de onda pode ser visto como uma nova fonte de ondas. A nova frente de onda será formada pela superposição das ondas geradas nesses pontos.

A função de Green descreve a influência da função em $\vec{x}_0$ no instante $t_0$, sobre a função em $\vec{x}$ no instante $t > t_0$.

Esse fato é comumente utilizado em mecânica ondulatória, particularmente, na formulação geral da teoria do espalhamento[2].

Apresenta-se neste trabalho uma revisão pedagógica das funções de Green dependentes do tempo, com a sua respectiva interpretação física, usando-se para tal equações diferenciais que descrevem sistemas físicos. Na seção II discute-se a função de Green para o oscilador harmônico clássico. Na seção III apresenta-se a função de Green para a equação de condução do calor numa barra homogênea e, na seção IV, estende-se o tratamento para a equação de Schrödinger livre.

## II. *OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO*

Seja a equação diferencial para um oscilador harmônico clássico na presença de uma força dependente do tempo

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \tag{1}$$

cujas soluções se pretende obter para $t > 0$ satisfazendo as seguintes condições iniciais

$$x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad . \tag{2}$$

Pode-se buscar as soluções dessa equação na forma de uma integral do seguinte tipo

$$x(t) = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad . \tag{3}$$

Essa solução satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$, pois a integral se anula para $t = 0$. Derivando-se com relação a $t$, tem-se

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \dot{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau + G(0) f(t) \quad . \tag{4}$$

A segunda condição inicial, $\dot{x}(0) = 0$ fica satisfeita se $G(0) = 0$.

Substituindo a Eq.(3) na Eq.(1), tem-se

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \int_0^t [\ddot{G}(t-\tau) + \omega^2 G(t-\tau)] f(\tau) d\tau + \dot{G}(0) f(t)$$

que ficará identicamente satisfeita se

$$\begin{aligned} \ddot{G}(t-\tau) + \omega^2 G(t-\tau) &= 0 \qquad t > \tau \\ G(t-\tau) &= 0 \qquad t < \tau \end{aligned} \tag{5}$$

com $G(t)$ satisfazendo as condições

$$G(0) = 0 \qquad e \qquad \dot{G}(0) = 1 \quad . \tag{6}$$

As soluções da Eq.(1), portanto, podem ser determinadas pela Eq.(3), desde que $G(t)$ seja solução da equação homogênea, satisfazendo as condições iniciais dadas pela Eq.(6). A função $x(t)$ designa o deslocamento do sistema quando sobre ele age a força $f(t)$.

Suponha-se que $f(t)$ seja uma força que age sobre o sistema somente durante um pequeno intervalo de tempo, $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$. A integral

$$I = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t) dt \tag{7}$$

define o impulso dessa força aplicado ao sistema neste intervalo de tempo.

Seja $X_0(t)$ o deslocamento do sistema ocasionado por essa força

$$X_0(t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad . \tag{8}$$

Aplicando-se o teorema da média, tem-se

$$X_0(t) = G(t-\tau^*) \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(\tau) d\tau \tag{9}$$

com $t_0 \leq \tau^* \leq t_0 + \Delta t$ . No limite $\Delta t \to 0$ , tem-se

$$X_0(t) = G(t-t_0)\, I \quad . \tag{10}$$

Essa expressão nos diz que $G(t-t_0)$ é a função deslocamento do sistema no instante $t$, quando um impulso instantâneo é aplicado ao sistema no instante $t_0$.

A função $G(t-t_0)$ é a função de Green, que é a resposta do sistema, quando sobre ele atua um impulso instantâneo. Um simples cálculo permite determinar $G(t-t_0)$ para o oscilador harmônico clássico, $G(t-t_0) = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega(t-t_0)$.

O deslocamento dado pela Eq.(3) é interpretado como a superposição de deslocamentos causados por impulsos instantâneos. Para se verificar isso, pode-se dividir o intervalo de tempo em intervalos $\Delta t = \frac{t}{m}$ e escrever $f(t)$ na seguinte forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t)$$

de forma que

$$f_i(t) = 0 \qquad t < t_i \quad ; \quad t > t_{i+1}$$

$$f_i(t) = f(t) \qquad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad .$$

O deslocamento total será

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i(t)$$

com $x_i$ satisfazendo

$$\ddot{x}_i(t) + \omega^2 x_i(t) = f_i(t) \quad .$$

Se $m$ for suficientemente grande, $x_i(t)$ pode ser visto como um deslocamento causado por um impulso instantâneo de intensidade

$$I = f_i(t_i)\Delta t = f(t_i)\Delta t \quad .$$

Assim

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} G(t-t_i)f(t_i)\Delta t \quad .$$

No limite $\Delta t \to 0$, tem-se

$$x(t) = \int_0^t G(t-t_i)f(t_i)dt_i \quad .$$

O deslocamento causado por uma distribuição contínua de força é representado pela superposição de deslocamentos causados por impulsos instantâneos. A função de Green é a função influência desses impulsos instantâneos.

## III. A FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR

Seja o problema de se determinar a distribuição de temperatura sobre uma barra fina e homogênea de comprimento $\ell$ na presença de uma fonte externa de calor.

A equação diferencial não homogênea é

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) + f(x,t) \tag{11}$$

onde $a^2$ é o coeficiente de condutividade térmica, $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ ; $k$ é a condutividade térmica, $c$ é o calor específico e $\rho$ a densidade da barra. A função $c\rho f(x,t)$ denota a densidade da fonte de calor e $T(x,t)$ denota a distribuição de temperatura sobre a barra.

Considere-se as soluções dessa equação tais que a distribuição de temperatura nos extremos da barra seja sempre zero, isto é, as condições de contorno sejam

$$T(0,t) = 0 \quad , \quad T(\ell,t) = 0$$

com a condição inicial $T(x,0) = 0$ .

Tomemos como Ansatz para as soluções da Eq.(11), uma solução na forma de uma série de Fourier

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \tag{12}$$

solução esta que satisfaz as condições de contorno.

Suponha-se que $f(x,t)$ possa também ser expandida numa série de Fourier

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \tag{13}$$

com

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x',t)\, \mathrm{sen}\frac{n\pi}{\ell} x'\, dx' \quad . \tag{14}$$

Substituindo-se a Eq.(12) e a Eq.(13) na Eq.(11) obtém-se para $T_n(t)$ a seguinte equação diferencial

$$\dot{T}_n(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \tag{15}$$

satisfazendo a condição inicial $T_n(0) = 0$ .

Usando-se o mesmo procedimento da seção II, a solução dessa equação pode ser escrita na forma integral, para $t > 0$ ,

$$T_n(t) = \int_0^t U_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \tag{16}$$

onde $U_n(t-\tau)$ é a solução da equação homogênea para $t > \tau$ , satisfazendo a condição $U_n(0) = 1$ .

$$U_n(t-\tau) = \exp\left[- a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \quad . \tag{17}$$

Introduzindo as Equações (14), (16) e (17) na Eq.(12), obtém-se

$$T(x,t) = \int_0^t \int_0^{\ell} \frac{2}{\ell}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[- a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \mathrm{sen}\, \frac{n\pi}{\ell} x \ \mathrm{sen}\, \frac{n\pi}{\ell}\xi\right] f(\xi,\tau) d\xi\, d\tau \, . \tag{18}$$

Definindo-se

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[- a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \mathrm{sen}\frac{n\pi}{\ell} x \ \mathrm{sen}\frac{n\pi}{\ell}\xi \tag{19}$$

tem-se

$$T(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^{\ell} d\xi \ G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) \tag{20}$$

A função $G(x,\xi,t-\tau)$ é a função de Green para a equação di ferencial de condução do calor sobre uma barra fina e homogênea de comprimento $\ell$, satisfazendo as condições de contorno e a condição inicial $G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi)$.

Para se interpretar fisicamente essa função pode-se supor que a fonte de calor, representada por $f(x,t)$ atua somente nas vizinhanças de um ponto $x_0$, $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$, durante um curto intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$.

A função $\rho c f(x,t)$ representa a densidade da fonte de calor e a quantidade total de calor liberada durante a ação dessa fonte será

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} d\xi \; c\rho f(\xi,\tau) \quad . \tag{21}$$

A distribuição de temperatura num ponto $x$, num instante $t$, será

$$T(x,t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} d\xi \; G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) \quad . \tag{22}$$

Usando-se o teorema da média, tem-se

$$T(x,t) = G(x,\bar{\xi},t-\bar{\tau}) \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} d\tau \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} d\xi \; f(\xi,\tau) \tag{23}$$

onde $t_0 \leq \bar{\tau} \leq t_0 + \Delta t$ e $x_0 \leq \bar{\xi} \leq x_0 + \Delta x$. No limite $\Delta t \to 0$ e $\Delta x \to 0$, tem-se

$$T(x,t) = \frac{Q}{\rho c} G(x,x_0,t-t_0) \quad . \tag{24}$$

A função de Green é, portanto, a distribuição de temperatura num ponto $x$ num instante $t$, quando uma fonte de calor instantânea libera calor no ponto $x_0$ no instante $t_0 < t$.

A solução dada pela Eq.(20) é uma superposição de distribuições de temperatura causadas por fontes de calor instantâneas e localizadas.

Pode-se estender esse cálculo para uma barra homogênea infinita. A função de Green pode ser derivada da Eq.(19) como um limite quando ambas as extremidades tendem a infinito. Para se realizar esse limite, transforma-se primeiramente a Eq.(19), de tal forma que as extremidades da barra se localizem em $-\frac{\ell}{2}$ e $\frac{\ell}{2}$, introduzindo-se $x' = x - \frac{\ell}{2}$ e $\xi' = \xi - \frac{\ell}{2}$.

$$G(x',\xi',t-\tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell}\left(x'+\frac{\ell}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell}\left(\xi'+\frac{\ell}{2}\right) .$$

Essa expressão pode ser transformada em

$$G(x',\xi',t-\tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-a^2\left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{\ell} x' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{\ell} \xi' +$$

$$+ \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-a^2\left(\pi\, \frac{2n+1}{\ell}\right)^2 (t-\tau)\right] \cos \frac{2n+1}{\ell} \pi x' \cos \frac{2n+1}{\ell} \pi \xi' .$$

Seja o limite da primeira soma, quando $\ell \to \infty$: definindo-se $\lambda_n = \frac{2n\pi}{\ell}$ e $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{\ell}$, tem-se

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\lambda_n^2\, a^2\, (t-\tau)\right] \operatorname{sen} \lambda_n x' \operatorname{sen} \lambda_n \xi' \Delta\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right] \operatorname{sen} \lambda x' \operatorname{sen} \lambda \xi'\, d\lambda \quad . \qquad (25)$$

O limite da segunda soma é determinado analogamente, obtendo-se

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right] \cos \lambda x' \cos \lambda \xi'\, d\lambda \quad . \qquad (26)$$

A função de Green para a equação de condução de calor sobre uma barra homogênea e infinita será

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right] \cos \lambda (x-\xi)\, d\lambda \qquad (27)$$

que ainda pode ser escrita na forma

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right] \exp\left[i\lambda(x-\xi)\right] d\lambda \quad . \qquad (28)$$

Para $t > \tau$ essa integral pode ser calculada, obtendo-se

$$G(x,\xi,t-\tau) = \left[4\pi a^2(t-\tau)\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] . \qquad (29)$$

A função $G(x,\xi,t-\tau)$ dada pela Eq.(27) é a solução da equação de condução de calor sobre uma barra homogênea e infinita, quando sobre a barra atuam fontes de calor instantâneas e localizadas. A função $\frac{Q}{\rho c}\,G(x,\xi,t-\tau)$ representa a distribuição de temperatura num ponto $x$, num instante $t$, quando uma quantidade de calor $Q$ é liberada no ponto $\xi$ no instante $\tau < t$.

A função $G(x,\xi,t-\tau)$ deve satisfazer a uma particular equação diferencial não homogênea, com fonte de calor localizada e instantânea. Matematicamente tais fontes são representadas por funções delta. Neste caso tem-se

$$f(x,t) = \frac{Q}{\rho c}\,\delta(t-\tau)\delta(x-\xi) \quad . \qquad (30)$$

A equação diferencial para a distribuição de temperatura será

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) + \frac{Q}{\rho c}\,\delta(t-\tau)\delta(x-\xi) \qquad (31)$$

com a condição inicial $T(x,0) = 0$.

Mostremos que a solução dessa equação é dada por $\frac{Q}{\rho c}G(x,\xi,t-\tau)$. Pode-se tomar o seguinte Ansatz para $T(x,t)$

$$T(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T(\lambda,t)\cos\lambda(x-\xi)d\lambda \qquad (32)$$

e usando-se para $\delta(x-\xi)$ a representação integral de Fourier

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda(x-\xi)d\lambda \quad . \qquad (33)$$

A função $T(\lambda,t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{T}(\lambda,t) + a^2\lambda^2\,T(\lambda,t) = \frac{Q}{\rho c}\,\delta(t-\tau)$$

com $T(\lambda,0) = 0$. Usando-se o mesmo procedimento da Seção II, pode-se determinar $T(\lambda,t)$

$$T(\lambda,t) = \frac{Q}{\rho c}\int_0^t \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau_0)\right]\delta(\tau_0-\tau)d\tau_0 \quad . \qquad (34)$$

Para $t<\tau$ essa integral é zero e para $t>\tau$, tem-se

$$T(\lambda,t) = \frac{Q}{\rho c}\exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right] \qquad (35)$$

e a solução da Eq.(31), será

$$T(x,t) = \frac{Q}{\rho c}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t-\tau)\right]\cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

$$= \frac{Q}{\rho c} G(x,\xi,t-\tau) \quad . \qquad (36)$$

A função de Green é, portanto, a solução da equação diferencial não homogênea com fonte de calor instantânea e localizada.

Há uma relação importante para as funções de Green, que em teoria das probabilidades é conhecida como a equação de Chappman-Kolmogoroff(3).

Mostraremos essa relação para a função de Green calculada para a equação de condução de calor sobre uma barra infinita.

Considere-se a função de Green em dois instantes diferentes $G(x,x_0,t_1)$ e $G(x_0,x',t_2)$, quando a fonte libera calor no instante $t=0$. Seja a seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x_0,t_1)\, G(x_0,x',t_2)dx_0 \quad .$$

Introduzindo as expressões para as funções de Green dadas pela Eq. (28), tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \exp\left[-\lambda^2 a^2 t_1\right]\exp\left[i\lambda(x-x_0)\right]\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp\left[-\omega^2 a^2 t_2\right]\exp\left[i\omega(x_0-x')\right] .$$

A integral em $x_0$ resulta em $2\pi\,\delta(\lambda-\omega)$. Integrando-se em

$\omega$, obtém-se

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\lambda^2 a^2 (t_1+t_2)\right] \exp\left[i\lambda(x-x')\right] d\lambda$$

ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x_0,t_1)G(x_0,x',t_2)dx_0 = G(x,x',t_1+t_2) \tag{37}$$

que é a equação de Chappman-Kolmogoroff. Esta propriedade é válida para qualquer função de Green dependente do tempo. Evidentemente que para funções de Green definidas num espaço de dimensão maior do que um, a integral será uma integral múltipla.

Considere-se novamente a Eq.(11), para o caso da barra infinita e sua solução dada por

$$T(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)$$

com $t = t_1+t_2$. Introduzindo-se para $G(x,\xi,t_1+t_2-\tau)$ a Eq.(37), tem-se

$$T(x,t_1+t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{t_1+t_2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; G(x,x_0,t_1)\, G(x_0,\xi,t_2-\tau)f(\xi,\tau) \quad . \tag{38}$$

Como para $t_2 < \tau$, $G(x_0,\xi,t_2-\tau) = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{t_1+t_2} d\tau \; G(x_0,\xi,t_2-\tau)f(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{t_2} d\tau \; G(x_0,\xi,t_2-\tau)f(\xi,\tau)$$

que define a distribuição de temperatura no ponto $x_0$ e no instante $t_2$, $T(x_0,t_2)$. Assim,

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x_0,t_1)\; T(x_0,t_2)dx_0 \tag{39}$$

ou ainda para $t > t_2$,

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x_0,t-t_2)\,T(x_0,t_2)dx_0 \quad . \tag{40}$$

Essa equação simplesmente nos diz que se uma particular distribuição de temperatura é conhecida num instante $t_2$, a evolução temporal da distribuição de temperatura é determinada pela função de Green.

## IV. EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula livre de massa $m$ é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \quad . \tag{41}$$

A função de Green satisfaz a seguinte equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G(x,x',t,t') = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,x',t,t') + \delta(x-x')\delta(t-t') \; . \tag{42}$$

A solução dessa equação no domínio $-\infty < x < \infty$ é a mesma da Eq.(31) com $a^2 = i\,\frac{\hbar}{2m}$, $t > t'$

$$G(x,x',t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \exp\left[-i\,\frac{\hbar}{2m}\lambda^2(t-t')\right] \exp\left[i\lambda(x-x')\right] . \tag{43}$$

O parâmetro $\lambda$ define o número de onda e é igual a $\frac{p}{\hbar}$, sendo $p$ o momento da partícula e $\frac{\hbar}{2m}\lambda^2 = \frac{E}{\hbar}$, onde $E$ é energia. Assim

$$G(x,x',t-t') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \, \exp\left[i\,\frac{p}{\hbar}(x,x')\right] \exp\left[-i\,\frac{E}{\hbar}(t-t')\right]$$

$$= \left[\frac{m}{2\pi i\,\hbar\,(t-t')}\right]^{1/2} \exp\left[i\,\frac{m}{2\hbar}\,\frac{(x-x')^2}{t-t'}\right] \quad . \tag{44}$$

A generalização para o caso tri-dimensional é obtida pelo simples produto das funções de Green para cada dimensão.

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t-t') = \left[\frac{m}{2\pi i\,\hbar\,(t-t')}\right]^{3/2} \exp\left[i\,\frac{m}{2\hbar}\,\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}{t-t'}\right] \tag{45}$$

ou na representação integral

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t-t') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\iiint d^3p\,\exp\left[i\,\frac{1}{\hbar}\,\vec{p}.(\vec{r}-\vec{r}\,') - i\,\frac{E}{\hbar}(t-t')\right] . \tag{46}$$

Se lembrarmos que a solução da equação de Schrödinger para uma partícula livre, na representação de momento é

$$\psi_p(\vec{r},t) = [2\pi\hbar]^{-3/2}\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}.\vec{r} - i\,\frac{E}{\hbar}\,t\right]$$

a Eq.(46) pode ser escrita na forma

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t-t') = \iiint d^3p\;\psi_p^*(\vec{r}\,',t')\;\psi_p(\vec{r},t) \quad . \tag{47}$$

A função de Green, portanto, pode ser expressa numa expansão em termos das autofunções da equação de Schrödinger homogênea.

Esta é uma propriedade geral das funções de Green dependentes do tempo para equações diferenciais de autovalores. Se a equação diferencial de autovalores tem espectros definidos no discreto (n) e no contínuo ($\rho$), com conjuntos completos de soluções $\psi_n(\vec{r},t)$ e $\psi_\rho(\vec{r},t)$ respectivamente, então a função de Green é dada por

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t-t') = \sum_n \psi_n^*(\vec{r}\,',t')\;\psi_n(\vec{r},t) + \int d\rho\;\psi_\rho^*(\vec{r}\,',t')\;\psi_\rho(\vec{r},t) \quad . \tag{48}$$

Seja a equação de Schrödinger homogênea

$$\left[i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} - H\right]\psi = 0$$

sendo H uma hamiltoniana não dependente do tempo. Suponha-se que essa equação tenha espectros de energia definidos no discreto ($E_n$) e no contínuo ($E_\rho$) e cujas soluções estacionárias sejam respectivamente

$$\psi_n(\vec{r},t) = \psi_n(\vec{r}) \exp\left[i \frac{E_n}{\hbar} t\right]$$

$$\psi_\rho(\vec{r},t) = \psi_\rho(\vec{r}) \exp\left[i \frac{E_\rho}{\hbar} t\right] .$$

Tem-se para a função de Green

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t-t') = \sum_n \exp\left[i \frac{E_n}{\hbar} (t-t')\right]\psi_n^*(\vec{r}\,')\psi_n(\vec{r}) + \int d\rho \exp\left[i \frac{E_\rho}{\hbar} (t-t')\right]\psi_\rho^*(\vec{r}\,')\psi_\rho(\vec{r}) . \quad (49)$$

A função de Green estacionária, ou seja não dependente do tempo, pode ser calculada a partir da Eq.(49), fazendo-se a transformada de Fourier no tempo, obtendo-se

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',E) = \frac{\hbar}{i} \sum \frac{\psi_n^*(\vec{r}\,')\psi_n(\vec{r})}{E - E_n} + \frac{\hbar}{i} \int d\rho \frac{\psi_\rho^*(\vec{r}\,')\psi_\rho(\vec{r})}{E - E_\rho} . \quad (50)$$

Note-se que nessa expressão, $E$ não é autovalor da equação homogênea, $E \neq E_n$ , $E \neq E_\rho$ .

Essa expressão nos diz que a função de Green estacionária também pode ser expressa numa expansão em termos das autofunções da equação de Schrödinger homogênea e estacionária. Ela nos apresenta também uma propriedade importante das funções de Green estacionárias. A função de Green estacionária contém todas as informações dinâmicas do sistema; função de onda e autovalores de energia do sistema.

Se nós pudermos calcular a função de Green estacionária por algum método particular[4], os polos dessa função definem os autovalores de energia e a sua expansão numa série de Laurent em torno desses polos nos fornece as autofunções.


*BIBLIOGRAFIA*

(1) N.M. Ferrers,"Mathematical Paper of George Green", Chelsea Publishing Company, N.Y., 1970.

(2) J.D. Bjorken and S. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill Books Comp., N.Y., 1964, Chap. 6.

(3) P.M. Morse and H. Feshbach, "Method of Theoretical Physics", McGraw-Hill Books Comp., N.Y., 1953, vol. I, Chap. 7.