# UM MODELO SIMPLES PARA O ANDAR

RONNIE MAINIERI e OTAVIANO HELENE
*Instituto de Física, USP*

O estudo de sistemas reais pode ser bastante árduo, especialmente quando além de fenômenos físicos outros fenômenos - químicos, biológicos, etc. - interferem de maneira significativa. Nesses casos uma análise qualitativa ou semi-quantitativa desses sistemas pode ser útil e didática, pois se de um lado envolve um trabalho de abstração na procura das características importantes do sistema para a descrição do fenômeno estudado, de outro lado indica onde e como devem ser considerados fatores até então negligenciados. Além disso tais análises podem fornecer exemplos interessantes e atraentes no estudo da física. Neste trabalho, seguindo um esquema simplificador, estudamos o mecanismo do andar dos seres dotados de pernas, localizando as características físicas relevantes e estendendo o resultado para uma ampla faixa da escala zoológica.

## INTRODUÇÃO

Em um artigo intitulado "Sobre Átomos, Montanhas e Estrêlas: Um Estudo em Física Qualitativa"[1] o professor Weisskopf, a partir do conhecimento de constantes fundamentais (massa do próton e do elétron, carga elétrica fundamental, velocidade da luz, constante gravitacional e constante de Plank) e de relações básicas da mecânica quântica (princípio da exclusão de Pauli e princípio da incerteza), determinou diversas características do universo. Entre essas estão a altura das montanhas, o tamanho das estrêlas e a dureza da matéria, estando os resultados obtidos em bom acordo com a realidade.

H. Lin[2], utilizando alguns resultados de observações, equações básicas da mecânica newtoniana e fazendo modelos simples para descrever o comportamento do corpo humano, conseguiu determinar valores aproximados para recordes em diversas atividades esportivas. Em outro artigo[3] o mesmo autor usa leis de escala para determinar várias características de diversos animais, do elefante ao rato, como a duração da vida e a velocidade máxima, de corrida, entre outras. Novamente são conseguidos bons acordos entre os resultados e a realidade.

Em um artigo recente[4], estudando os mecanismos fundamentais do andar, conseguimos relacionar as velocidades limites da marcha ao movimento oscilatório vertical do centro de massa do corpo do atleta. Neste caso não apenas os valores numéricos obtidos estão em bom acordo com a realidade como também mostramos a necessidade de um certo "rebolado" por parte do atleta a fim de que a oscilação de seu centro de massa seja limitada. Esse "rebolado" é aquele movimento típico de pedestrianistas quando procuram atingir velocidades altas.

Esses exemplos citados podem ser classificados como pertencentes a uma área da física que podemos chamar, seguindo sugestão do Prof. Weisskopf, de "física qualitativa": o estudo de sistemas complexos a partir de hipótese e modelos simples que preservem suas características físicas essenciais. Esse trabalho de abstração é, em última instância, o que fazemos diariamente em Física. Afinal, a grande lição que Newton nos dá ao criar as bases da mecânica é, de um lado, conseguir abstrair fatores irrelevantes na descrição do sistema estudado, como a cor da maçã ou o estado de espírito do cocheiro do rei e, de outro lado, unificar coisas tão diferentes como a queda de um objeto na terra e o movimento dos planetas. A "física qualitativa" segue esse mesmo caminho: abstração e unificação. A diferença é que neste último caso estamos interessados não na descrição completa e precisa do sistema em estudo mas apenas na obtenção de resultados que descrevam-no qualitativamente e que permitam a obtenção de resultados quantitativos aproximados.

O resultado obtido a partir de uma análise física qualitativa pode ser bastante útil pois ele nos dá uma indicação se estamos ou não no caminho certo. Além disso, uma vez depurado o problema e localizado alguns dos fatores dominantes, passamos a ter indicações de que outros fatores podem intervir de forma relevante. Por exemplo, no trabalho citado do Prof. Weisskopf, a altura máxima de montanhas na Terra, determinada por ele a partir do fato de que se fossem mais altas do que isso sua base se liquefaria, é de 26 km, sendo a observada de aproximadamente 10 km. A comparação entre esses dois valores mostra de um lado que o modelo e as hipóteses adotadas parecem estar no caminho correto. De outro lado vê-se que alguns mecanismos não considerados são importantes para a obtenção de um melhor acordo, como sugere o próprio autor, indicando os processos de formação de montanhas e outros fenômenos, além da liquefação da base, como importantes no estudo do problema. No entanto como o caminho adotado é correto, pode-se estendê-lo para outros problemas, como a altura de montanhas em outros planetas ou a não esfericidade de pequenos corpos celestes, o que é feito com sucesso no artigo citado.

Neste artigo exploraremos o andar dos animais dotados de pernas sob o ponto de vista da física qualitativa. Os exemplos considerados são situações em relação às quais temos uma noção dos valores envolvidos e, portanto, podemos julgar criticamente as estimativas feitas. Com isso pretendemos ilustrar o estudo de um fenômeno complexo com hipóteses simplificadoras e fornecer um exemplo atraente para o fenômeno de pequenas oscilações.

## O MODELO

Vamos começar analisando o andar de um animal bípede. Neste caso a principal característica que diferencia o andar da corrida é que no primeiro caso pelo menos um pé está, em cada instante, em contato com o solo[4], enquanto no segundo caso numa parte do tempo nenhum pé está em contato com o solo, como pode ser visto com bastante clareza pelas fotografias da ref. (5). A figura 1 ilustra esse movimento com desenhos sucessivos do andar de um bípede. Várias hipóteses serão feitas para o desenvolvimento do modelo. Serão desprezados os movimentos verticais, bastante pequenos em relação aos horizontais. Além disso vamos supor que as pernas são rígidas. Uma terceira hipótese é de que em cada instante apenas um pé está em contato com o solo, ou seja, assim que um pé toca o solo, ao completar o passo, o outro pé é levantado. Embora todas essas hipóteses correspondam apenas aproximadamente à realidade, elas não comprometerão seriamente os resultados obtidos.

Não teremos muita dificuldade para generalizar esse modelo aos animais quadrúpedes. Examinando separadamente a parte dianteira e traseira de tais animais, vemos que cada um desses devem andar como um bípede ou seja, pelo menos um dos pés dianteiros e um dos pés traseiros deve estar em contato com o solo em cada instante. De outra forma o corpo desses animais cairia para a frente ou para trás. Situações em que isso não ocorre são classificadas como correr, e não como andar. Portanto os resultados obtidos para bípedes são também válidos para quadrúpedes. Assim vamos nos fixar no movimento dos bípedes.

Se olharmos o movimento dos pés de um animal bípede a partir de um referencial fixo no solo, veremos que estes fazem um movimento estranho: passam a metade do tempo parados enquanto a outra metade andando com o dobro da velocidade média do animal como um todo. Mas se esse movimento for observado a partir de um referencial que

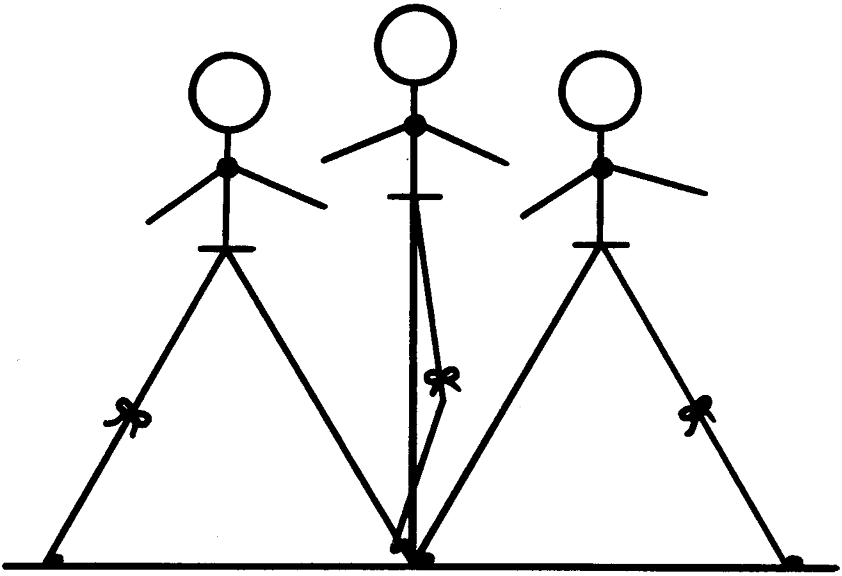

Figura 1 - Três posições sucessivas do andar de um bípede. No modelo desenvolvido são desprezados os movimentos horizontais e as pernas são consideradas rígidas. Nesta figura supomos uma pequena flexão das pernas com o único objetivo de afastar ligeiramente o pé do chão durante o deslocamento da perna.

se desloque com a mesma velocidade média do animal, o movimento dos pés e das pernas passam a ser vistos de uma forma mais sistemática: eles simplesmente oscilam para a frente para trás, uniformemente.

Se isso for verdade, conseguimos obter um modelo simples para o andar, que nos permite fazer alguns cálculos: esse modelo consiste em se supor uma oscilação uniforme das pernas, como se estas fossem simplesmente pêndulos físicos. A partir daí podemos determinar a velocidade do andar, ou pelo menos a velocidade do andar confortável que exige um mínimo esforço: ela é determinada a partir da suposição de uma oscilação harmônica simples das pernas, quando vista do referencial inercial que se desloca com a velocidade média do animal. Uma forma de andar diferente desta exigiria um esforço adicional para se acelerar ou frear a oscilação das pernas mais rapidamente do que isso ocorre pela simples ação da aceleração da gravidade.

O período de oscilação das pernas é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\ell / g} \quad , \qquad (1)$$

onde $\ell$ é a distância entre o ponto de suspensão de cada perna e o seu centro de oscilação, ou seja, o comprimento de um pêndulo simples cujo período é igual ao do pêndulo físico (no caso cada perna do animal)[6]. Se a perna tivesse uma distribuição uniforme de massa teríamos $\ell = 2L/3$, onde $L$ é o comprimento total da perna. No entanto, como em geral a massa das pernas está mais concentrada na parte superior delas, então $\ell < 2L/3$. A determinação precisa da relação entre $\ell$ e $L$ exige um estudo detalhado da distribuição de massa nas pernas dos vários animais. Podemos no entanto usar a aproximação $\ell \cong L/2$, o que tem sido feito por outros autores[2] e que preserva a relação qualitativa entre $\ell$ e $L$, permitindo uma aproximação quantitativa. Assim obtemos

$$T \cong 2\pi \sqrt{L/2g} \quad . \tag{2}$$

Em cada período completo de oscilação da perna o animal dá dois passos. (Estamos definindo um passo como sendo a distância percorrida entre dois instantes sucessivos nos quais um mesmo pé está em contato com o solo; nesse sentido a representação da figura 1 corresponde a um passo). Se o comprimento da perna é $L$ e o ângulo máximo de abertura é $\theta$ então o comprimento de um passo é

$$\ell_p = 2.L.\text{sen}\theta/2 \quad . \tag{3}$$

(A figura 2 ilustra essas dimensões). A velocidade de andar correspondente é

$$v = \frac{\ell_p}{T/2} \cong 0{,}90 \sqrt{Lg}\ \text{sen}\,\theta/2 \quad . \tag{4}$$

## EXPLORAÇÃO DO RESULTADO

A equação 4 nos fornece uma expressão para a velocidade do andar de animais bípedes ou quadrúpedes em termos das dimensões destes ($L$), de características de seu movimento (a abertura máxima das pernas, $\theta$) e do próprio ambiente onde está (representado pela aceleração da gravidade $g$). Assim podemos explorar esse resultado sob vários aspectos. O primeiro exemplo seria para o próprio corpo humano na Terra. Usando $L \cong 0{,}8$ m e $\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \cong 0{,}5$ [4], obtemos $v \cong 1{,}3$ m/s $\cong 4{,}5$ km/h para o homem. Como pode-se ver esse valor está em bom acordo com nossa experiência do dia a dia e nos dá uma indicação de que o modelo feito está no caminho correto, preservando as características essenciais do problema.

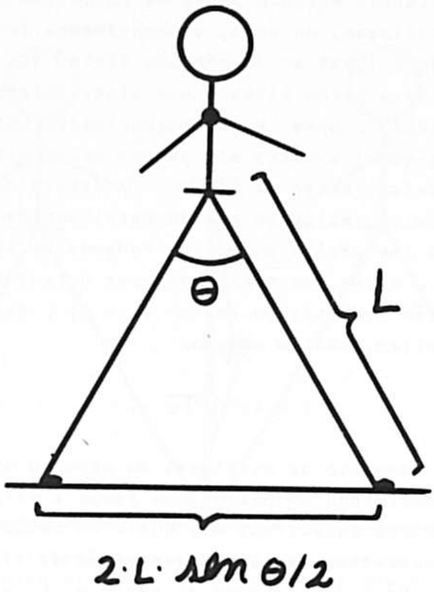


Figura 2 - Esta figura ilustra as dimensões envolvidas no problema.

Esse razoável acordo entre a previsão fornecida pelo modelo e a observação anima-nos a estender o resultado para outras situações, como animais grandes e pequenos. Se usarmos

$$\text{sen}\,\theta/2 \cong 0{,}5 \quad \text{e} \quad g \cong 9{,}8\,\text{m/s}^2$$

temos

$$v \cong 1{,}41\,\sqrt{L(\text{m})}\ \text{m/s} \quad , \qquad (5)$$

ou seja, uma expressão para a velocidade do animal dependente apenas do comprimento da perna (em metros) e na qual estamos supondo que a abertura máxima do passo seja de $60^o$, independente do animal. Esse resultado, a dependência com a raiz quadrada da dimensão do animal, pode explicar porque um adulto e uma criança conseguem andar lado a lado sem grandes esforços: embora suas estaturas possam diferir de um fator 2, a diferença da velocidade natural do andar não é tão grande assim e um pequeno ajuste da abertura máxima dos passos pode fazer com que ambos caminhem com a mesma velocidade.

Podemos usar também a equação 5 para estimar valores da velocidade do andar em casos extremos da escala zoológica. De um lado um grande mamífero pode ter uma perma com $L \cong 2$ m, o que daria uma velocidade $v \cong 2$ m/s $\cong 7{,}2$ km/h. No outro extremo pequenos animais podem ter pernas com $L \cong 10$ cm, o que daria $v \cong 0{,}5$ m/s $\cong 1{,}6$ km/h. Esses valores não parecem estar em grande desacordo com as observações. De fato uma girafa ou um elefante, como um bom frequentador de zoológicos pode observar, parecem andar com uma velocidade não maior do que o dobro da velocidade de um ser humano adulto, em razoável acordo com a previsão de 7,2 km/h. No outro extremo um gato ou um pequeno cachorro, cujas pernas tenham aproximadamente 10 cm de comprimento, parecem andar com uma velocidade compatível com a previsão acima, da ordem da metade ou, um pouco menos, da velocidade do homem.

Com um pouco de coragem podemos estender a aplicação da equação 5 para animais ainda menores, mesmo que nossas hipóteses não sejam completamente razoáveis. Por exemplo uma pequena formiga, cujas pernas têm um comprimento de aproximadamente 1 mm, andarian segundo o modelo com uma velocidade

$$v \cong 0{,}045 \text{ m/s} \cong 4{,}5 \text{ cm/s} \quad ,$$

o que não parece estar em desacordo com a realidade.

Outra conseqüência interessante do modelo é a dependência da velocidade do andar com a raiz quadrada da aceleração gravitacional local (veja equação 4). Por exemplo na Lua, onde a atração gravitacional local é aproximadamente 6 vezes menor do que na Terra, a velocidade típica do andar é da ordem de 2,5 vezes menor. Quem viu os filmes de homens andando sobre a lua deve ter notado esse fato.

## *DISCUSSÃO*

O mecanismo básico do andar, levando-se em conta o bom acordo entre os resultados obtidos e a realidade, parece realmente ser o movimento oscilatório harmônico das pernas. As diferenças entre os valores obtidos com esse modelo simples e os valores observados podem ser atribuídos a outros mecanismos não considerados, inclusive de natureza não física.

A estensão da aplicação do modelo para o caso da formiga deve ser vista com cuidado não apenas porque ela tem mais que quatro patas mas também porque fenômenos de dissipação (atrito) podem ser importantes.

Acreditamos que o objetivo inicial tenha sido alcançado, a saber, usando esquemas simplificadores da física qualitativa, mostrar como se elabora um modelo em física, abstraindo os fenômenos menos importantes e procurando caracterizar as conseqüências dos fenômenos mais relevantes. Além disso, pretendemos ter apresentado com algum detalhe um exemplo prático e curioso de aplicação do fenômeno de pequenas oscilações em nosso dia a dia.

## REFERÊNCIAS

(1) V. Weisskopf, Science 187, 605 (1975).
(2) H. Lin, Am. J. Phys. 46, 15 (1978).
(3) H. Lin, Am. J. Phys. 50, 72 (1982).
(4) O. Helene, Am. J. Phys. 52, 656 (1984).
(5) T.A. McHon and P.R. Greene, Sci. Am. 239, 112 (Dec. 1978).
(6) H.M. Nussenzveig, "Curso de Física Básica", vol. 2, Ed. Edgard Blütcher Ltda., São Paulo, 1983.