O MOVIMENTO DO PIÃO COM UM PONTO FIXO COMO O MOVIMENTO DO SEU CENTRO DE MASSA

G.F. Leal Ferreira

Departamento de Física e Ciência dos Materiais - Instituto de Física e Química de São Carlos - USP

Tanto quanto é do nosso conhecimento, o estudo do movimento do pião com um ponto fixo é sempre feito segundo Euler, que utiliza eixos solidários com o corpo rígido para aferir as velocidades angulares e, posteriormente, as representa em termos dos ângulos de Euler (ϕ,θ,ψ) [1] e suas derivadas. De tudo isto resulta uma formulação geral e completa, porém muito afastada de uma visualização direta que procure seguir e explicar o movimento do centro de massa do pião e inquira por que a rotação imprimida a ele faz o seu movimento se afastar tanto da simples oscilação pendular. Isto é, sem rotação o pião largado de uma posição, sem qualquer velocidade, simplesmente oscila, enquanto que com rotações crescentes um movimento lateral se manifesta de forma cada vez mais expressiva, a ponto de preponderar sobre a tendência à queda.

Desde que estamos procurando reduzir o problema à análise do movimento de um ponto, é natural substituirmos, por simplificação, o pião por uma massa pontual, ligada por uma barra rígida e sem massa ao ponto fixo 0, e dotada, aquela massa, de um momento angular intrínseco $\vec{L}_o$, cuja direção sempre coincide com a direção da barra. Não estamos, portanto, resolvendo o problema do pião mas um outro que, apesar de bem mais simples, mantém os ingredientes físicos do primeiro. E, ao final, alcançada a solução, poder-se-á ver por comparação com a solução conhecida qual a receita a ser empregada para sempre poder-se reduzir um problema ao outro.

Na seção I, partindo do modelo ora apresentado, procuraremos obter as equações de movimento da massa pontual, dotada de momento angular.

I. Equações de movimento

Na fig. 1 está mostrado o sistema, consistindo de uma massa pontual m dotada de momento angular $\vec{L}_o$, cuja direção sempre coincide com a do vetor posição $\vec{R}$, de módulo constante. As coordenadas de $\vec{R}$ são x, y e z.

Partimos da equação

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} \tag{1}$$

sendo $\vec{M}$ o momento da força peso e $\vec{L}$ o momento angular total, ambos em relação a 0. O momento angular total é a soma do momento angular do movimento do centro de massa em relação a 0 e do momento angular em relação ao centro de massa. O primeiro, que chamaremos de movimento angular extrínseco, é igual a $m\vec{R}\times\vec{V}$. O segundo é $\vec{L}_o$, o qual, pelo vínculo imposto, tem o seu módulo constante e está sempre na direção de $\vec{R}$. Podemos então expressá-lo como $\vec{L}_o = \frac{L_o\vec{R}}{R}$ e portanto o momento angular total $\vec{L}$ como $\vec{L} = m\,\vec{R}\times\vec{V} + \frac{L_o\vec{R}}{R}$. A presença explícita do termo envolvendo o momento angular intrínseco permitirá aquilartar-se separadamente o seu efeito no movimento de m.

Escrevemos a eq. 1 assim

$$\vec{R}\times m\vec{g} = m\vec{R}\times\vec{a} + \frac{L_o}{R}\frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{R}\times\vec{a} + \frac{L_o}{R}\vec{V} \tag{2}$$

lembrando que $\frac{d}{dt}\vec{R}\times\vec{V} = \vec{R}\times\vec{a}$, sendo $\vec{a}$ o vetor aceleração. Vê-se, desta equação (passando-se para o membro esquerdo o termo $\frac{L_o}{R}\vec{V}$), que as coisas se passam como se o momento angular intrínseco provocasse sobre a partícula de massa m um momento mecânio, dependente da velocidade da massa pontual. Como estamos interessados em achar $\vec{a}$, é agora necessário obter-se a força $\vec{F}$, com braço $\vec{R}$ em relação a 0, que gera aquele momento $-\frac{L_o}{R}\vec{V}$. Por tentativa acha-se

$$\vec{F} = \vec{R}\times\frac{L_o}{R^3}\vec{V} \quad .$$

Dessa forma, em vez da eq. 2, podemos escrever, completando o projeto (Newtoniano) a que nos tínhamos proposto de obter a equação de movimento da massa pontual,

$$m\vec{g} + \vec{R}\times\frac{L_o\vec{V}}{R^3} + \vec{T} = m\vec{a} \quad , \tag{3}$$

onde $\vec{T}$ é a força de vínculo que a barra leve exerce sobre m.

Notemos que o termo devido ao momento angular intrínseco é proporcional ao momento angular extrínseco.

A eq. 3 mostra que há uma solução em que $m\vec{g} + \vec{R} \times \frac{L_o \vec{V}}{R^3} = 0$, que corresponde ao caso de precessão uniforme.

II. *As equações diferenciais do momento*

Naturalmente que a vantagem em se escrever a equação de movimento na forma da eq. 3 está no seu aspecto didático e não na facilidade de obtermos soluções a partir dela. Aliás, neste ponto, é mais interessante usarmos as equações de Lagrange, que diretamente eliminam os vínculos. Usando as coordenadas esféricas θ e ϕ da massa pontual e as forças generalizadas correspondentes ao lado esquerdo da eq. 3, obtemos as seguintes equações:

$$mR^2(\ddot{\theta} - \text{sen}\,\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2) + L_o\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\phi} = mg\,R\,\text{sen}\,\theta \qquad (4)$$

$$mR^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\dot{\phi} + L_o\cos\theta = C_1 \quad ,$$

onde C_1 é uma constante advinda da integração da equação envolvendo a coordenada ϕ. Comparamos estas equações com as obtidas segundo o tratamento habitual (ref. 1, pg. 164), com ângulos de Euler ϕ', θ, ψ, sendo I_3 o momento de inércia em relação ao eixo de simetria do pião, I_1 o outro que, no caso que estudamos, corresponderia ao termo mR^2, e ℓ a distância do centro de massa do pião ao ponto fixo:

$$I_1(\ddot{\theta} - \text{sen}\,\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}'^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}'\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\dot{\phi}' = mg\ell\,\text{sen}\,\theta$$

$$I_3(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi}') = L_o \qquad (5)$$

$$(I_1\,\text{sen}^2\,\theta + I_3\cos^2\theta)\,\dot{\phi}' + I_3\,\dot{\psi}\cos\theta = C_1$$

onde as constantes de integração foram ajustadas para permitir a comparação entre os sistemas (4) e (5).

Vemos que os dois sistemas (4) e (5) coincidem se mR^2 vai em I_1 e R vai em ℓ no termo de energia potencial gravitacional. Além disso é preciso, naturalmente, que $\dot{\phi} = \dot{\phi}'$. Mas esta última igualdade decorre da maneira como os ângulos de Euler são definidos. Uma análise atenta mostra que o azimute ϕ do vetor $\vec{R}$ é igual a $\phi' - \pi/2$. A coordenada esférica θ e o ângulo de Euler θ coincidem, também, por construção.

III. *Considerações finais*

Como mostrado na secção anterior a simplificação feita de assemelharmos o pião com rotação a uma massa pontual dotada de momento angular não altera, de forma essencial, a física do problema (e justifica o título deste artigo). E tem a vantagem de mostrar a influência que aquele momento angular tem sobre o movimento da massa pontual, decorrente do vínculo que obriga, a cada variação do vetor posição, uma variação correspondente da direção do momento angular.

REFERÊNCIA

(1) H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Press - Cambridge 1951, pg. 107.