Construção da Álgebra de Momento Angular sem o Uso de uma Representação Específica.

J.BELLANDI FILHO
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP

INTRODUÇÃO

Quando se introduz os operadores de spin em mecânica quântica, como uma consequência natural da experiência de Stern-Gerlach, é fato bastante comum nos livros textos impor-se a esses operadores a mesma álgebra dos operadores de momento angular orbital. Essa imposição é natural, uma vez que o acoplamento do spin com o campo magnético ocorre da mesma forma que o acoplamento do momento angular orbital com esse campo.

A álgebra que os operadores de momento angular orbital satisfazem pode ser facilmente obtida quando conhecemos uma representação explícita desses operadores, por exemplo, em termos das variáveis angulares em coordenadas polares. Outra forma é partir do fato de que esses operadores são os geradores das rotações infinitesimais.

O que se pretende aqui é mostrar como essa álgebra pode ser construída sem a necessidade de uma representação específica para os operadores, usando somente as hipóteses comumente usadas dentro desse contexto.

CONTRUÇÃO DA ÁLGEBRA

Consideremos um conjunto de funções indiciáveis $\{a_m\} \equiv \{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$ e que tenha um número finito de elementos. Seja um conjunto de transformações $\{J_z, J_+, J_-\}$, que atuando em $\{a_m\}$ permita construir todos os elementos do conjunto da seguinte forma:

$$a_m \xrightarrow{J_z} a_m$$

$$a_m \xrightarrow{J_+} a_{m+1}$$

$$a_m \xrightarrow{J_-} a_{m-1}$$

Vamos supor que essas transformações são tais que

$$J_z a_m = m a_m$$

$$J_+ a_m = \alpha_+^m \, a_{m+1} \qquad (1)$$

$$J_- a_m = \alpha_-^m \, a_{m-1}$$

Como o conjunto $\{a_m\}$ tem um número finito de elementos, existem n e ℓ, tais que

$$J_+ a_\ell = 0 \qquad (2)$$

$$J_- a_n = 0 \, , \qquad (3)$$

ou seja $\alpha_+^\ell = 0$ e $\alpha_-^n = 0$.

A transformação J_+ é tal que $J_+ a_m$ é um elemento de $\{a_m\}$, assim $J_+ a_m \to J_+ a_m$ pela transformação J_z

$$\begin{aligned} J_z(J_+ a_m) &= \alpha_+^m \, J_z \, a_{m+1} \\ &= \alpha_+^m \, (m+1) a_{m+1} \qquad (4) \\ &= (m+1)(J_+ a_m) \end{aligned}$$

O elemento $J_z a_m \to a_{m+1}$ pela transformação J_+, assim

$$J_+(J_z a_m) = m \, (J_+ a_m) \, . \qquad (5)$$

Vemos assim que o produto das transformações J_+ e J_z não é comutativo.

Dessas expressões, obtemos

$$(J_z J_+ - J_+ J_z) a_m = J_+ a_m$$

e portanto, como a_m é qualquer, teremos

$$[J_z, J_+] = J_+ \, . \qquad (6)$$

Analogamente podemos mostrar que

$$[J_z, J_-] = -J_- \, . \qquad (7)$$

Notemos que essas relações de comutação entre J_z e $J_\pm$ geram os elementos das transformações $J_\pm$. Podemos fechar essa álgebra, supondo que

$$[J_+,J_-] = \beta J_z \tag{8}$$

sendo β um número qualquer. Mais adiante veremos como se pode fixar o valor de β. Vamos ver quais as consequências.

Consideremos os produtos de transformações J_+J_-, J_-J_+ e J_z^2. Essas transformações são tais que $a_m \to a_m$. Usando as relações de comutação podemos mostrar que

$$\begin{aligned} [J_+J_-, J_z^2] &= 0 \\ [J_-J_+, J_z^2] &= 0 \\ [J_+J_-, J_-J_+] &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

ou seja, são transformações que comutam entre si. Podemos assim introduzir uma transformação J^2 que seja uma combinação linear dessas transformações

$$J^2 = \frac{1}{\beta}\,[J_+J_- + J_-J_+] + J_z^2 \;, \tag{10}$$

portanto uma transformação quadrática em J_z, bilinear em J_+ e J_- e que comuta com cada uma dessas transformações. O fator $1/\beta$ nessa expressão é introduzido arbitrariamente da mesma forma que na eq.8, que é também uma combinação linear em J_+J_- e J_-J_+. Essa escolha permite separar J_+J_- e J_-J_+ e escrevê-las como funções das transformações J^2 e J_z. De fato, usando a relação de comutação (8) e a eq.10, obtemos:

$$\begin{aligned} J_+J_- &= \frac{\beta}{2}\,(J^2 - J_z^2 + J_z\,) \\ J_-J_+ &= \frac{\beta}{2}\,(J^2 - J_z^2 - J_z\,)\;. \end{aligned} \tag{11}$$

A transformação J^2 é tal que $a_m \to a_m$ e podemos assim escrever:

$$J^2\, a_m = \gamma_m^2\, a_m \;.$$

Atuando com a transformação J_-J_+ em a_m teremos:

$$\begin{aligned} J_-J_+a_m &= \alpha_+^m\, \alpha_-^{m+1}\, a_m \\ &= \frac{\beta}{2}\,(J^2 - J_z^2 - J_z)a_m \\ &= \frac{\beta}{2}\,(\gamma_m^2 - m^2 - m)a_m \end{aligned} \tag{12}$$

ou seja

$$\alpha_+^m \, \alpha_-^{m+1} = \frac{\beta}{2}\left[(\gamma_m^2 - m(m+1)\right] \tag{13}$$

Atuando com J_+J_- em a_s, teremos

$$\alpha_-^s \, \alpha_+^{s-1} = \frac{\beta}{2}\left[\gamma_s^2 - s(s-1)\right] . \tag{14}$$

Se fizermos s=m+1 nessa expressão, teremos

$$\alpha_-^{m+1}\alpha_+^m = \frac{\beta}{2}\left[\gamma_{m+1}^2 - m(m+1)\right] \tag{15}$$

Comparando com (13), concluimos que $\gamma_m^2 = \gamma_{m+1}^2$ e portanto $\gamma_m^2 = \gamma^2$ não depende de m.

Como o conjunto $\{a_m\}$ é finito existe ℓ, tal que $\alpha_+^\ell = 0$ e portanto de (13) obtemos

$$\gamma^2 - \ell(\ell+1) = 0 \tag{16}$$

e existe um n tal que $\alpha_-^n = 0$; obtemos de (14)

$$\gamma^2 - n(n-1) = 0 \tag{17}$$

Como γ^2 não depende de um particular m, essas relações só serão simultaneamente satisfeitas se $n = -\ell$ e portanto

$$\gamma^2 = \ell(\ell+1) \tag{18}$$

dependendo, assim, somente do maior valor de m. Podemos concluir então que $-\ell \leq m \leq \ell$ e que o número total de elementos do conjunto $\{a_m\}$ é $2\ell + 1$.

As constantes α_+^m e α_-^m podem ser calculadas simplesmente lembrando que se desejamos construir todos os elementos de $\{a_m\}$ a partir de um deles, de uma forma unívoca, usando as transformações J_+ e J_-, devemos necessariamente ter que $\alpha_+^m = \alpha_-^{m+1}$. Usando a expressão (13) obtemos

$$(\alpha_+^m)^2 = \frac{\beta}{2}\left[(\ell-m)(\ell+m+1)\right] \tag{19}$$

e da expressão (14)

$$(\alpha_-^m)^2 = \frac{\beta}{2}\left[(\ell+m)(\ell-m+1)\right] . \tag{20}$$

Até aqui o parâmetro β é qualquer e indeterminado, pois o número de relações é insuficiente para fixá-lo. Podemos, no entanto, definir duas novas transformações J_x e J_y, como combinações lineares de J_+ e J_-. Ou ainda

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y \\ J_- &= J_x - iJ_y \end{aligned} \tag{21}$$

tal que a transformação J^2 seja uma simples combinação linear $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. E, ainda mais, que as transformações J_x, J_y e J_z obedeçam às relações cíclicas de comutação. O coeficiente complexo em (21) é introduzido para que se fique consistente com a definição de J^2 em (10).

As relações cíclicas de comutação são

$$[J_x, J_y] = i\,J_z$$

$$[J_y, J_z] = i\,J_x$$

$$[J_z, J_x] = i\,J_y$$

Dessa forma teremos $\beta = 2$, que é uma consequência direta da particular combinação linear em (21).

Agradece-se as salutares discussões com o Prof. Adolpho Hengeltraub.