UM MODELO HIDRÁULICO DE CAPACITOR

Antônio A. S. Brito - Joaquim de Oliveira Figueirêdo
UFPb - Depto de Física - Campina Grande - Pb

1. INTRODUÇÃO

O uso de modelos hidráulicos para explicar mais facilmente os fenômenos elétricos é muito comum em Física[(1),(2),(3)], embora raramente quantitativos. Propomos um análogo hidráulico de um capacitor, que possui várias propriedades semelhantes, devido ao fato do capacitor poder armazenar cargas e um vasilhame poder armazenar líquido.

2. MODELO HIDRÁULICO

Uma relação entre as grandezas elétricas e hidráulicas, referentes a um capacitor de placas planas e paralelas e um copo d'água, pode ser:

Elétrica		Hidráulica	
Nome	Símbolo	Nome	Símbolo
Capacitor	⊣⊢	Copo	⊔
Carga	q	Massa líquida	m
Potencial elétrico	V	Potencial hidráulico	H
Capacitância elétrica	C	Capacitância hidráulica	C_h
Distância entre placas	d	Altura da superfície de líquido	h
Área das placas	A	Área da superfície do líquido	$\bar{A}$
Energia Potencial	U	Energia Potencial	U_h

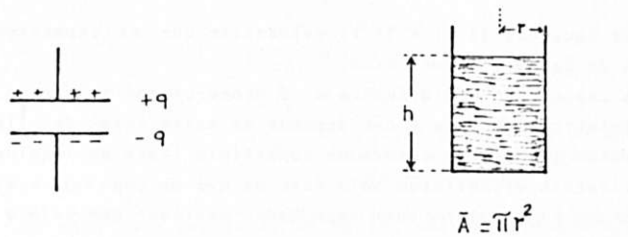
Tabela I

Um capacitor plano de placas paralelas carregado com cargas $+q$ e $-q$ nas suas placas terá como análogo um copo com uma massa de líquido m.

A diferença de potencial* (d.d.p.) entre as placas do capacitor relaciona-se com o análogo hidráulico na forma das equações:

$$V = E.d \tag{2.1}$$

$$H = g.h \tag{2.2}$$



Capacitor Elétrico   Capacitor Hidráulico

Fig. 1

A capacitância elétrica e a capacitância hidráulica do análogo são definidas por:

$$C = \frac{q}{V} \tag{2.3}$$

$$C_h = \frac{m}{H} \tag{2.4}$$

3. CAPACITÂNCIA ELÉTRICA E CAPACITÂNCIA HIDRÁULICA

Usando as relações de carga e campo elétrico ($E = \sigma/\varepsilon_0 = q/A.\varepsilon_0$), obtidas pela lei de Gauss, e usando as equações (2.1) e (2.2), chegamos à equação (3.1) que descreve a capacitância em termos da constante dielétrica no vácuo (ε_0) e dos fatores geométricos A e d.

* As diferenças entre os modelos são evidenciadas na equação (2.1) e (2.2), uma vez que o campo elétrico $\underline{E}$ entre as placas depende da quantidade de carga armazenada nas placas ($E = q/A.\varepsilon_0$) e o campo gravitacional $\underline{g}$ no interior do copo não depende da quantidade de líquido $\underline{m}$. Além disto existem cargas positivas e negativas nas placas ao passo que $\underline{m}$ é uma grandeza não negativa sempre.

Utilizando-se de um líquido com densidade igual a ρ e as equações (2.2) e (2.4), chegamos à equação (3.2) que descreve a capacitância hidráulica em termos da aceleração gravitacional local (g) e dos fatores geométricos como a área transversal de um copo cilíndrico:

$$C = \frac{\varepsilon_0 . A}{d} \tag{3.1}$$

$$C_h = \frac{\rho . \bar{A}}{g} \tag{3.2}$$

As equações (3.1) e (3.2) evidenciam que as capacitâncias só dependem de fatores geométricos.

A capacitância hidráulica C_h é proporcional à área da seção ($\bar{A}$) transversal do vaso e não depende da massa total de líquido no seu interior (m) nem da altura da superfície livre do líquido (h), o que é facilmente visualizado pelo fato de que um copo cuja área da seção é maior que a de outro tem maior **capacidade**, qualquer que seja a quantidade de líquido que contém.

$$m_o = C_h \cdot H_{máx.} = C_h \cdot g \cdot h_o$$

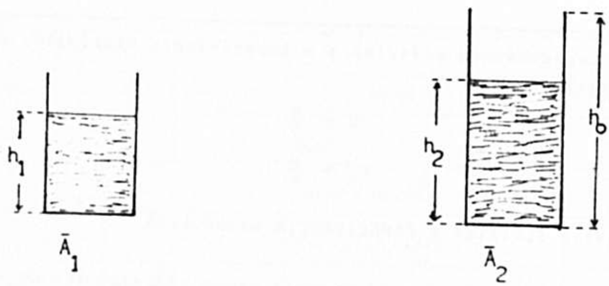


Fig. 2 - A capacitância hidráulica só depende da área da seção transversal $\bar{A}$, não dependendo do potencial hidráulico máximo (gh_o).

A capacitância hidráulica só depende da área da seção transversal $\bar{A}$.

$$\bar{A}_1 < \bar{A}_2 \tag{3.3}$$

$$C_{h_1} < C_{h_2} \tag{3.4}$$

Esta analogia é útil para visualizarmos a propriedade dos capacitores: "A capacitância não depende nem da quantidade de carga armazenada (q), nem da d.d.p. entre as placas (V), mas somente de fatores geométricos", conforme equação (3.1).

O copo possui uma altura máxima, a partir da qual não consegue armazenar mais líquido, pois será extravazado pelas bordas; assim um um copo pode armazenar no máximo uma certa quantidade de líquido (m_0).

$$m_0 = C_h . H_{máx.} \qquad (3.5)$$

$$q_{máx.} = C . V_{máx.} \qquad (3.6)$$

$$H_{máx.} = g . h_0 \qquad (3.7)$$

$V_{máx.}$ = rigidez dielétrica ou máxima d.d.p. que o capacitor pode suportar.

O copo pode armazenar no máximo uma certa quantidade de líquido (m_0), que depende da capacitância C_h e da altura do copo (h_0).

Esta analogia é útil para evidenciar a propriedade *"todo capacitor tem um limite de d.d.p., $V_{máx.}$, denominada rigidez dielétrica, a partir do qual ele não consegue armazenar mais cargas".*

4. ASSOCIAÇÃO DE CAPACITORES

Usando o análogo hidráulico do capacitor torna-se bastante simples visualizar as associações de capacitores em série e em paralelo.

Associação de capacitores em série

Significa, no análogo hidráulico, substituir 2 copos com diferentes* capacitâncias hidráulicas ($C_{h_1} \neq C_{h_2}$), que tenham a mesma quantidade de líquido ($m_1 = m_2 = m$) e consequentemente alturas diferentes da superfície livre do líquido ($h_1 \neq h_2$), por outro que armazena a mesma quantidade de líquido, com uma altura igual à soma das outras duas ($h = h_1 + h_2$). (Fig.3a e 3b)

---

* Não é necessário que tenham capacitâncias diferentes, mas adotamos assim para melhor ilustração.

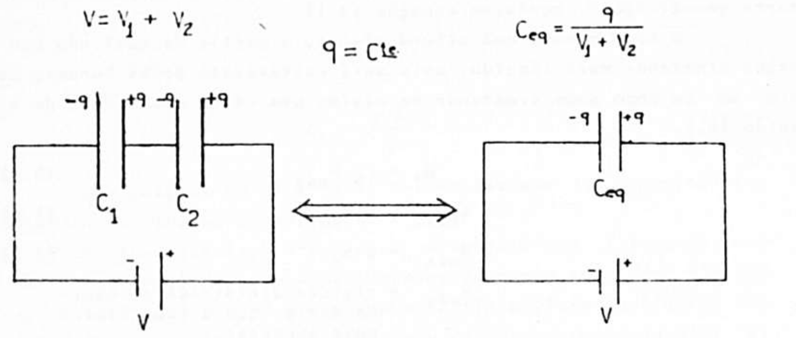


Fig. 3a- Dois capacitores associados em série (portanto armazenam a mesma quantidade de carga) são equivalentes a um capacitor (C_{eq}) que armazena a mesma quantidade de carga (q), quando submetido ã mesma d.d.p. (V), igual ã soma da d.d.p. de cada um dos capacitores ($V = V_1 + V_2$) .

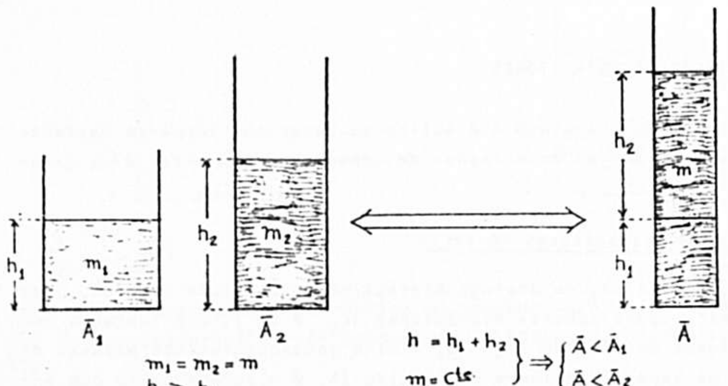


Fig. 3b- O análogo hidráulico do capacitor equivalente a 2 capacitores elétricos em série é a substituição de 2 copos por um outro que armazena a mesma quantidade de líquido, com uma altura igual ã soma das outras duas ($h = h_1 + h_2$).

É fácil de verificar que a área da superfície livre do líquido no copo equivalente será menor que a área de qualquer um dos dois copos considerados ($\bar{A} < \bar{A}_1$ e $\bar{A} < \bar{A}_2$) ou seja, a capacitância hidráulica do copo equivalente será menor que qualquer das capacitâncias dos copos ($C_h < C_{h_1}$ e $C_h < C_{h_2}$), pois usando (2.3) e (2.4) vemos que:

$$C_{eq} = \frac{q}{V_1 + V_2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \tag{4.1}$$

$$C_h = \frac{m}{H_1 + H_2} = \frac{C_{h_1} \cdot C_{h_2}}{C_{h_1} + C_{h_2}} \tag{4.2}$$

e

$$C_{eq} < C_1 \text{ e } C_{eq} < C_2 \tag{4.3}$$

$$C_h < C_{h_1} \text{ e } C_h < C_{h_2} \tag{4.4}$$

<u>Associação de capacitores em paralelo</u>

Significa, no análogo hidráulico, substituir dois copos de capacidades diferentes* ($C_{h_1} \neq C_{h_2}$) que possuem a mesma altura da superfície livre do líquido ($h_1 = h_2 = h$), por um copo equivalente que armazena a mesma quantidade de líquido, porém com a mesma altura da superfície livre do líquido. (Fig. 4a e 4b)

Fica muito simples visualizar que: "*a capacitância de dois capacitores associados em paralelo é maior que a capacitância de qualquer um dos dois*", uma vez que no análogo hidráulico o copo equivalente terá que ter uma área maior ($\bar{A}$) que qualquer um dos dois copos, para armazenar a mesma quantidade de líquido que os dois juntos, porém com a mesma altura da superfície livre do líquido. Usando (2.3) e (2.4) verificamos que a capacitância de um capacitor equivalente a dois capacitores em paralelo será maior que qualquer um deles isoladamente:

$$C_{eq} = \frac{q_1 + q_2}{V} = C_1 + C_2 \tag{4.5}$$

$$C_h = \frac{m_1 + m_2}{H} = C_{h_1} + C_{h_2} \tag{4.6}$$

$C_{eq} > C_1$ e $C_{eq} > C_2$ (4.7) $C_h = \frac{\bar{A}}{g}$, $\bar{A} > \bar{A}_1$ e $\bar{A} > \bar{A}_2$ (4.8)

---

* Não é necessário que tenham capacitâncias diferentes, mas adotamos assim para melhor ilustrar.

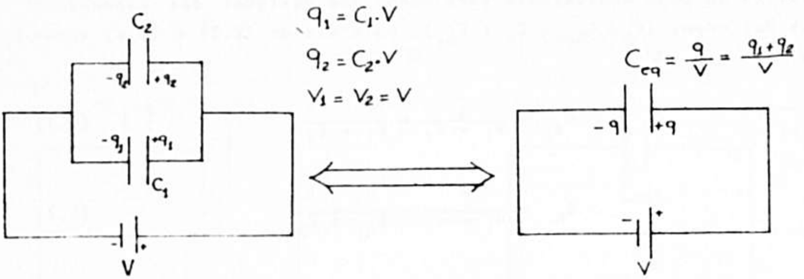


Fig. 4a- Dois capacitores associados em paralelo são equivalentes a um capacitor que armazena uma quantidade de carga igual à soma das cargas ($q = q_1 + q_2$) armazenadas em cada um dos capacitores, quando submetidos à mesma d.d.p. ($V = V_1 = V_2$).

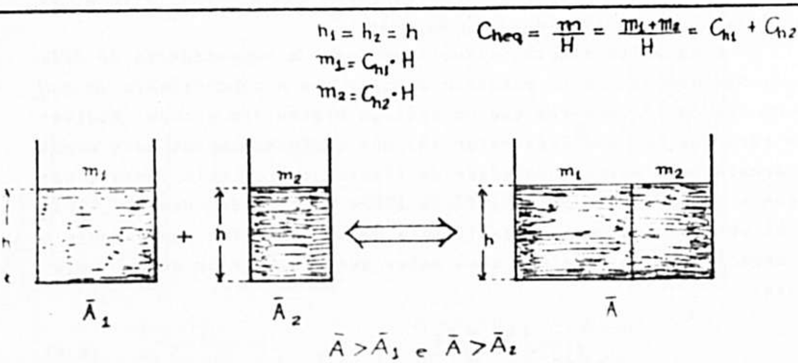


Fig. 4b- O análogo hidráulico do capacitor elétrico equivalente é a substituição de 2 copos com a mesma altura de superfície livre do líquido ($h = h_1 = h_2$), por outro copo equivalente que armazena uma quantidade de líquido igual à soma das quantidades armazenadas nos outros dois ($m = m_1 + m_2$) com a mesma altura (h) da superfície livre do líquido.

5. ENERGIA ARMAZENADA

Armazenar uma certa quantidade de cargas (+q) e (-q) nas placas de um capacitor requer energia de algum agente externo, em geral uma bateria, e esta energia fica disponível no capacitor. Do mesmo modo, encher um copo de líquido requer a ação de um agente externo que eleve a água, até encher totalmente uma altura determinada. Desta forma o líquido fica disponível na forma de uma energia potencial.

Vamos carregar um capacitor, separando de cada vez uma certa quantidade de carga Δq em diferentes d.d.p. do capacitor. Do mesmo modo podemos encher um copo acrescentando pequenas quantidades de líquido de cada vez (Δm), nas diferentes alturas do copo. Deste modo fica então mais simples verificar quanto de energia gastamos para carregar o capacitor (ou encher o copo com líquido), que pela Lei da Conservação da Energia é equivalente à energia que dispomos armazenada no capacitor (ou à energia potencial armazenada no copo com líquido). (Fig. 5a e 5b)

Usando um líquido de densidade ρ (logo $\Delta m = \bar{A}.\rho.\Delta x$), a relação entre energia elétrica potencial (U) e potencial elétrico (V), (2.3) e (2.4), temos:

$$\Delta U = \Delta q.V = \frac{\Delta q.q}{C} \qquad (5.1)$$

e

$$\Delta U_h = \Delta m.g.x = \frac{\Delta m.m}{C_h} \qquad (5.2)$$

O desenvolvimento realizado prescinde do uso de Cálculo Integral, embora seja equivalente ao desenvolvido por (2), por exemplo , e concentraremos nosso raciocínio no análogo hidráulico.

Qual é a quantidade de energia armazenada num copo com líquido até uma certa altura h? Alguns alunos poderão afirmar erroneamente que $U_h = m_o.g.h$ ($m_o = \rho.\bar{A}.h$ = massa total de líquido). A massa líquida pode ser entendida como uma superposição de camadas homogêneas de líquido Δx, que estão em alturas diferentes. Somente a última camada teria energia $\Delta U_f = \Delta m_f.g.h$, e a primeira camada teria energia potencial zero ($x = 0$, adotando como referencial $U_h = 0$ no fundo do copo).

Ao acrescentarmos num certo momento (i) uma quantidade de líquido (ou de carga) Δm_i (ou Δq_i), na altura x_i (ou no potencial V_i), a energia despendida para elevar esta quantidade de líquido (ou de carga) será:

$$\Delta U_i = \frac{q_i.\Delta q_i}{C} \qquad (5.3)$$

$$\Delta U_{h_i} = \frac{m_i.\Delta m_i}{C_h} \qquad (5.4)$$

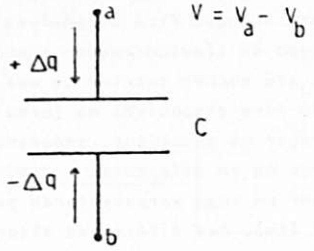


Fig. 5a- Carregando um capacitor temos que separar, a cada momento, uma quantidade de carga Δq, contra uma certa d.d.p. (V é variável), e para isto gastamos uma certa quantidade de e nergia ΔU.

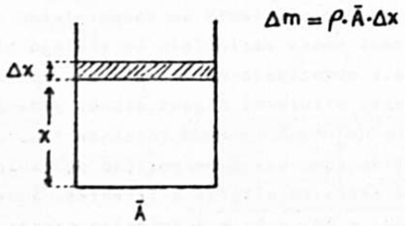


Fig. 5b- Carregar um copo com líquido significa acrescentar camadas Δx de líquido, e para isto gastamos uma energia (ΔU_h) pa ra elevar uma massa de líquido Δm na altura x.

Embora seja possível achar a energia total somando a contribuição de cada camada Δm de líquido, é preferível raciocinar, não em termos da massa de líquido (m e Δm) mas sim da altura da coluna de líquido (x e Δx), de compreensão mais simples e pela relação direta entre as grandezas ($m = \rho.x.\bar{A}$).

Para cada camada de líquido incrementada (Δm) a variação de energia potencial será:

$$\Delta U_{hi} = \frac{x.\Delta x}{C_h^*} = f(x).\Delta x \qquad (5.5)$$

onde

$$C_h^* = C_h/(\rho\bar{A})^2 \quad e \quad f(x) = x/C_h^*$$

O aumento da energia potencial será função linear da altura x da coluna de líquido, $f(x) = x/C_h^*$, e da altura Δx da camada de líquido.

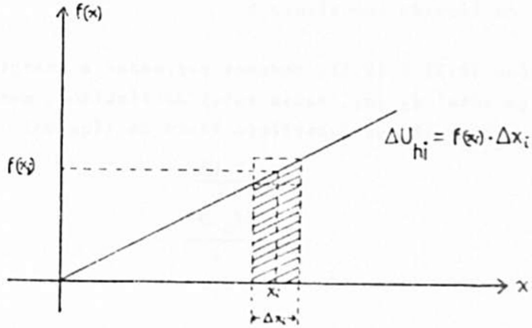


Fig. 6- A variação da energia potencial (ΔU_{hi}) será a área do trapézio ($\Delta U_{hi} = f(x_i).\Delta x_i$) hachurado.

A energia total será a soma de todos os acréscimos de energia ΔU_{hi}. Como as camadas de líquido são homogêneas (Δx_i = constante), podemos escolher Δx de modo que $h = n.\Delta x$ ($n = 1,2,3,\ldots,n$):

$$U_{ht} = \Delta U_{h_1} + \Delta U_{h_2} + \ldots + \Delta U_{hn} = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_{hi} \qquad (5.6)$$

$$n = \frac{h}{\Delta x}, \quad \underline{n} \text{ inteiro}$$

Como a energia total é a soma de todas as áreas, ou seja, é a área do triângulo retângulo limitado por $x = h$ e $f(x)$.

$$U_{ht} = \frac{h.f(h)}{2} = \frac{h^2}{2C_h^*} = \frac{m_0^2}{2C_h} \qquad (5.7)$$

De modo análogo, somando as contribuições das energias elétricas potenciais (5.3):

$$U = \frac{q_0^2}{2C} \qquad (5.8)$$

$$U_h = \frac{m_0^2}{2C_h} \qquad (5.9)$$

q_0 : carga do capacitor com uma d.d.p.

m_0 : massa de líquido com altura h

Usando (2.3) e (2.4), podemos expressar a energia não em termos da carga total q_0 (m_0, massa total de líquido), mas sim da d.d.p. $\underline{V}$ entre as placas (H, da superfície livre do líquido).

$$U = \frac{C.V^2}{2} \qquad (5.10)$$

$$U_h = \frac{C_h.H^2}{2} \qquad (5.11)$$

6. RESUMO

Muitas propriedades dos capacitores elétricos de placas planas e paralelas podem ser analisadas através de um análogo hidráulico. A vantagem do uso de analogias hidráulicas reside na facilidade de percepção de fenômenos simples para explicar propriedades elétricas que exigem maior abstração e modelos mais sofisticados. Para a exposição de fenômenos envolvendo os capacitores, tais como capacitância, dielétricos, associações de capacitores e energia armazenada, o análogo hidráulico proposto pode ser útil, tanto a nível de ensino do 2º grau como nos cursos universitários introdutórios.

Experiências envolvendo o modelo hidráulico podem ser realizadas na própria sala de aula. As dificuldades que os estudantes em geral têm com eletricidade justificam o uso de modelos que podem tornar os fenômenos mais claros.

REFERÊNCIAS

(1) - Iona, Mário-"Teaching Electrical Resistance", Physics Teacher, vol.17, nº 5, may 1979, pg.299.

(2) - Halliday, D. e Resnick, R.-"Física", vol.II-1 - Ed. Livro Técnico.

3) - Irwin Genzer, Phillip Youngner - Physics (Silver Burdett, Morristown).