MOLA VERTICAL NUM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

João Antonio Plascak e Túlio Jorge dos Santos
Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Física - ICEx

I - INTRODUÇÃO

A idéia da presente experiência surgiu do artigo de H.L. Armstrong[1] onde algumas modificações foram feitas, principalmente no aparato experimental. Entre outras coisas será verificada a validade da teoria a ser apresentada com a hipótese da massa não desprezível da mola. Ela está sendo aplicada pelo Departamento de Física da UFMG a alunos que cursam o quarto semestre de graduação em Física, Química, Matemática, Geologia e Engenharia na disciplina de Física Geral III.

A grande maioria dos alunos do ciclo básico na área de ciências exatas já estudaram alguma vez o oscilador harmônico simples, seja no segundo grau em nível elementar, ou mesmo em disciplinas de cálculo, quando se trata de equações diferenciais[2]. Em particular na Física, o sistema massa mola é extremamente importante, pois como se sabe, muitos problemas podem ser reduzidos a osciladores harmônicos. Portanto, esse sistema merece ser estudado com mais detalhe. A nível de graduação, o detalhe principal reside na correção da massa efetiva da mola.

Quando se pergunta a um aluno sobre o período de oscilação de uma massa m suspensa numa mola de constante elástica K, ele certamente responde que

$$T = 2\pi(m/k)^{1/2} \quad . \tag{1}$$

Por conseguinte, se $m=0$ tem-se $T=0$, ou seja, a mola não oscila "sozinha". Colocando-se agora esse aluno diante de uma mola tipo Slinky, ele nota que esta pode oscilar, mesmo sem massa alguma em sua extremidade. Esse fato o induz a perceber que a equação (1) não é de validade geral. Mais ainda, que a mola deve certamente contribuir para o período de oscilação com uma fração de sua massa. Isto significa que a equação acima deve ser melhorada, estudando-se o problema mais detalhadamente.

II - TEORIA[3]

Uma mola de massa M, constante elástica K e comprimento L pode ser imaginada como sendo constituída por um conjunto unidimensional de N massas pontuais de valor M/N, ligadas entre si por minúsculas molas sem massa de constante NK. Quando a mola não se encontra distendida, isto é, quando ela se encontra na horizontal, cada uma dessas massas ocupa uma posição definida no espaço, ficando igualmente espaçadas entre si (figura 1). Fixa-se então uma das extremidades da mola, suspende-se na outra extremidade uma massa m e o sistema é colocado a oscilar na presença do campo gravitacional terrestre (posição vertical). Deseja-se então estudar este sistema na condição em que todas as massas executem um movimento harmônico simples de mesmo período.

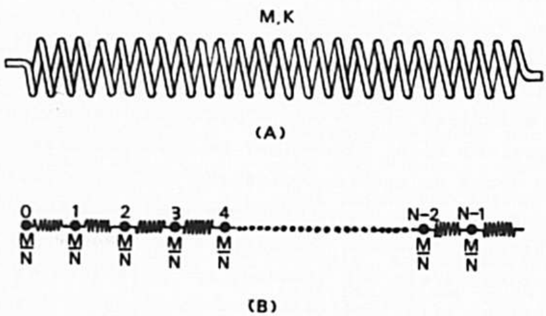

Figura 1 - Mola não distendida. Em (B), todas minúsculas molas sem massa possuem constante NK.

Chamando de S_n o deslocamento da enésima massa pontual em relação à sua posição sem distenção, a força elástica que nela atua é dada por $NK(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n)$, sendo Mg/N a força gravitacional. Logo, a equação diferencial de movimento da enésima massa é dada por

$$\frac{M}{n}\frac{d^2S_n}{dt^2} = \frac{M}{N}g + NK(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n) \quad . \qquad (2)$$

A força elástica para cima que atua no extremo inferior é dada por $NK(S_N - S_{N-1})$ e sua equação de movimento será

$$m \frac{d^2 S_N}{dt^2} = mg - NK(S_N - S_{N-1}) \quad . \tag{3}$$

Para a extremidade superior tem-se

$$S_0 = 0 \quad . \tag{4}$$

(o sentido de g foi considerado positivo).

As equações (2), (3) e (4) formam um conjunto de $N+1$ equações diferenciais de segunda ordem acopladas, que no caso de todas as massas oscilarem com mesmo período possui solução da seguinte forma[4]

$$S_n = A \operatorname{sen} \alpha n \operatorname{sen} \omega t - \frac{Mg}{2N^2 K} n(n+1) + \frac{m+M}{NK} gn \tag{5}$$

onde A, α e ω são constantes.

Introduzindo-se agora a solução (5) em (2) e também em (3), nesta última com $n = N$, obtém-se respectivamente

$$M\omega^2 = 2N^2 K \, (1 - \cos\alpha) \tag{6}$$

$$m\omega^2 \operatorname{sen} \alpha N = 2NK \operatorname{sen} \alpha/2 \cos \alpha (N - 1/2) \quad . \tag{7}$$

A equação (4) é sempre válida.

Como o número de massas pontuais N é uma quantidade arbitrária, não se perde nenhuma generalidade supor que este número é muito grande. Então $1 - \cos\alpha$ na equação (6) deve ser um número muito pequeno, isto é, α é próximo de zero. Tem-se então

$$1 - \cos\alpha \approx \alpha^2/2 = \frac{M\omega^2}{2N^2 K} \quad , \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{N} (M/K)^{1/2} \quad . \tag{9}$$

Substituindo-se a equação (9) em (7), lembrando ainda que $\operatorname{sen} \alpha/2 \simeq \alpha/2$ e $\cos \alpha (N - 1/2) \simeq \cos \alpha N$ obtém-se

$$m\omega^2 \operatorname{sen} \omega (M/K)^{1/2} = \omega K (M/K)^{1/2} \cos \omega (M/K)^{1/2} \quad . \tag{10}$$

da qual resulta

$$\omega (M/K)^{1/2} \operatorname{tang} \omega (M/K)^{1/2} = M/m \quad . \tag{11}$$

Esta é a equação geral que fornece o período de oscilação de um sistema massa mola na presença de um campo gravitacional, se são conhecidos os valores de m, M e K. É interessante notar que aqui, ao contrário do que acontece no caso do pêndulo simples[5], o período independe do valor do campo.

Embora a equação (11) tenha validade geral, ela só admite solução numérica. Entretanto certos casos limites podem ser facilmente analisados.

1º Caso: $M \simeq 0$ (massa da mola desprezível)

Pode-se aqui fazer a seguinte expansão

$$\operatorname{tang} \omega (M/K)^{1/2} \simeq \omega (M/K)^{1/2} + \frac{1}{3} \omega^3 (M/K)^{3/2} \tag{12}$$

Tem-se então

$$\omega^2 \frac{M}{K} + \frac{1}{3} \omega^4 (M/K)^2 = \frac{M}{m} \quad , \tag{13}$$

$$\frac{\omega^2}{K} + \frac{1}{3} \omega^4 \frac{M}{K^2} = \frac{1}{m} \quad . \tag{14}$$

Como $M \simeq 0$ tem-se $\omega \simeq (K/m)^{1/2}$ ou,

$$T = 2\pi (m/K)^{1/2} \tag{1}$$

como era de se esperar.

2º Caso: $M/m \ll 1$ (massa da mola muito menor que a suspensa)

Deve-se ter

$$\omega(M/K)^{1/2} \tan g\, \omega (M/K)^{1/2} \ll 1 \quad , \tag{15}$$

ou seja, a própria tangente deve ser pequena de modo que a expansão (12) e consequentemente a equação (13) são também válidas nesse caso. A equação (13) é uma equação do segundo grau em $\omega^2 M/K$ cuja solução é

$$\omega^2 M/K = \frac{1}{2}\left\{ -3 \pm \sqrt{9 + 12\,\frac{M}{m}} \right\} \quad , \tag{16}$$

onde só o sinal positivo deve ser levado em conta. Nova expansão pode ser feita na raiz, a qual até segunda ordem resulta

$$\omega^2 M/K = \frac{M}{m}\left[1 - \frac{M}{3m}\right] \quad . \tag{17}$$

Pelo teorema binomial, $1 - \frac{M}{3m} \simeq \left[1 + \frac{M}{3m}\right]^{-1}$ então

$$\omega = (K/m)^{1/2}\left[1 - \frac{M}{3m}\right]^{1/2} \simeq (K/m)^{1/2}\left[1 - \frac{M}{3m}\right]^{-1/2} \quad , \tag{18}$$

ou seja,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/3}{K}} \quad . \tag{19}$$

3º Caso: $M/m \gg 1$ (massa da mola muito maior que a suspensa)

A equação (11) pode ser reescrita como

$$\omega(M/K)^{1/2} = \arctan g\, \frac{M}{m\omega}(K/M)^{1/2} \quad . \tag{20}$$

Nessa condição o valor do arco-tangente deve ser próximo de $\pi/2$. Utilizando-se então da aproximação

$$\text{arctang } x \simeq \pi/2 - 1/x \tag{21}$$

tem-se

$$\omega (M/K)^{1/2} \simeq \pi/2 - \frac{m\omega}{M} (M/K)^{1/2} \tag{22}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} (K/M)^{1/2} \left[1 + \frac{m}{M}\right]^{-1} \tag{23}$$

Como $1 + m/M \simeq (1 + 2m/M)^{1/2}$ tem-se

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{K}{M(1 + 2m/M)}} = \frac{\pi}{2^{3/2}} \sqrt{\frac{K}{m + M/2}} \,, \tag{24}$$

ou seja,

$$T = 2^{5/2} \sqrt{\frac{m + M/2}{K}} \,. \tag{25}$$

III - EXPERIÊNCIA

- *Material utilizado*

1. Molas Slinky de aproximadamente 150 gramas. Essas molas são pedaços de mais ou menos 4 centímetros de comprimento que foram obtidas da mola original (danificada), que media cerca de 17 centímetros. É importante que esses pedaços apresentem o mínimo de deformação possível, para garantir a validade da hipótese inicialmente feita na seção II, onde se considera que todas as minúsculas molas possuem mesma constante elástica NK.
2. Massas de 1, 2, 5, 10 gramas.
3. Cronômetro com precisão de décimo de segundo.

4. Sargentos e suportes.
5. Balança.

- *Procedimento*

Fixa-se a extremidade superior da mola no suporte, tomando-se cuidado para que esse ponto não apresente movimento algum. Como essa mola tem uma grande elongação, é preferível, se possível, prendê-la no teto. Para cada uma das massas suspensas em sua extremidade (0-25 gramas) mede-se o correspondente período, cronometrando-se o tempo gasto para o sistema completar, por exemplo, 20 oscilações. É fundamental tomar somente pequenas amplitudes, se bem que elas possam ser aumentadas à medida que a massa na extremidade se torna maior, por exemplo, $\approx 0{,}5$ cm para $m = 0$ até ≈ 3 cm para $m = 25$ gramas. É aconselhável também colocar o sistema para oscilar e iniciar a cronometragem somente algum tempo depois, quando o modo fundamental se torna predominante, isto é, todas espiras da mola oscilam com mesmo período. Como os resultados dependem muito dessas medidas, convém aos alunos praticarem-nas antes do início da experiência.

Uma vez determinado o período T, calcula-se o seu valor ao quadrado T^2 e lança-se os dados como na tabela 1. Constrói-se então um gráfico de $m \times T^2$, o qual determina uma reta. Prolonga-se essa reta até que ela corte o eixo das massas, e desse ponto determina-se o valor da massa da mola. Por último, mede-se a massa da mola numa balança e compara-se os resultados.

- *Comentários*

Mesmo não se conhecendo de início a massa da mola, fica claro que estamos numa região onde o 3º caso da seção II é válido. Portanto, o período de oscilação desse sistema deve ser dado com boa aproximação pela equação (25). Esta, por sua vez, pode ser escrita da seguinte forma

$$m = \frac{K}{2^5} T^2 - \frac{1}{2} M \quad . \tag{26}$$

Não é de se estranhar, portanto, que os pontos do gráfico apareçam alinhados.

Embora fisicamente não haja sentido em se falar em massas negativas, a extrapolação matemática do gráfico obtido experimentalmente, deve equivaler ao valor $M/2$. Tem-se assim o valor da massa da mola.

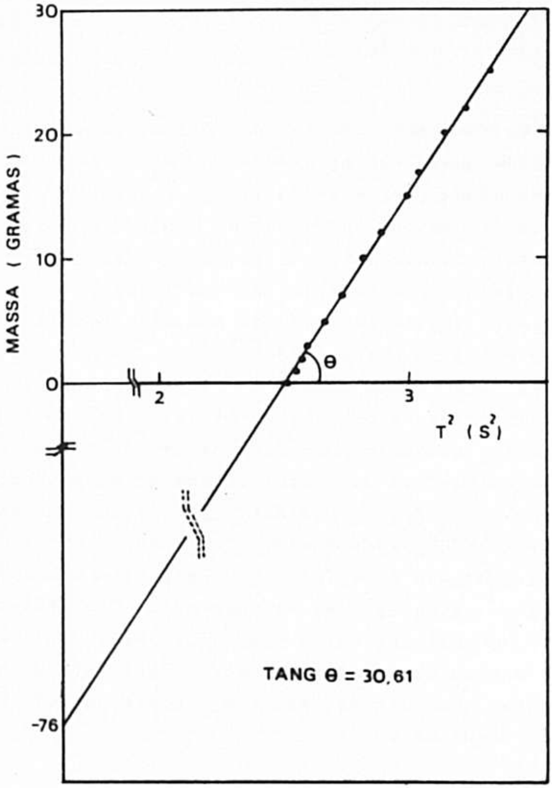

Figura 2 - Gráfico de $m \times T^2$. Os pontos representam os dados experimentais. A curva representa a reta média traçada por esses pontos.

IV - CONCLUSÕES

O aparato experimental da presente experiência é algo simples, e apesar do principal aparelho de medida ser a sensibilidade humana, seus resultados estão bem próximos daqueles previstos pela teoria. A menos do envolvimento matemático para a solução das equações (2), (3) e (4), essa teoria é bastante rica, tornando-se no embrião para o tratamento de dinâmica de uma rede linear, comumente apresentada em cursos de Introdução ao Estado Sólido. Nesse caso basta tomar a equação (2) com $g = 0$ mais o teorema de Bloch e tem-se os resultados diretamente.

- *Resultados*

A tabela 1 mostra os dados obtidos utilizando-se uma mola de massa 148,3 gramas. Por extrapolação da reta obtida no gráfico da figura 2 obtém-se para a massa efetiva da mola o valor de 76,0 gramas, ou seja, $M = 152,0$ gramas. A discrepância entre esses dois resultados é de cerca de 2,5% [6].

massa (g)	tempo (20 osc.) (s)	T (s)	T^2 (s^2)	ΔS_N (cm)
0	31,7	1,58	2,51	0
1	31,8	1,59	2,54	1,1
2	32,0	1,60	2,57	2,2
3	32,1	1,61	2,59	3,1
5	32,6	1,63	2,66	5,3
7	33,0	1,65	2,73	7,5
10	33,5	1,68	2,82	10,5
12	34,0	1,70	2,89	12,7
15	34,6	1,73	3,00	16,1
17	34,8	1,74	3,04	17,9
20	35,5	1,77	3,15	21,0
22	36,0	1,80	3,24	23,1
25	36,5	1,82	3,33	26,2

Tabela 1 - A segunda coluna corresponde a uma média sobre três medidas consecutivas do tempo de 20 oscilações. Com relação à última coluna, veja apêndice.

V - APÊNDICE

Quando $A = 0$ na equação (5) tem-se o caso de uma deformação pura, sem oscilação. Então, o deslocamento da extremidade inferior da mola é dada por

$$S_N = (m + M/2)\,\frac{g}{K} \quad . \tag{27}$$

Portanto, se $m = 0$ a mola sofre uma deformação devida a uma força igual à metade de seu peso, o que equivale dizer que sua massa efetiva é $M/2$, concordando, naturalmente, com a equação (25). Entretanto, se duas massas diferentes, m_1 e m_2, são colocadas na extremidade, a diferença na deformação é dada por

$$\Delta S_N = (m_2 - m_1)\, g/K \quad , \tag{28}$$

o que está de acordo com o modo usual de se encontrar a constante elástica de uma mola. Pode-se então fazer a seguinte extensão na experiência: para cada massa colocada na extremidade da mola, mede-se também a deformação ΔS_N por ela sofrida, em relação à posição de sua extremidade quando sem massa; para isso, basta colocar uma régua em paralelo com a mola; constrói-se então um gráfico de $m \times \Delta S_N$ e através de sua declividade obtém-se o valor do K; este, por sua vez, pode ser também obtido do gráfico 1, e os resultados comparados.

O valor obtido para a constante elástica da mola através da medida direta do ΔS_N (figura 3) foi $K = 0{,}94$ N/m, e o obtido do gráfico da figura 2 foi $K = 0{,}98$ N/m, havendo uma discrepância de cerca de 4% entre esses dois resultados.

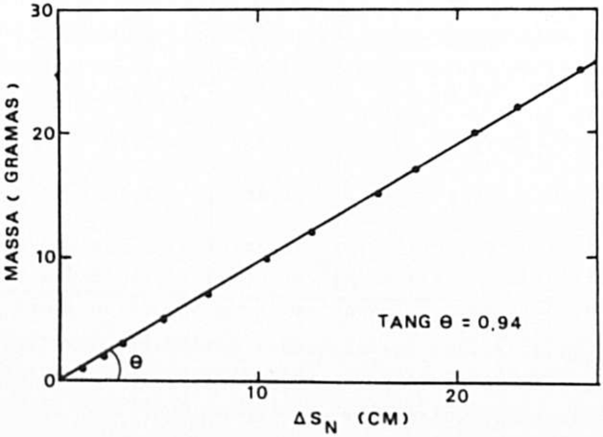

Figura 3 - Gráfico de $m \times \Delta S_N$. Idem à figura 2.

REFERÊNCIAS

1. H.L. ARMSTRONG, Am. J. Phys. 37, 447 (1969).

2. O tópico de oscilações mecânicas é ministrado aos alunos de graduação da UFMG no curso de Física Geral III no quarto semestre. Neste ponto eles já estudaram equações diferenciais em cursos de cálculo.

3. A fim de que o presente artigo seja auto-suficiente, incluímos nesta seção todas as considerações feitas por H.L. Armstrong[1].

4. Esta solução é dada sem prova. Acreditamos ser suficiente aos alunos trabalharem com ela obtendo as equações (6) e (7).

5. ANTONIO A.S. BRITO, Revista de Ensino de Física 1, 14 (1979).

6. No desenvolvimento experimental da condição expressa no segundo caso onde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M/3}{K}}$$

esbarra-se em algumas dificuldades advindas do próprio fato da massa da mola ser muito menor que as massas suspensas, para as quais se mede o período. A mais importante delas é que a reta obtida corta o eixo das massas muito próximo da origem.