

## PENETRAÇÃO DE BARREIRAS POR ONDAS ELETRÔMAGNÉTICAS

Otaviano Helene

Instituto de Física da USP

Quando a luz, propagando-se em um meio, encontra a superfície de separação de outro meio menos refringente, pode não haver refração. Isso ocorre quando o ângulo de incidência é maior que determinado ângulo crítico. Uma exploração mais cuidadosa desse efeito mostra que há uma penetração dos campos no meio menos refringente, por uma distância comparável ao comprimento de onda. Vamos aqui descrever esse fenômeno e apresentar resultados experimentais que o comprovam.

### a) Ângulo crítico de refração

A figura 1 ilustra o fenômeno da reflexão e refração da luz na superfície de separação entre dois meios. As leis cinemáticas que governam esse fenômeno são:

- ângulo de incidência,  $\theta_i$ , é igual ao ângulo de reflexão  $\theta_r$ ;
- a relação entre os ângulos de incidência e de refração é dada pela lei de Snell,

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração dos meios, como mostrado na figura 1.

A figura 1 foi feita supondo-se  $n_1 > n_2$  de tal forma que a luz refratada se afasta da normal ao plano de incidência, ou seja,  $\theta_r > \theta_i$ . Essa situação ocorre, por exemplo, quando a luz propagando-se na água encontra a superfície desta, passando para o ar.

Usando a lei de Snell podemos escrever

$$\sin \theta_r = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (2)$$

No caso em que  $n_1 > n_2$ , existe um ângulo de incidência,  $\theta_c$ , menor que  $90^\circ$ , para o qual

$$\text{sen } \theta_r = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_c = 1 \quad (3)$$

Se a incidência ocorre em um ângulo maior que  $\theta_c$ , dado por esta última equação, a lei de Snell indicaria um ângulo de refração,  $\theta_r$ , para o qual

$$\frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r > 1 \quad (4)$$

Este resultado é normalmente interpretado argumentando-se que o seno de um ângulo ser maior que 1 corresponde a um situação não física e, portanto, não há refração.

Interpretações mais amplas da fórmula (4) mostram um resultado interessante de penetração dos campos no meio menos refringente, só que não mais campos oscilatórios, mas campos que decrescem exponencialmente à medida que se afasta da superfície de separação.

#### b) Descrição dos campos

A dependência espacial dos campos que formam uma onda eletromagnética é da forma

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (5)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda e  $\vec{r}$  a posição. O coeficiente de proporcionalidade depende do campo que se está representando e de sua amplitude. O vetor de onda  $\vec{k}$  tem o módulo igual ao número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

e direção e sentido correspondentes à direção e sentido da propagação da luz.

Usando os eixos  $x$  e  $y$  indicados na figura 1 temos para luz refratada no meio com índice de refração  $n_2$ ,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kx \cos \theta_r - ky \text{ sen } \theta_r \quad (6)$$

Os valores de  $\cos \theta_r$  e  $\text{sen } \theta_r$  podem ser relacionados com o ângulo de incidência  $\theta_i$ , usando-se a equação (2):

$$\text{sen } \theta_r = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_i \quad (2)$$

$$\cos \theta_r = \left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \quad (7)$$

Podemos substituir esses valores na equação (6) e em seguida na equação (5),

$$e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i \{ k_x \left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} - k_y \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \}} \quad (8)$$

Quando o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico  $\theta_c$ , teremos que

$$\left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} = i \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i - 1 \right]^{1/2} \quad (9)$$

é um número imaginário.

Substituindo esta última relação na equação (8), obtemos uma dependência espacial para os campos, no meio menos refringente, da forma

$$e^{-k_x \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i - 1 \right]^{1/2}} \cdot e^{-i k_y \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i} \quad (10)$$

Este resultado é obtido em diversos livros de eletrodinâmica (ref. 1 e 2). Dessa forma a "onda" refratada não é mais uma onda oscilante mas uma onda oscilante na direção  $y$  e atenuada exponencialmente na direção  $x$ . A figura 2 ilustra este resultado. Seria este um resultado físico ou um erro grosseiro onde estamos considerando disfarçadamente um seno maior que 1 e, como consequência, um cosseno imaginário?

O melhor jeito de responder a esta questão é realizarmos uma experiência que seja sensível à existência desses campos atenuados exponencialmente. Mas antes disso vamos discutir o resultado da equação 10.

Podemos avaliar qual a distância de penetração dos campos no "meio proibido". O coeficiente da exponencial real da equação 10 pode ser aproximado: o radicando é tipicamente da ordem de 1 e  $k$  aproximadamente da ordem de  $1/\lambda$ . Assim, temos

$$k \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i - 1 \right]^{1/2} \approx \frac{1}{\lambda} \quad (11)$$

Dessa forma, a uns poucos comprimentos de onda afastados da superfície de separação, os campos já estariam fortemente atenuados. No caso de luz visível,  $\lambda \approx 5.10^{-7}$  m, a atenuação quase completa dos campos ocorreria alguns milionésimos de metro afastado da superfície.

Um cálculo mais detalhado mostra também que, embora havendo campos elétrico e magnético no meio menos refringente, não há fluxo de energia atravessando a superfície de separação (ref. 1).

### c) Penetração de barreiras

A figura 3 mostra um arranjo no qual existem dois meios com mesmo índice de refração, separados por um meio com índice de refração menor.

Se a distância de separação entre os dois dielétricos de mesmo índice de refração for suficientemente grande (comparada com o comprimento de onda da radiação) e a incidência de luz na região central ocorrer a um ângulo maior que o ângulo crítico, os campos estarão já suficientemente atenuados no outro lado do meio menos refringente. (Este caso extremo corresponde à figura 3a). Neste caso, certamente não haverá campos depois da barreira.

Se os dois dielétricos de mesmo índice de refração estiverem suficientemente próximos um do outro, comparado com  $\lambda$ , então a onda poderá não "perceber" essa separação. Este caso deve ocorrer quando, por exemplo, a distância entre os dois dielétricos for comparável com a distância entre os átomos de cada um dos dielétricos. Este caso corresponde à figura 3b. Aqui, certamente, há fluxo de energia através da superfície de separação.

A medida que variamos a distância entre os dois meios podemos passar continuamente de um caso extremo a outro descrito acima. Se medirmos que fração de energia consegue atravessar a região entre os dois meios, observaremos que essa quantidade diminui à medida que aumentamos a distância entre eles. Há então um fenômeno de penetração de barreira tão mais intenso quanto menor for a barreira a ser atravessada.

### d) Experimental

Observarmos a penetração de barreira com luz visível seria extremamente difícil. Um afastamento de poucas micras entre os dois meios de mesmo índice de refração seria suficiente para tornar impossível, com arranjos experimentais simples, uma medida quantitativa.

Na experiência realizada utilizou-se onda eletromagnética de comprimento de onda de aproximadamente 3cm.

A figura 4 mostra o arranjo experimental, semelhante ao sugerido na ref. 2. A região entre os dois prismas é a região na qual a onda é atenuada exponencialmente, quando o ângulo de incidência é maior que o ângulo crítico, e onde, com a descrição da lei de Snell, não deveria penetrar.

O equipamento usado foi um conjunto transmissor-receptor de microondas Sargent-Welch. O receptor é dotado de um medidor de potência recebida. Os prismas usados são de parafina. O instrumental pertence a parte do Laboratório de Estrutura da Matéria e parte da Prateleira de Demonstração do IFUSP.

O comprimento de onda foi determinado experimentalmente, obtendo-se o valor  $(2,9 \pm 0,1)$  cm, correspondendo a uma frequência de  $(10,3 \pm 0,3) \cdot 10^9$  Hz. O índice de refração dos prismas, para essa frequência, também foi medido experimentalmente obtendo-se o valor  $1,42 \pm 0,07$ .

O ângulo de incidência da onda na superfície entre o primeiro prisma e a região entre os prismas foi de  $(57,2 \pm 1,0)^\circ$ , maior que o ângulo crítico de  $(44,8 \pm 3,0)^\circ$ .

A tabela 1 e a figura 5 apresentam os resultados obtidos. À medida que a distância entre os dois prismas era aumentada, a potência transmitida diminuía. Não foi possível, com o detetor utilizado, medir qualquer potência transmitida para distâncias de afastamento entre os dois prismas maiores que 3 cm.

## e) Discussão

Os resultados experimentais estão de acordo com as previsões teóricas de uma atenuação dos campos à medida que penetram em um meio menos refringente, quando a incidência ocorre a um ângulo maior que o ângulo crítico dado pela lei de Snell.

No caso de penetração de barreira um cálculo detalhado da potência transmitida, em função da distância de separação entre os dois meios, deve ser feito considerando-se as condições de contorno exigidas para os campos nas superfícies de separação. Diversos autores têm estudado o fenômeno e testado expressões teóricas para a potência transmitida. As referências 3, 4 e 5 são sobre trabalhos a respeito deste assunto.

Medidas de penetração de barreira usando-se luz visível exigem um aparato experimental bastante sofisticado. Ditchburn (ref. 6) apresenta dois arranjos para medidas com luz visível e discute algumas dificuldades experimentais e interpretações teóricas do fenômeno. As referências 3 e 4 são de experiências com luz visível e a referência 7 com microonda.

Os resultados experimentais apresentados aqui são suficientes para comprovar a existência do efeito. Os erros experimentais são, principalmente, devido a problemas com difração. Esses problemas poderão ser contornados usando-se prismas de dimensões bem maiores que os usados de forma que seja possível conseguir-se ondas planas sem que efeitos de difração possam perturbar os resultados.

A penetração de barreiras por ondas eletromagnéticas é semelhante ao efeito de penetração de barreiras previsto pela mecânica quântica (efeito túnel). Neste caso, partículas que classicamente não poderiam ser encontradas em determinada região, por terem energia total menor que a energia potencial dessa região, podem atravessá-la. Neste caso o comprimento de onda de de Broglie faz o mesmo papel que o comprimento de onda de ondas eletromagnéticas; há uma penetração em uma região proibida da ordem de grandeza do comprimento de onda da partícula. Embora não possa ser feita uma medida direta do efeito túnel, como a que fizemos aqui com ondas eletromagnéticas, este fenômeno é responsável pela explicação e entendimento de diversos resultados como, por exemplo, o decaimento  $\alpha$  de alguns núcleos radioativos. A penetração de barreiras por ondas eletromagnéticas é usada frequentemente como recurso educacional para ilustração do efeito túnel.

Distância entre os prismas (cm)	Potência recebida (unidade relativa)
0,00	100,0 (0,6)
0,50	49,0 (1,4)
0,75	31,9 (1,4)
1,00	18,4 (0,5)
1,50	4,7 (0,6)
2,00	1,5 (0,5)
2,50	1,2 (0,3)

Tabela 1 - Potência recebida em função da distância de separação dos dois prismas. Entre parênteses está indicado o desvio padrão de uma série de medidas.

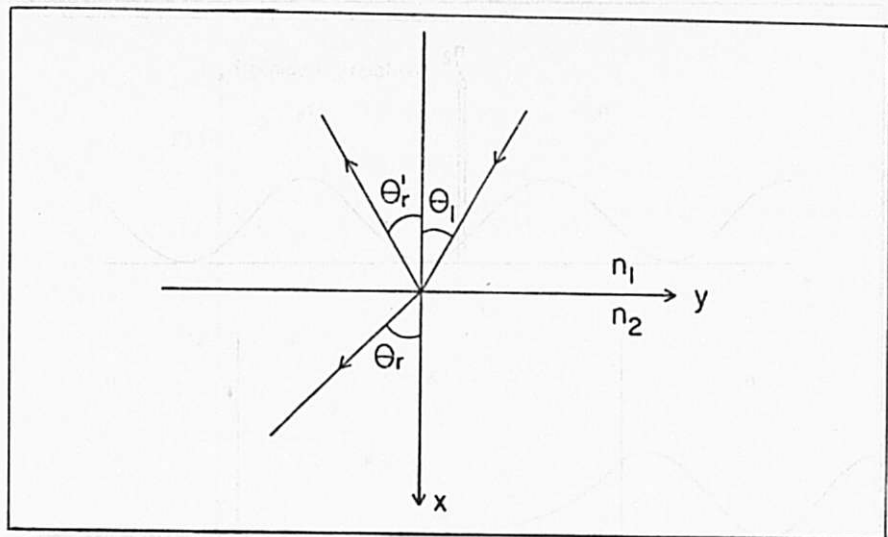


Figura 1 - Reflexão e refração de luz na superfície de separação entre dois meios. A figura foi feita para  $n_2 < n_1$ .

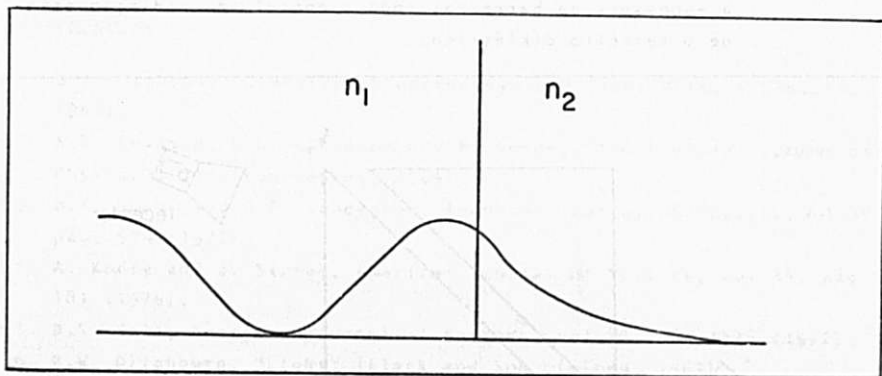


Figura 2 - Quando a incidência ocorre a um ângulo maior que o ângulo crítico, os campos que penetram no meio menos refringente decrescem exponencialmente à medida que se distanciam da superfície de separação.

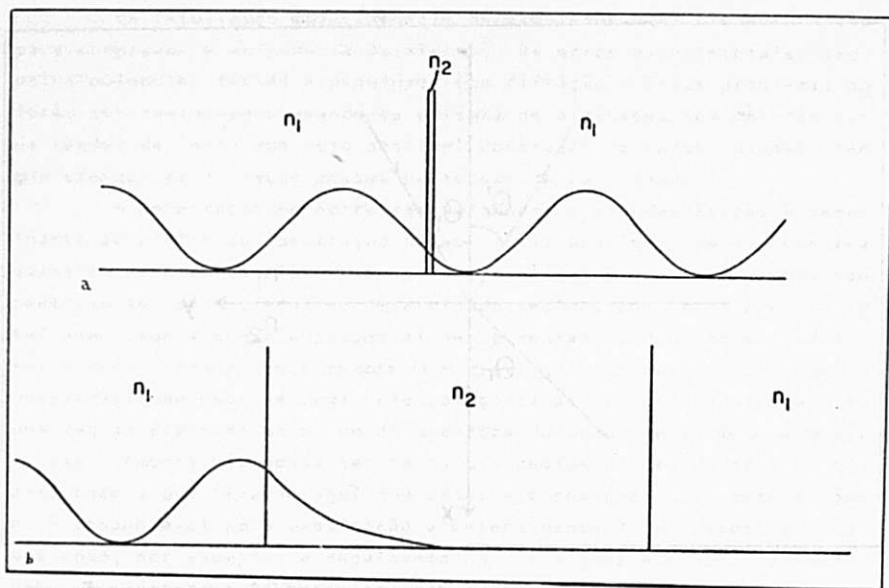


Figura 3 - Penetração de barreira por onda eletromagnética. (a) Se a espessura da barreira é bem maior que o comprimento de onda da radiação não há fluxo de energia, pois os campos ao atingirem o terceiro meio são praticamente nulos. (b) No outro extremo, quando o comprimento de onda é bem maior que a espessura da barreira, toda a energia da radiação atinge o terceiro dielétrico.

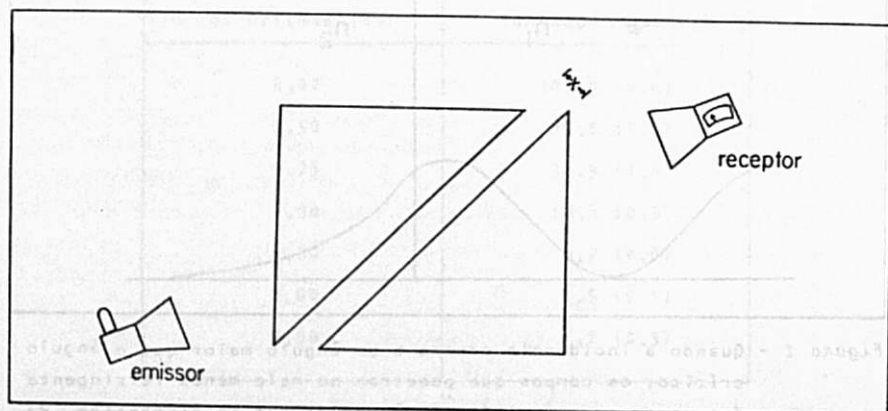


Figura 4 - Esquema experimental utilizado. A potência recebida pelo detector decai à medida que afastamos os dois prismas. O receptor é dotado de um indicador de potência recebida.



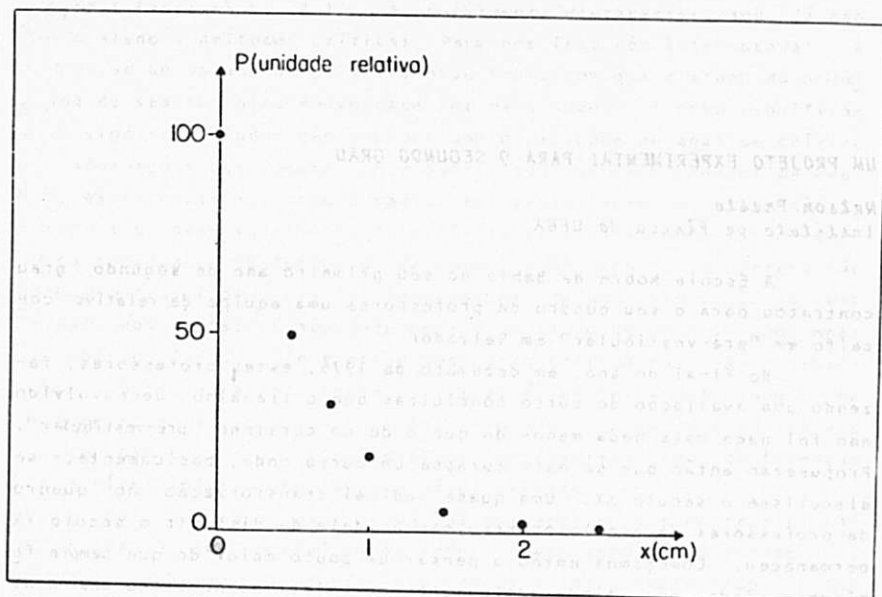


Figura 5 - Potência recebida pelo detector em função da distância entre os prismas.

#### REFERÊNCIAS

1. J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics" (John Wiley & Sons, Inc, 1967).
2. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", (Addison-Wesley, 1964).
3. M.K. Hondy and G.F. Landegren, American Journal of Physics, vol.45 pág. 574 (1977).
4. A. Kodre and J. Strnad, American Journal of Physics, vol.44, pág. 181 (1976).
5. D.S. Gale, American Journal of Physics, vol.40, pág.1038 (1972).
6. R.W. Ditchburn, "Light" (Black and Son Limited, 1963).
7. J.J. Hupert and G. Ott, American Journal of Physics, vol.34, pág. 260 (1966).