Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 4, p. 625 - 627, (2005)
www.sbfisica.org.br

Dimensionamento simplificado de uma linha de distribuição eléctrica em corrente contínua

(Simplified dimensioning of a continuous electric power line)

Armando Vieira[1]

Instituto Superior de Engenharia do Porto, R.S. Tomé, Porto, Portugal

Recebido em 25/10/2004; Revisado em 10/8/2005; Aceito em 14/9/2005

Neste trabalho é calculada a tensão e resistência equivalente ao longo de uma linha eléctrica em corrente contínua alimentando N cargas equidistantes. É obtida uma expressão simples recorrendo à aproximação de linha contínua e considerando a resistência do fio pequena quando comparada com as cargas.

Palavras-chave: linha eléctrica, circuitos eléctricos, aproximação linha contínua.

In this work we calculate the tension and equivalent resistance on a electric line feeding N equidistant loads resistances with continuous current. We obtain simple expressions using the approximation of a continuous line and considering the cable resistance small compared with the load resistance.

Keywords: electric power line, electric circuits, continuous approximation.

1. Introdução

Muitos manuais universitários apresentam circuitos eléctricos relativamente simples que servem para ilustrar princípios importantes que permitem a sua resolução, como seja o teorema de Thévenin. Contudo, os problemas reais, mesmo os mais simples, raramente podem ser solucionados de uma forma directa com base nestes circuitos simplificados.

Para estes casos é frequentemente necessário recorrer a simulações computacionais que, embora fiáveis e rápidas, apresentam a desvantagem do aluno perder sensibilidade para os parâmetros essenciais do problema bem como dificultando a aquisição de uma perspectiva global que lhe permita extrapolar os conhecimentos para situações análogas.

Neste trabalho é resolvido, de uma forma aproximada, o problema de uma linha de distribuição eléctrica, alimentada por uma fonte de tensão V alimentando N resistências de carga, R_2, dispostas em paralelo e ligadas entre si através de um cabo uniforme com resistência não nula. A solução obtida é simples o que permite uma compreensão clara da importância de cada pârametro no problema. Serão feitas aplicações a dois casos práticos: linha de baixa-tensão e linha de média-tensão.

2. Problema

Uma linha de distribuição eléctrica, alimentada por uma fonte de tensão V alimenta N resistências de carga, R_2, dispostas em paralelo e ligadas entre si através de um cabo uniforme. Se as cargas forem equidistantes e entre cada uma existir uma resistência R_1, correspondente ao troço de fio que as une, determinar a tensão V^i aos terminais de cada carga R_2^i.

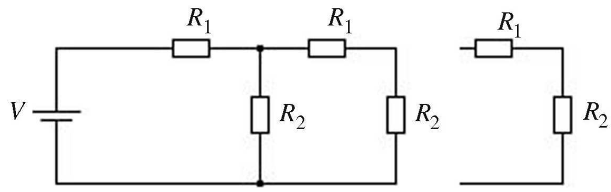

Figura 1 - Esquema de uma rede de distribuição de energia eléctrica.

A solução deste problema é obtida a partir de um equivalente de Thévenin do circuito do ponto de vista dos terminais de cada resistência R_2. Começando com uma única carga, vão-se adicionando troços compostos por um par R_1 e R_2, como indica a Fig. 1, de forma a obter-se a seguinte equação recorrente para a tensão e resistência de Thévenin ao fim de cada troço i:

$$V^{i+1} = \frac{R_2 V^i}{R_1 + R_2 + R^i}, \quad \text{e} \tag{1}$$

[1]E-mail: armando.vieira@netcabo.pt.

$$R^{i+1} = \frac{R_2(R^i + R_1)}{R_1 + R_2 + R^i}. \quad (2)$$

A solução do problema pode ser facilmente obtida através de iterações múltiplas. Porém este procedimento, embora computacionalmente simples, apresenta a desvantagem de ser pouco elucidativo, além de não permitir uma interpretação analítica simples. Na verdade, a resolução deste problema só é possível usando uma abordagem matricial com um número de equações igual ao número de cargas.

Vamos obter uma representação contínua do problema para depois o resolver aproximadamente. Tendo em conta que R_1 é pequeno, podemos aproximar a Eq. (2) pela seguinte expressão válida para $R_1 + R^i << R_2$:

$$R^{i+1} \approx R^i + R_1 - \frac{(R^i + R_1)^2}{R_2}. \quad (3)$$

Usando a aproximação de uma linha contínua, esta relação pode ser escrita como uma equação diferencial:

$$\frac{dR(x)}{dx} = R^{i+1} - R^i = R_1 - \frac{(R(x))^2}{R_2}, \quad (4)$$

em que x é uma variável contínua que quantifica a distância entre as cargas R_2. Os termos R_1 e R_2 passam a ser interpretados como resistências por unidade de comprimento. A Eq. (4) admite como solução:

$$R(x) = \sqrt{R_1 R_2} \tanh\left(\sqrt{R_1/R_2}x\right). \quad (5)$$

Podemos observar que para $\sqrt{R_1/R_2}x >> 1$ a resistência equivalente tende para um valor assimptótico:

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (6)$$

Este resultado estabelece que a resistência equivalente do circuito tende para um valor constante, o que é, de certa forma, contra-intuitivo. Contudo ele pode ser compreendido se atendermos ao caso em que todas as resistências possuem valores idênticos $R_1 = 1\ \Omega$ e $R_2 = 2\ \Omega$, com excepção da última $R_2^N = 1$. Nesta topologia, pode verificar-se facilmente que a resistência equivalente do ponto de vista da fonte é de $1\ \Omega$, e independente do número de cargas.

Por outro lado, quando $\sqrt{R_1/R_2}x << 1$, e dado que $\tanh(x) \sim x$, para x pequeno, podemos escrever:

$$\underset{x \to 0}{R(x)} = R_1 x. \quad (7)$$

Vamos agora estudar a tensão ao longo da linha. Para R_1 pequeno é igualmente válida a seguinte aproximação:

$$\frac{dV(x)}{dx} = V^{i+1} - V^i \approx -\frac{(R_1 + R(x))}{R_2} V(x). \quad (8)$$

Em que $R(x)$ é dado pela Eq. (5). Esta equação é difícil de resolver. Contudo, se considerarmos que a variação de $R(x)$ é pequena comparada com a variação da tensão, podemos resolvê-la facilmente:

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{R_1 + R(x)}{R_2} x}. \quad (9)$$

Para $\sqrt{R_1/R_2}x >> 1$, fica

$$V(x) = V_0 e^{-\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} x}. \quad (10)$$

Enquanto que na proximidade da fonte, ou seja para $\sqrt{R_1/R_2}x << 1$, recorre-se à aproximação (7) obtendo:

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{R_1(1+x)}{R_2} x}. \quad (11)$$

A Fig. 2 mostra que a aproximação usada pela abordagem analítica é razoável.

O problema fica assim completamente resolvido. Com ajuda da Eq. (11) podemos calcular sem dificuldade quantas cargas podem ser alimentadas por uma linha de tensão. Vamos considerar dois exemplos: um circuito de baixa-tensão e outro de média-tensão.

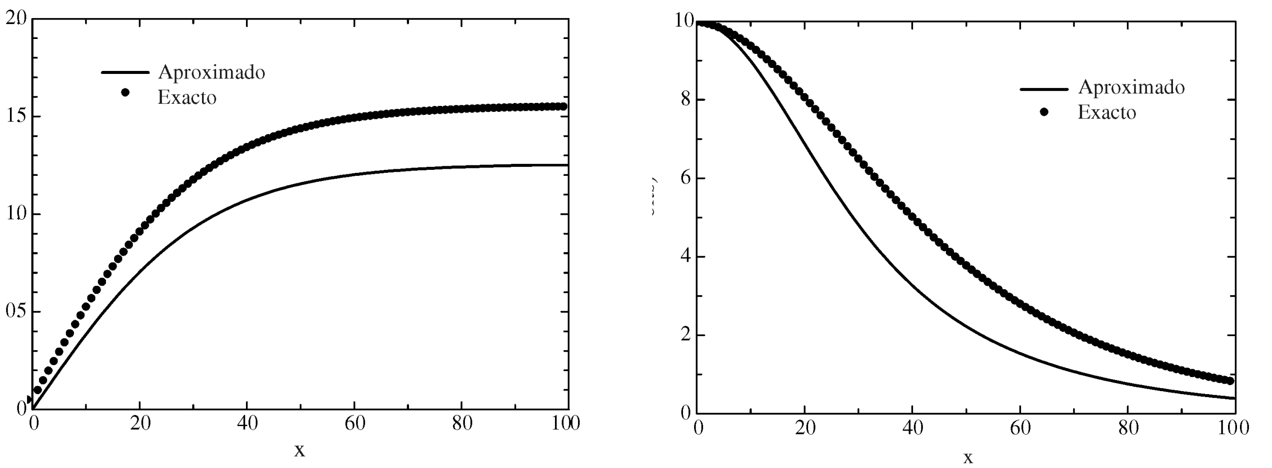

Figura 2 - Resistência R e tensão V em função da posição x para $V_0 = 10$ V, $R_1 = 0.05\ \Omega$ e $R_2 = 50\ \Omega$. Comparação dos valores exactos e aproximados.

2.1. Exemplo 1: Baixa-tensão

Se usarmos um fio de cobre com 6 mm^2 de secção que alimenta várias casas separadas por uma distância de 100 m obtemos R_1= 0.05 Ω. Se a tensão for de 220 V e cada casa consumir 1 kW, então R_2 deve ser cerca de 50 Ω. Em termos práticos pretende-se determinar quantas casas se podem alimentar com esse fio para que o valor da tensão não desça a menos de 90% do valor da fonte, ou seja, cerca de 200 V.

Resolvendo a Eq. (11), fica:

$$-\ln(0.9)\frac{R_2}{R_1} = x(1+x) \approx x^2, \tag{12}$$

ou seja,

$$x = \sqrt{0.1 R_2/R_1}. \tag{13}$$

Para este caso obtemos $x = 10$, ou seja 10 casas. A simplicidade da expressão 13 ajuda a obter resultados gerais e imediatos para qualquer sistema, bastando ajustar os valores das resistências de carga e do fio. Podemos saber, por exemplo, que ao duplicarmos o diâmetro do fio, R_1 diminui quatro vezes e o valor de x duplica. Neste caso passaríamos a poder alimentar 20 casas. Da mesma forma se a potência consumida em cada casa duplicar R_2 passa a metade e o número de habitações servidas será apenas de $10/\sqrt{2} = 7$.

2.2. Exemplo 2: Média-tensão

Ao usar média-tensão, podemos reduzir drasticamente a corrente que circula na linha. Em termos do circuito equivalente, isso significa que R_2 assume valores maiores. Por exemplo, se usarmos um cabo de cobre com uma área de 20 mm^2 e a tensão for $V_0 = 20$ kV, supondo que cada carga consome uma potência de 1 MW equidistantes de 1 km, obtemos $R_1 = 0.15$ Ω e $R_2 = 400$ Ω. Neste caso $R_2/R_1 = 2666$ e $x = 16$. A linha poderá então suportar um total de 16 MW, ou seja, uma corrente de 800 A, embora na prática um cabo com esta secção não transporte mais que algumas centenas de amperes.

Podemos calcular a potência máxima dissipada na linha:

$$P_{dissipada} = \int R(x)I(x)^2 dx = 0.88 \text{ MW}, \tag{14}$$

ou seja cerca de 5.5 % da potência transportada.

Em conclusão, apresentámos uma solução simplificada de um problema complexo e de extrema utilidade no dimensionamento de linhas de potência eléctrica.

Referências

[1] C.R. Paul, S.A. Nasar and L.E. Unnewehr, *Electric Engineering* (McGraw-Hill, New York, 1992), 2^a ed.

[2] Martin A. Plonus, *Applied Electromagnetics* (McGraw-Hill, New York, 1978).

[3] D. Shirmohammadi and H.W. Hong, IEEE Transactions on Power Delivery **4**, 1492 (1989).