

Um experimento simples usado na produção de placas de zonas de Fresnel

(A simple experiment used in the production of Fresnel zone plates)

Márcia Muller¹, Jean Carlos Cardozo da Silva e José Luís Fabris

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 7/7/2005; Aceito em 23/8/2005

Neste trabalho propomos um experimento simples que tem por finalidade auxiliar no aprendizado dos fenômenos de interferência e difração da luz. Após uma análise pertinente da teoria de Fresnel da difração, os conhecimentos são aplicados na compreensão do funcionamento das placas de zonas de Fresnel. Apresentamos uma descrição detalhada dos processos usados para a fabricação e caracterização destas placas zonais, o que possibilita a produção de lentes difrativas com a distância focal desejada para um dado comprimento de onda de operação. As placas zonais produzidas e caracterizadas no trabalho atuam como lentes positivas com distâncias focais variando entre 8 e 50 cm para luz visível com comprimentos de onda compreendidos entre 630 e 680 nm de um apontador laser.

Palavras-chave: placa de zonas de Fresnel, difração de Fresnel.

In this work we present a simple experiment that may be used to help in the learning of interference and diffraction of light. After an analysis of the Fresnel diffraction theory, the concepts are applied in the understanding of the working principle of the Fresnel zone plates. We present a detailed description of the process used in the production and characterization of the devices, allowing making diffractive lenses with the required focal length for a specific wavelength of operation. The zonal plates produced in this work behave like positive lenses with focal lengths in the range from 8 to 50 cm for light with wavelengths from 630 to 680 nm of a laser pointer.

Keywords: Fresnel zone plates, Fresnel diffraction.

1. Introdução

O trabalho de Augustin Jean Fresnel (1788-1827) sobre a difração de ondas apresentado para a Academia de Ciências da França em 1818 foi de suma importância para a aceitação da teoria ondulatória da luz. Após esta data foram realizadas e explicadas com sucesso uma série de observações relacionadas com os fenômenos de interferência e difração das ondas luminosas, e passaram a ser produzidos dispositivos, componentes e equipamentos ópticos buscando aplicações tecnológicas [1]. A aplicação da óptica física à engenharia levou ao surgimento de novas áreas de conhecimento como a fotônica [2] e a holografia [3]. A placa de zonas de Fresnel é um exemplo de componente óptico que faz uso do fenômeno da difração das ondas luminosas, e cujo funcionamento é descrito pelo princípio de Huygens – Fresnel para a propagação da luz. Placas de zonas de Fresnel produzidas de forma semelhante a proposta neste trabalho são utilizadas por fotógrafos para produzir fo-

tografias artísticas sem lente [4]. Nesta aplicação a placa substitui o *pinhole* que é normalmente usado. Uma das vantagens de se usar a placa no lugar do *pinhole* é a maior intensidade de iluminação fornecida, o que reduz o tempo de exposição. As placas também são utilizadas como lentes para focalizar radiação pertencente a regiões do espectro eletromagnético nas quais os materiais tradicionalmente usados na fabricação de lentes não são completamente transparentes. Como exemplo podemos citar a região dos raios-x aonde, nas espessuras requeridas para as lentes, estes materiais seriam capazes de absorver completamente a radiação incidente. É nesta região do espectro que as placas zonais fornecem a maneira mais econômica, simples e eficiente de focalização. As placas de zonas de Fresnel são empregadas em telescópios astronômicos e em microscópios de raios-X [5]. As placas apresentam ainda a vantagem da possibilidade de uso tanto para focalizar um dado comprimento de onda quanto para filtrar radiação indesejada, uma vez que elas focalizam luz de diferentes

¹E-mail: marcia@cefetpr.br.

comprimentos de onda em diferentes distâncias.

Embora exista uma vasta gama de aplicações envolvendo os fenômenos descritos pela óptica física, os professores costumam encontrar certa resistência por parte dos alunos quando o assunto é abordado. Isto acontece devido não só a complexidade e dificuldade de visualização dos fenômenos físicos, mas principalmente devido à falta de exemplos sobre aplicações práticas destes conhecimentos. Para tentar contornar as dificuldades com as quais os professores se deparam no ensino da óptica física, sugerimos um experimento que pode ser facilmente desenvolvido pelos alunos e que requer a compreensão dos fenômenos de interferência e difração e da teoria de Fresnel para a propagação da luz.

2. Teoria

A difração é um fenômeno característico do comportamento ondulatório e ocorre sempre que uma porção de uma frente de onda, seja ela sonora, de luz ou de matéria, é obstruída. No trabalho sobre a difração, Fresnel fez algumas modificações no princípio de Christian Huygens (1629-1695) para a propagação das ondas, levando em conta o efeito da interferência das ondas secundárias e introduzindo um fator de obliquidade na emissão destas ondas. A teoria de Huygens-Fresnel descreve a propagação da onda considerando cada ponto da frente de onda primária como uma nova fonte emitindo ondas secundárias com a mesma frequência desta [1,6,7]. A superposição ou interferência das ondas secundárias num dado ponto P fornece a amplitude do campo elétrico nesta posição.

O princípio de Huygens falhava ao prever que ondas secundárias seriam irradiadas com a mesma eficiência em todas as direções, resultando na geração de novas frentes de onda se deslocando não só para longe da fonte, mas também em direção a ela. Tais ondas nunca foram observadas, o que fez Fresnel sugerir que a irradiação das ondas secundárias não ocorresse de forma uniforme e que a amplitude da irradiação numa certa direção dependesse do ângulo θ desta com relação a normal a frente de onda. O fator de obliquidade $K(\theta)$ na irradiação dessas ondas é dado pela relação abaixo:

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta). \quad (1)$$

Assim, para $K(\theta) = 0$, $K(\theta) = 1$ o que corresponde a uma irradiação máxima, e quando $\theta = \pi$, $K(\theta) = 0$ resultando numa irradiação mínima igual a zero.

O método de Huygens-Fresnel para descrever a propagação consiste em dividir a superfície da frente de onda primária esférica em anéis concêntricos denominados zonas de Fresnel. As diversas zonas de Fresnel são delimitadas de tal forma que as fontes secundárias dentro de uma mesma zona produzam ondas que chegam com a mesma fase num ponto P . Os limites das diversas zonas correspondem à intersecção da frente de onda

primária com esferas centradas no ponto P e com raios diferindo de $\lambda/2$. As três primeiras zonas de Fresnel de uma frente de onda esférica são mostradas na Fig. 1.

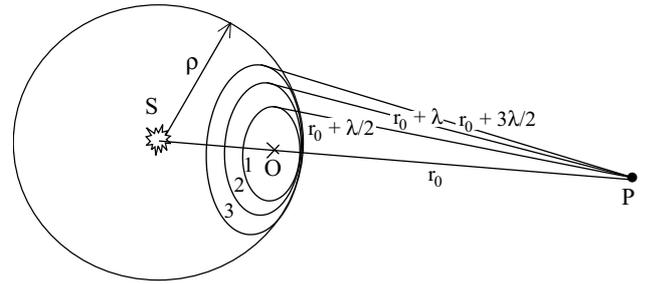


Figura 1 - Três primeiras zonas de Fresnel formadas pela intersecção da frente de onda esférica gerada em S com a superfície de três esferas centradas em P cujos raios diferem de $\lambda/2$.

Assumimos que todas as fontes pontuais dentro de um anel são coerentes e irradiam em fase com a frente de onda primária. As ondas secundárias geradas em um anel viajam uma distância r até chegar ao ponto P (num instante de tempo t), sendo que todas chegam em P com a mesma fase, $\omega t - k(\rho + r)$. A amplitude da onda resultante no ponto P devida a um dado anel pode ser calculada somando-se todas as ondas secundárias emitidas dentro deste anel. As zonas de Fresnel são definidas de tal forma que uma dada zona está meio comprimento de onda mais afastada do ponto P do que a zona que a precede, o que faz com que as contribuições de duas zonas sucessivas para a onda resultante em P estejam fora de fase. Podemos expressar a amplitude do campo elétrico resultante no ponto P devido às diversas zonas de Fresnel como:

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots, \pm |E_m|, \quad (2)$$

onde E_1, E_2, \dots, E_m são as contribuições das sucessivas zonas que tendem a se anular no ponto P . Porém, o fator de obliquidade, que até o momento não foi levado em conta, faz com que estas contribuições não se anulem completamente. Quanto maior é a ordem da zona de Fresnel, maior é o θ e menor é o K , portanto, menor será a contribuição desta zona para a onda resultante no ponto P . Se o número total de zonas é ímpar, podemos reescrever a soma de duas maneiras diferentes:

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) + \frac{|E_m|}{2} \quad (3)$$

ou

$$\begin{aligned}
E = & |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) - \\
& \left(\frac{|E_4|}{2} - |E_5| + \frac{|E_6|}{2} \right) - \dots \\
& - \left(\frac{|E_{m-3}|}{2} - |E_{m-2}| + \frac{|E_{m-1}|}{2} \right) \\
& - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m|. \quad (4)
\end{aligned}$$

Existem duas possibilidades para o valor do módulo de amplitude fornecida por uma zona l :

1. $|E_l|$ ser maior do que o valor médio para as suas duas vizinhas,

$$|E_l| > \frac{(|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)}{2}. \quad (5)$$

2. $|E_l|$ ser menor do que o valor médio para as suas duas vizinhas,

$$|E_l| < \frac{(|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)}{2}. \quad (6)$$

Estas duas situações dependem da taxa de variação do fator de obliquidade $K(\theta)$. Quando ocorrer a primeira situação (Eq. 5) os termos entre parênteses nas Eqs. (3) e (4) serão negativos o que nos leva a concluir que

$$E < \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \quad (7)$$

e

$$E > |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m|. \quad (8)$$

Como o fator de obliquidade varia de 1 até 0, se tivermos um grande número de zonas, podemos desprezar as variações causadas por este fator nas contribuições de zonas adjacentes fazendo aproximações $|E_1| \approx |E_2|$ e $|E_{m-1}| \approx |E_m|$ na expressão (8) e reescrevendo-a

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2}. \quad (9)$$

Das expressões (7) e (9) podemos então concluir que

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2}. \quad (10)$$

O mesmo tipo de análise feito para um número par de zonas leva a um resultado semelhante fornecido pela expressão (11):

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2}. \quad (11)$$

Por meio da análise das expressões (10) e (11) pode-se chegar as seguintes conclusões:

a) Se o número de zonas é pequeno $E_1 \cong E_m$, no caso de um número ímpar de zonas a amplitude resultante será essencialmente aquela fornecida pela primeira zona. Porém se este número é par a amplitude tenderá para zero.

b) Se o número de zonas é grande, E_m tenderá a zero e tanto para um número par quanto para um ímpar de zonas a amplitude resultante será a metade da contribuição da primeira zona.

Quando em 1818 Fresnel apresentou a sua teoria sobre difração a Academia de Ciências da França um dos avaliadores, Simeon D. Poisson (1781-1840), analisando o trabalho chegou a um resultado considerado por ele absurdo. Poisson concluiu que se a teoria de Fresnel estivesse correta, deveria existir um ponto luminoso no centro da sombra geométrica de um disco opaco. Esta predição foi em seguida comprovada experimentalmente por Dominique F. Arago (1786-1853) que também fazia parte do comitê de avaliação do concurso. Pode-se chegar facilmente a mesma conclusão de Poisson analisando as expressões (10) e (11). Se um disco circular cobrir a primeira zona de Fresnel da frente de onda, a contribuição desta zona será suprimida da iluminação total de um ponto P . Como esta contribuição teria um valor $E \approx \frac{|E_1|}{2}$ para uma onda não obstruída, com a presença do disco passaria a ser $E \approx -\frac{|E_1|}{2}$. Portanto, em algum ponto P do eixo, a irradiação não deverá ser alterada pela inserção do disco no caminho da luz. Fora do eixo, são observados anéis concêntricos brilhantes e escuros que circulam o ponto iluminado central. Desta forma o disco opaco gera a imagem da fonte S no ponto P e, portanto se comporta como uma lente positiva. Nas considerações anteriores foi usado o fato das contribuições de zonas consecutivas tenderem a se anular, o que sugere que se forem obstruídas as contribuições de todas as zonas ímpares ou todas as pares, teremos um aumento significativo na iluminação em P . A placa de zonas de Fresnel é uma tela que apresenta este comportamento e que pode ser construída calculando previamente os raios das diversas zonas. Os raios das zonas podem ser calculados com a ajuda da Fig. 2, onde A_m representa a borda superior da m -ésima zona; ρ_0 é a distância fonte-placa marcada no eixo que une a fonte ao ponto P ; e r_0 é a distância placa-ponto P . As distâncias entre a m -ésima zona e a fonte e entre a m -ésima zona e o ponto P são representadas por ρ_m e r_m respectivamente. O raio externo da m -ésima zona é representado por R_m .

Uma onda que percorra o caminho $S - A_m - P$ da figura chegará ao ponto P defasada de $m\lambda/2$ com respeito a uma onda que percorre o caminho $S - O - P$. Assim podemos escrever

$$(\rho_m + r_m) - (\rho_0 + r_0) = m\frac{\lambda}{2}, \quad (12)$$

e usando Pitágoras,

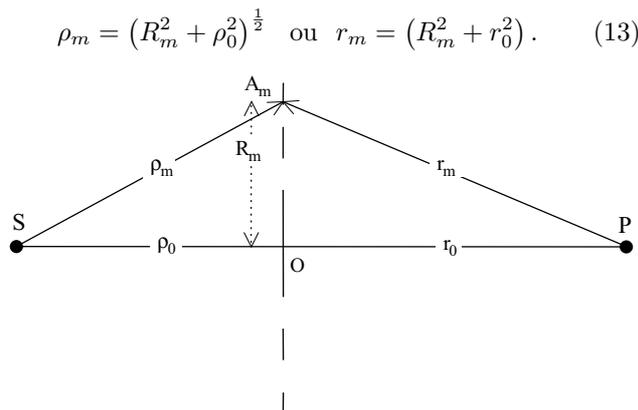


Figura 2 - Geometria da placa de zonas de Fresnel.

As expressões (13) podem ser expandidas em série, e uma vez que R_m é pequeno em comparação com ρ_0 e r_0 , podem ser considerados apenas os dois primeiros termos.

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{R_m^2}{2\rho_0} \quad \text{e} \quad r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}. \quad (14)$$

Usando as expressões (14) podemos reescrever (12) como

$$\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{m\lambda}{R_m^2}. \quad (15)$$

Esta equação é semelhante a das lentes delgadas, sendo a distância focal dada por

$$f = \frac{R_m^2}{m\lambda}. \quad (16)$$

As equações (15) e (16) permitem produzir placas de zonas de Fresnel para operar como lentes com distâncias focais desejadas para o comprimento de onda de operação. Reescrevendo (15) com o raio externo da m -ésima zona em evidência, temos que

$$R_m = \left(\frac{m\lambda}{\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Vemos da expressão (17) que o raio externo das zonas sucessivas cresce com $m^{1/2}$. Supondo que o raio da primeira zona seja R_1 , as zonas terão raios

$$R_1, \sqrt{2}R_1, \sqrt{3}R_1, 2R_1, \dots, \sqrt{m}R_1. \quad (18)$$

A distância focal da lente é dada pela Eq. (16). Fazendo novamente a consideração de que o raio da primeira zona seja R_1 podemos reescrever (16)

$$f = \frac{(\sqrt{m}R_1)^2}{m\lambda} = \frac{R_1^2}{\lambda}. \quad (19)$$

Desta maneira vemos que a distância focal da lente para luz com um determinado comprimento de onda depende do raio da primeira zona de Fresnel da placa.

3. Experimental

Em uma primeira etapa do processo de fabricação das placas zonais foi produzido, em papel branco e em tamanho ampliado, um padrão de zonas de Fresnel contendo um total de 20 zonas. Este padrão pode ser facilmente desenhado usando um programa gráfico como o *Corel Draw* ou mesmo o editor de figuras do *Word*. Foi escolhido um raio de 2 cm para a primeira zona, e os raios das zonas consecutivas foram calculados usando a Eq. 18. Somente as zonas pares foram impressas com tinta preta, resultando numa distribuição de anéis brancos e negros conforme pode ser visualizado na Fig. 3.

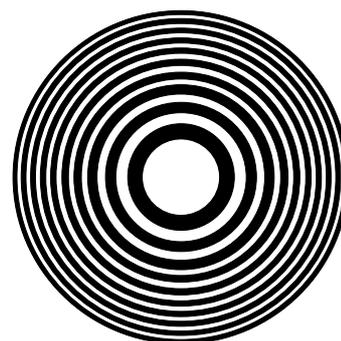


Figura 3 - Padrão de zonas de Fresnel ampliado produzido sobre papel branco.

Tirando-se uma fotografia da distribuição, após a revelação do filme tem-se gravada no filme uma placa de zonas de Fresnel capaz de focalizar a luz incidente sobre ela. Esta lente possui distâncias focais que variam com o comprimento de onda da luz incidente, e que são determinadas pelos diâmetros das zonas gravadas no filme (Eq. 19). Estes diâmetros, por sua vez, dependem das características de cada máquina fotográfica e da distância na qual a foto foi tirada.

Para poder produzir placas com distâncias focais desejadas a distribuição foi fotografada a diversas distâncias usando uma máquina fotográfica (Olympus 35 mm, 1:4.5) equipada com filme Kodak 125 PX preto e branco. Foram tiradas um total de treze fotografias com a distância filme-padrão (d_{fp}) sendo acrescida de 15 cm após cada exposição. Como a máquina fotográfica usada somente produz imagens focadas se o objeto estiver posicionado a uma distância mínima de 1m, tiramos fotos do padrão distanciando-o da máquina desde 1,20 até 3 m. Após a revelação do filme cada negativo apresenta uma placa de zonas de Fresnel diferente, com os raios das diversas zonas sendo dependentes da distância nas quais as fotografias foram tiradas. Tomamos o cuidado de posicionar a câmera de maneira a garantir que a sua lente estivesse exatamente na mesma altura do centro do padrão e que também não houvesse nenhum deslocamento lateral. Este procedimento é necessário uma vez que qualquer imperfeição no alinhamento da lente com relação ao centro

do padrão irá causar distorções no padrão registrado no filme.

Com a finalidade de medir as distâncias focais das lentes produzidas, todas as placas foram usadas para focalizar a luz de um apontador laser com emissão na faixa de comprimentos de onda compreendida entre 630 e 680 nm. Um diagrama da montagem experimental utilizada nesta caracterização das lentes é apresentado na Fig. 4. Na montagem é utilizado um par de lentes convergentes para aumentar o diâmetro do feixe laser e assim garantir que toda a placa de zonas seja iluminada. Para produzir um feixe expandido colimado foram usadas duas lentes com distâncias focais de 4 e 28 cm separadas por uma distância igual à soma das suas distâncias focais. Estas duas lentes foram escolhidas para que o diâmetro do feixe expandido produzido excedesse o diâmetro da maior placa de zonas de Fresnel. Para que a incidência da luz ocorresse, para todas as placas, somente sobre a região do padrão, posicionamos antes destas uma abertura circular de diâmetro ajustável (íris variável).

A Tabela 1 apresenta os valores de distância focal (f) medidos com a montagem experimental descrita, e os correspondentes valores de diâmetro da vigésima zona (D_{20}) calculados com o auxílio da Eq. (16). A distância focal de cada lente foi obtida ajustando-se a posição do anteparo móvel até que fosse observada uma máxima focalização do feixe. O fato de a fonte laser emitir luz numa faixa de comprimentos de onda entre 630 e 680 nm leva a variações em torno de 8%

na distância de focalização do feixe. Estas variações são maiores para as lentes de maior diâmetro e introduzem, no nosso caso, uma imprecisão de 4,0 cm na medida da distância focal destas lentes. Nos cálculos dos diâmetros da vigésima zona mostrados na Tabela 1, foi usado o comprimento de onda central da banda de emissão do apontador laser (655 nm). Uma verificação adicional dos valores de diâmetro foi realizada medindo estes diretamente na placa de Fresnel com o auxílio de uma lente de 8X contendo escala de medida de 0 a 5 mm com incrementos de 0,02 mm, procedimento que levou a uma confirmação dos valores calculados.

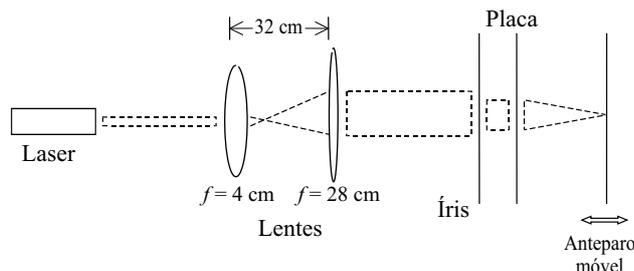


Figura 4 - Montagem experimental usada para medir as distâncias focais das lentes de Fresnel.

O diâmetro das placas produzidas depende da distância máquina-padrão e também das características da máquina fotográfica usada para tirar as fotos. Uma caracterização do sistema de produção das placas pode ser obtida por meio de uma análise gráfica dos resultados apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Distâncias focais e diâmetros da vigésima zona das placas de Fresnel, para iluminação com o apontador laser (630-680 nm).

d_{fp} (m)	1,20	1,35	1,50	1,65	1,80	1,95	2,10	2,25	2,40	2,55	2,70	2,85	3,00
f (cm)	49,5	36,5	33,0	26,0	21,0	18,5	17,0	14,0	12,5	11,0	9,5	9,0	8,0
D_{20} (mm)	5,1	4,4	4,2	3,7	3,3	3,1	3,0	2,7	2,6	2,4	2,2	2,2	2,0

Na Fig. 5 é apresentado o gráfico dos diâmetros calculados para a vigésima zona em função das distâncias nas quais as fotografias foram tiradas. Os dados foram ajustados por uma exponencial e o resultado deste ajuste também pode ser visualizado na Fig. 5. A expressão da curva ajustada e os correspondentes parâmetros de ajuste são fornecidos à seguir:

$$d_{fp} = d_0 + Ae^{-\frac{D_{20}}{B}}, \quad (20)$$

onde a distância d_{fp} é dada em metros, o diâmetro D_{20} em milímetros, e as constantes ajustadas possuem os valores:

$$d_0 = 0.8696; \quad A = 7.07986 \quad \text{e} \quad B = 0.16723. \quad (21)$$

O resultado do ajuste da exponencial decrescente ao gráfico (Eq. 20) permite encontrar a distância ideal na qual a fotografia deve ser tirada para que uma determinada lente seja produzida.

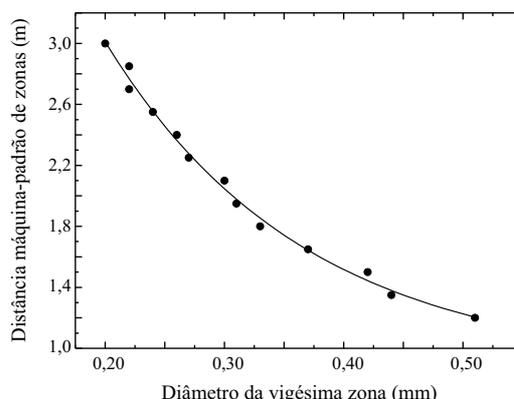


Figura 5 - Gráfico mostrando o diâmetro calculado da vigésima zona de Fresnel para as placas produzidas, em função das diferentes distâncias nas quais as fotografias foram tiradas (●), e o ajuste de uma função exponencial aos dados calculados (—).

4. Discussão e Conclusões

Neste trabalho apresentamos um experimento de fácil realização que pode ser proposto como trabalho para os estudantes das disciplinas de física do terceiro grau, onde estão envolvidos conceitos de óptica física. A realização do experimento é viável mesmo em instituições onde os laboratórios de ensino sejam deficientes. Para a produção das placas de zonas de Fresnel são necessários equipamentos de uso comum (máquina fotográfica, computador, impressora) o que facilita a realização desta etapa do experimento fora do laboratório. A caracterização das placas produzidas necessita de materiais simples e de fácil aquisição (apontador laser, lentes, suportes ópticos, íris variável) que normalmente são encontrados nos laboratórios de ensino.

O experimento busca estimular nos alunos o interesse pela óptica física através da produção de dispositivos que têm uma aplicação prática direta. É importante salientar que apesar de ser um experimento relativamente simples, este exige do aluno a compreensão do fenômeno de interferência e da teoria de Fresnel para a propagação de ondas e, portanto contribui de forma positiva com o processo de aprendizado.

Não podemos deixar de citar o benefício que a realização de um experimento minucioso e composto de várias etapas traz para a formação do aluno, fazendo com que seja adquirida uma metodologia de trabalho adequada.

Além disso, o experimento estimula a interdisciplinaridade, uma vez que os dados obtidos experimentalmente devem ser analisados tanto graficamente como numericamente. Para isto o aluno deve utilizar progra-

mas gráficos e algoritmos de ajuste de equações a dados experimentais.

Numa etapa posterior, dependendo da disponibilidade de laboratórios mais especializados e das facilidades locais para o desenvolvimento de trabalhos mais elaborados, sugerimos a medida do ganho de intensidade obtido com a introdução da placa, o que poderia ser realizado com a utilização de um fotodetector e uma íris com abertura variável. Para centros com estrutura disponível para a produção de dispositivos num material em relevo transparente, pode ser sugerida a cópia da máscara com uma espessura apropriada, resultando numa placa de zonas com eficiência superior.

Referências

- [1] E. Hecht, *Optics* (Addison-Wesley Inc, Massachusetts, 1990).
- [2] P. Das, *Lasers and Optical Engineering* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [3] R.J. Collier, C.B. Burckhardt and L.H. Lin, *Optical Holography* (Academic Press, New York, 1971).
- [4] A. Stevens, *British Journal of Photography* **148**, 18 (2001).
- [5] A. Ozawa, T. Tamamura, T. Ishii, H. Yoshihara and T. Kagoshima, *Microelectronic Engineering* **35**, 525 (1997).
- [6] H.M. Nussenzeig, *Curso de Física Básica, v. 4: Óptica, Relatividade e Física Quântica* (Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1998).
- [7] F.L. Pedrotti and L.S. Pedrotti, *Introduction to Optics* (Prentice-Hall Inc., New Jersey 1987).