

A criticalidade auto-organizada na pilha de areia

(Self organized criticality in a sandpile model)

M.V. Carneiro¹ e I.C. Charret

Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brasil

Recebido em 25/5/2005; Aceito em 4/10/2005

Sistemas complexos são sistemas dinâmicos abertos onde suas unidades possuem características simples e previsíveis. Entretanto, o que caracteriza esse tipo de sistema é o comportamento do conjunto formado por estas unidades. Este comportamento não tem nenhum relacionamento direto com as propriedades unitárias de cada integrante, sendo a imprevisibilidade sua maior característica. O modelo da pilha de areia é uma simples ilustração desse tipo de sistema complexo com os grãos de areia sendo as unidades básicas. Nesse modelo estabelece-se uma única condição para o acontecimento de uma avalanche, que pode ter seu tamanho variável de acordo com os seus deslizamentos. Tais deslizamentos ocorrerão sempre que a condição crítica estabelecida para o sistema for alcançada. A relação entre o tamanho das avalanches e a sua frequência obedece uma lei de potência.

Palavras-chave: criticalidade auto organizada, pilha de areia, lei de potência.

Complex systems are open dynamical systems consisting of units with simple and predictable features. However, the unique characteristic of the kind of systems is the unpredictable behavior of an assembly of such units. This behavior has no direct relation with the individual properties of each component of the system. The sandpile model is a simple demonstration of this kind of complex system with the sand grains as the basic units. In this model, just one condition is established, for the occurrence of an avalanche which may have a variable size depending on the topplings. The topplings appear always when the condition for avalanche is reached. The relation between the avalanche size and its frequency follows a power law.

Keywords: self organized criticality, sandpile, power law.

1. Introdução

Sistemas dinâmicos são sistemas compostos por várias unidades interagentes que evoluem com o tempo. Serão considerados complexos se: forem sistemas abertos, interagindo com o ambiente em que ele se situa; apresentarem comportamento aleatório; apresentarem geometria fractal; apresentarem vários estados de equilíbrio, denominados de atratores. Um sistema complexo pode ter vários desses atratores.

Apesar dos estudos sobre sistemas complexos serem recentes, várias associações entre esses sistemas e o mundo que nos cerca já foram realizadas. Algumas propriedades que caracterizam um sistema complexo podem ser encontradas, por exemplo, na economia, pois é pouco provável se obter uma previsão exata sobre os fenômenos futuros que afetam o câmbio monetário e a bolsa de valores [1, 2].

Este trabalho tem como objetivo analisar um exemplo simples de sistema complexo, a pilha de areia. Através dele, é possível comprovar o surgimento de algumas características dos sistemas complexos, como o

aparecimento da criticalidade auto-organizada. O conceito de criticalidade auto-organizada foi proposto por Bak *et al.* [3, 4] usando este exemplo.

A criticalidade auto-organizada é um fenômeno que aparece em sistemas que evoluem naturalmente para um estado crítico sem qualquer sensibilidade à ajustes de parâmetros ou disposições da configuração inicial. Entretanto, neste estado crítico, o sistema é altamente susceptível a pequenas mudanças ou ruídos, que podem provocar reações totalmente imprevisíveis [5].

Este trabalho está organizado como segue. Na seção 2 apresentamos uma descrição do modelo da pilha de areia. Nas seções 3 e 4 apresentamos a abordagem computacional adotada para simularmos a pilha de areia. Na seção 5 são apresentados os resultados e as conclusões. No apêndice A é apresentado um algoritmo para a simulação do modelo.

2. O modelo da pilha de areia

A pilha de areia é um exemplo típico de um sistema complexo [6]. Elaborado por Per Bak [4], o modelo

¹E-mail: marcus@stout.ufla.br.

da pilha de areia ilustra o surgimento da criticalidade auto-organizada em um sistema complexo. Considere um fluxo constante de areia sendo despejado sobre um plano qualquer. Inicialmente, a pilha de areia estará baixa, ocorrendo alguns deslizamentos quando o tamanho e a inclinação da pilha começarem a aumentar. Aqui, entende-se por deslizamentos apenas pequenos movimentos de grãos de areia nas vizinhanças do grão. Neste modelo, é interessante notar que apesar de conhecermos todas as propriedades do grão tais como tamanho, massa e formato, isso não é suficiente para entendermos e prevermos como e quando estes deslizamentos ocorrerão. Estes deslizamentos são consequência da interação de um grão de areia com seus vizinhos.

À medida que a altura da pilha atinge dimensões proporcionalmente maiores que a sua base, deslizamentos maiores começam a acontecer envolvendo todo o sistema, e não apenas os vizinhos locais, até que surge uma certa forma de organização.

O sistema alcança um estado estacionário, onde a pilha passa a ter a inclinação constante chamada de ângulo de estabilidade, e a média dos grãos que entram no sistema é comparável com a média dos grãos que o deixam. Neste estado estacionário, o sistema encontra-se também no que chamamos de estado crítico, que é caracterizado pela imprecisão, não sendo possível prever qual o tamanho e o instante em que as avalanches irão ocorrer. Isto significa que quando deslizamentos locais acontecem, podem ou não ser geradas avalanches de grandes tamanhos envolvendo todo o sistema. O sistema atingiu então, a criticalidade auto-organizada.

É incorreto dizer que o sistema atinge um estado de equilíbrio quando alcança este estado crítico, pois segundo Per Bak [1], sistemas em equilíbrio não são tidos como complexos, já que estes devem ser sistemas dinâmicos. Se um sistema em equilíbrio sofre uma ligeira perturbação, nada demais acontece além de pequenas reações locais. Isso não pode ser afirmado para um sistema crítico auto-organizado como a pilha de areia, pois a probabilidade de que ocorra uma resposta intensa à uma pequena perturbação é comparável à probabilidade de nada ocorrer. Para a pilha de areia, a probabilidade de grandes avalanches ocorrerem não pode ser desprezada frente às pequenas avalanches.

Este modelo serve de “toy model” para o estudo dos fenômenos sísmicos que ocorrem na crosta terrestre. Não é possível estabelecer uma relação fiel entre os números de terremotos e o valor de suas respectivas intensidades, devido a escassez de dados, consequência do intervalo finito de tempo, visto que o espaçamento temporal entre os fenômenos é muito grande. Portanto, é difícil coletar dados referentes a todos os tamanhos de terremotos. Daí surge a importância do modelo, pois neste caso os fenômenos acontecem em espaços de tempo bem mais curtos, permitindo uma maior coleta de dados. Com isso é possível a realização de com-

parações do caso micro, a pilha de areia, com o caso macro, a crosta terrestre.

Para o modelo da pilha de areia, a distribuição dos tamanhos das avalanches com o número de ocorrências obedece a uma lei de potência.

A relação entre o logaritmo do número de avalanches de um determinado tamanho $N(s)$ e o logaritmo do tamanho dessas avalanches s decresce de forma linear.

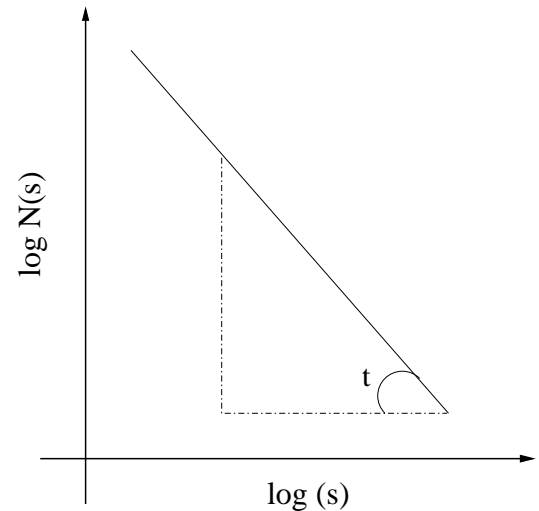


Figura 1 - Relação entre os valores de s , tamanho da avalanche, e $N(s)$, número de ocorrências.

$$\begin{aligned} \log[N(s)]/\log(s) &= -t \\ \log[N(s)] &= -t \log(s), \\ N(s) &= s^{-t}, \end{aligned} \quad (1)$$

onde $N(s)$ é o número de avalanches de um dado tamanho s , e o expoente $-t$ é a inclinação da reta.

3. Simulação da pilha de areia

Para realizar o estudo do modelo da pilha de areia e verificar o aparecimento da lei de potência, foram feitas simulações computacionais ao invés de experimentos, já que estes exigem um longo tempo de experimentação e monitoração constante durante toda a execução do experimento. Através de um modelo computacional, todos esses obstáculos são superados devido a rapidez de processamento e armazenamento de dados. A forma mais simples para se simular computacionalmente uma pilha de areia é modelá-la na forma de um autômato celular.

Um autômato celular [7] é um sistema dinâmico formado por muitas unidades interagindo umas com as outras. Grosseiramente falando, um autômato pode ser visto na forma de uma matriz de sítios onde existe uma regra de interação muito simples que influencia apenas os vizinhos mais próximos à região dos fenômenos.

Para a pilha de areia, uma matriz quadrada de qualquer dimensão, inicialmente povoada ou não, pode

servir de início. Cada sítio poderá ter uma quantidade finita de grãos, $M_{(x,y)}$, variando de zero até $n - 1$, sendo n um valor crítico necessário para que ocorra um deslizamento. Em nossas simulações, adotamos $n = 4$. Logo, cada sítio poderá conter $0 \leq x \leq 3$ grãos.

Desde o início, pode-se optar se a adição dos grãos ao sistema será feita em uma célula pré-definida ou em células aleatórias. Ao adicionarmos um grão ao valor de $M_{(x,y)}$ o mesmo será acrescido de “1”. O processo poderá ser realizado várias vezes de modo que quando qualquer $M_{(x,y)}$ atingir o valor 4, haverá um deslizamento. Quando este deslizamento ocorre o seguinte processo é implementado:

$$\begin{aligned} M_{(x,y)} &= M_{(x,y)} - 4 \\ M_{(x\pm 1,y)} &= M_{(x\pm 1,y)} + 1 \\ M_{(x,y\pm 1)} &= M_{(x,y\pm 1)} + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Isto significa que os quatro grãos que estavam no sítio se distribuíram entre os vizinhos (de baixo, de cima, da esquerda e da direita). Estamos considerando aqui apenas primeiros vizinhos (vizinhança de Von Neuman [8]). Inicialmente, a distribuição foi feita em partes iguais, onde cada vizinho recebeu um grão de areia do sítio central. Se o sítio estiver localizado em uma das quatro bordas do plano, o grão que corresponderia ao vizinho não existente abandonará o sistema, caracterizando o comportamento finito do mesmo.

Caso algum sítio receba um grão de um vizinho e complete quatro grãos, o processo se repetirá. Conseqüentemente, haverá um novo deslizamento e uma outra distribuição de grãos, podendo resultar em uma reação em cadeia de longo alcance.

Denominamos de deslizamento o fato de um sítio completar quatro grãos e realizar a distribuição a seus vizinhos, e de avalanche o conjunto formado por estes deslizamentos. Uma avalanche será caracterizada pelo seu tamanho, que é contabilizado pela quantidade de deslizamentos que foi gerado desde o momento em que foi acrescentado o último grão. Por exemplo, se ao colocarmos um grão este gerar um deslizamento, concluímos que ocorreu uma avalanche de tamanho um. Entretanto, se ao colocarmos um grão e este gerar nove deslizamentos, podemos dizer que ocorreu uma avalanche de tamanho nove.

Este processo pode ser melhor visualizado na Fig. 2. Inicialmente, temos uma certa distribuição de grãos de areia. Deixamos cair um grão de areia na célula $M_{(3,3)}$ que completa a condição inicialmente estabelecida no problema para a ocorrência de um deslizamento. Haverá então um espalhamento dos grãos deste sítio para os seus primeiros vizinhos. Estes, em consequência, também podem alcançar a condição e realizar o mesmo processo anterior. Neste esquema é mostrada uma avalanche de tamanho 6, pois seis deslizamentos ocorreram com o acréscimo de um grão apenas.

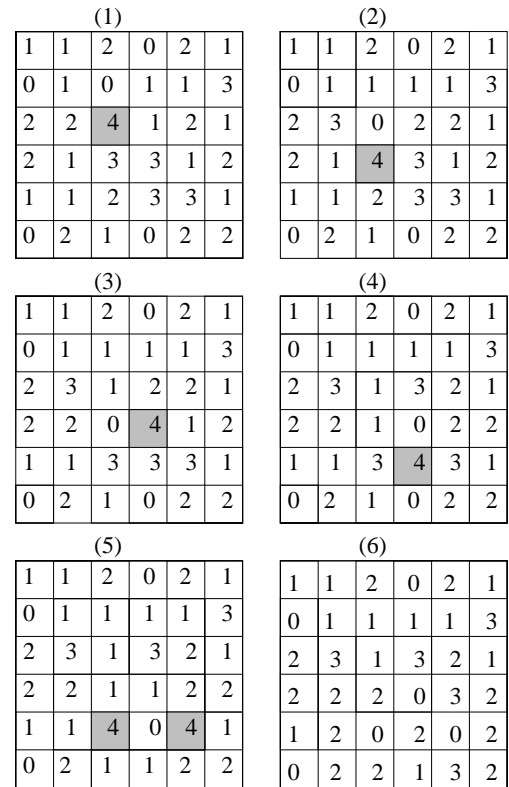


Figura 2 - Simulação de uma avalanche de tamanho 6 da pilha de areia em uma matriz finita 6×6 .

Quando este sistema alcança estágios mais avançados, avalanches de tamanhos inesperados podem acontecer em comparação com o tamanho do sistema.

É claro que isso é uma simplificação grosseira da pilha de areia real, visto que os grãos apresentam formas e propriedades diversas entre eles, e o ambiente também pode contribuir com a gravidade, resistência do ar, etc. Entretanto, o modelo é extremamente útil, por exemplo na análise da ocorrência de terremotos em várias escalas. A lei de Richter para terremotos apresenta uma incrível semelhança com a lei de potência que obtemos a partir do modelo da pilha de areia [1]. Embora os terremotos possuam um grande número de agravantes e atenuantes que precisam ser levados em conta, pode-se modelar esse fenômeno com auxílio de algumas regras simples de interações, produzindo resultados semelhantes. Este modelo nos dá ainda a liberdade de implementar diversos tipos de modificações, como por exemplo, alterações no tamanho da pilha, distribuições aleatórias, lançamento de grãos em pontos aleatórios e até mesmo inclinação da rede, o que seria possível se alterarmos as probabilidades de distribuição dos deslizamentos.

4. Implementação do modelo

Para a realização das simulações, o autômato celular foi implementado em um programa computacional usando a linguagem C++, com um formato de arquivos texto

com a extensão *.dat, para os dados, que foram analisados através de um aplicativo (xmgrace), que permite a visualização em gráficos cartesianos.

O algoritmo proposto para esse modelo é apresentado no apêndice A.

Em nossas simulações, os grãos de areia ingressam na pilha somente através do sítio central. O método principal do algoritmo consiste em um loop que faz chamadas sucessivas à função *pingar*. Esta função, por sua vez, incrementa a quantidade de areia do sítio especificado e em seguida verifica se o sítio já alcançou sua capacidade crítica. Caso afirmativo, os grãos desse sítio serão distribuídos aos seus vizinhos, zerando o sítio local e chamando a função *pingar* para cada um dos quatro vizinhos.

É interessante ressaltar que o algoritmo utilizado tem o carácter recursivo, de modo que possa ser realizada uma reação em cadeia até que nenhum sítio tenha grãos em número igual a capacidade crítica, o que fará com que as chamadas recursivas cessem naquela iteração.

Após implementarmos o caso apresentado na seção anterior, introduzimos no problema uma distribuição probabilística para os deslizamentos. A modificação consiste em distribuir os grãos de forma não-uniforme, ou seja, os sítios vizinhos não vão receber, necessariamente, um grão cada. Estes grãos podem ser divididos de forma que um sítio possa receber nenhum grão ou até mesmo os 4 grãos de seu sítio vizinho. A proposta gera um problema de análise combinatória: “De quantas maneiras seria possível distribuir quatro bolinhas em quatro caixas diferentes”, supondo que as caixas são os sítios e as bolinhas são os grãos de areia. O resultado para esse problema é uma combinação de 7, 3 a 3, ou seja, 35 distribuições diferentes. A partir daí estipulamos que cada distribuição distinta receberia um índice que podia variar de 1 a 35. Quando um sítio completasse 4 grãos de areia, um número aleatório era gerado e uma distribuição de sítios vizinhos cujo índice coincidissem com o número sorteado era selecionada e utilizada no deslizamento.

Todas as distribuições tinham a mesma probabilidade de ocorrer, isto é, $1/35$.

5. Resultados e Conclusões

A implementação do modelo da pilha de areia ajudou na visualização de algumas propriedades comuns aos sistemas complexos tais como a imprevisibilidade e o aparecimento de estados críticos.

Os dados produzidos pelas simulações foram traçados em um plano cartesiano $\text{Log}[N(s)] \times \text{Log}[(s)]$, permitindo a verificação da existência da lei de potência, através de um ajuste linear da curva.

Os resultados obtidos estão muito próximos do valor esperado. O modelo da pilha de areia prevê que a reta ajustada tenha um coeficiente angular de -1 [1]. Os

dados que obtivemos variam entre -1.13 e -1.18 nas diversas circunstâncias testadas, como podemos ver nas Figs. 4, 5 e 7. Os testes realizados foram feitos em matrizes de tamanho mínimo 16×16 e tamanho máximo de 129×129 .

Para tamanhos muito pequenos da pilha, não é muito claro o surgimento de uma reta. Podemos dividir o gráfico em 3 partes, como mostrado na Fig. 4.

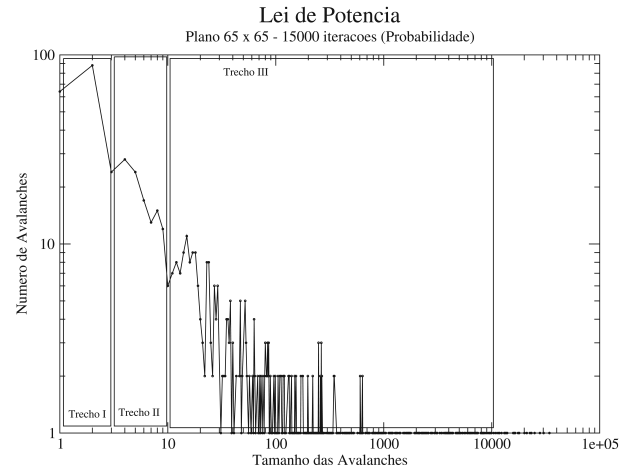


Figura 3 - Simulação com 15.000 iterações, em um plano de tamanho 65×65 .

A parte I corresponde a flutuações que são consequência do tamanho finito do sistema. O trecho II é o utilizado para ajuste da curva. Esta região é pequena em relação as outras para tamanhos reduzidos de pilha. A parte III é a região onde ocorre uma maior dispersão dos dados. Eles não contribuem para o ajuste da reta. Isso é consequência de um número muito grande de iterações realizadas no sistema, visto que quando poucas iterações são feitas, a região tende a ficar consideravelmente menos densa, como podemos ver comparando as Figs. 3 e 4. Entretanto, se o número de iterações for pequeno, o sistema não terá alcançado um estado crítico.

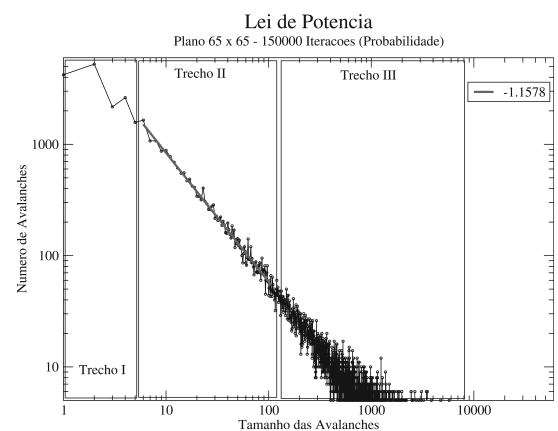


Figura 4 - O gráfico apresenta uma divisão em 3 regiões distintas. Esta simulação foi realizada em uma rede de tamanho 65×65 com 150000 iterações.

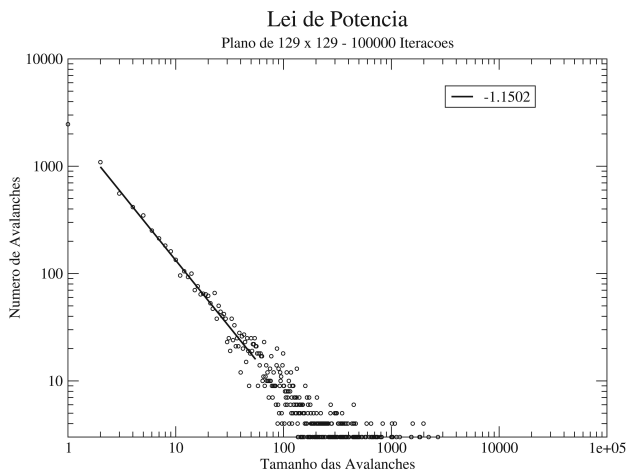


Figura 5 - Simulação feita em um plano de tamanho 129×129 com distribuição uniforme dos grãos.

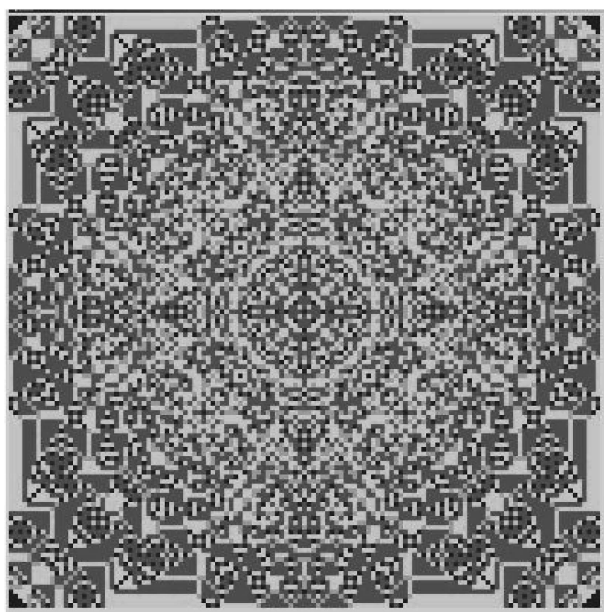


Figura 6 - Figura da pilha de areia obtida com distribuição uniforme dos grãos, iterada 100000 vezes em uma matriz com 129×129 sítios.

Complementando os testes, foram realizadas simulações que também incluíram probabilidades na distribuição das avalanches, como mencionado na seção 4. As curvas obtidas com a distribuição probabilística (Fig. 7) não apresentaram modificação em relação as curvas retiradas de testes usando a distribuição uniforme (Fig. 5). Os valores obtidos para a inclinação da reta em ambos os testes se mantiveram dentro do intervalo registrado anteriormente. Este resultado pode parecer óbvio, entretanto, o padrão gerado pela organização dos grãos em ambos os testes é totalmente distinto. Note que no teste com distribuição de probabilidade uniforme, em um plano 129×129 (Fig. 6), registra-se um padrão simétrico com regiões com maior concentração de sítios com a mesma quantidade de grãos. De modo que, se um sítio localizado em uma

região com grande concentração de grãos sofrer um deslizamento, enormes avalanches acontecerão. Mas isso não ocorre no plano 129×129 , onde foi usada a distribuição de probabilidade não-uniforme, como vemos na Fig. 8. Nesta simulação, a configuração é mais homogênea, com os grãos distribuídos aleatoriamente.

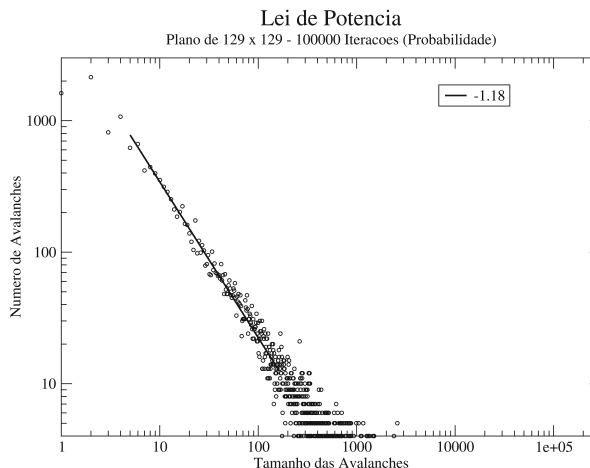


Figura 7 - Simulação feita em um plano de tamanho 129×129 com distribuição aleatória dos grãos.

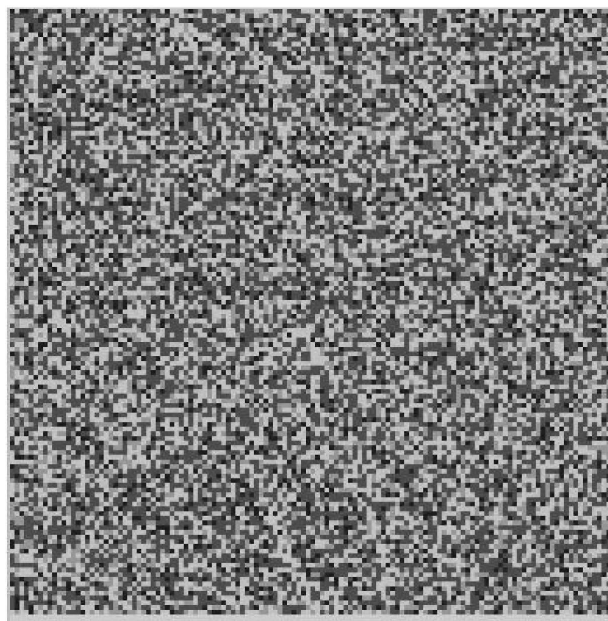


Figura 8 - Figura da pilha de areia obtida com distribuição não-uniforme dos deslizamentos, iterada 100000 vezes em uma matriz com 129×129 sítios.

Pelo que podemos verificar nas Figs. 5 e 7, o tamanho das avalanches continua muito semelhante e o coeficiente da reta mantém-se entre -1.13 e -1.18. Podemos concluir então que a forma da distribuição dos grãos no sistema não influi na ocorrência das avalanches, já que a lei de potência não apresenta variações significativas entre as duas abordagens.

Agradecimentos

M.V.C. Martins agradece ao CNPq pelo financiamento do projeto. Os autores também agradecem aos professores Dr. Lucas Monteiro Chaves do Departamento de Ciências Exatas da UFLA pelo auxílio na solução

dos problemas relacionados à distribuição dos grãos, ao Dr. Heitor Augustus Xavier Costa do Departamento de Ciência da Computação na parte computacional do trabalho e ao Dr. Antonio Tavares da Costa Jr. pelas discussões teóricas relacionadas ao tema.

Apêndice - Algoritmo

```

pingar (int posicaoI, int posicaoJ){
    /* Incrementar o sitio local*/
    Matriz[posicaoI][posicaoJ] = Matriz[posicaoI][posicaoJ] + 1;
    se a Matriz[posicaoI][posicaoJ] atingiu a capacidade suporte
    {
        Matriz[posicaoI][posicaoJ] = 0;
        se existe um sitio vizinho acima do sitio local
        {
            pingar(posicaoI - 1, posicaoJ);
        }
        se existe um sitio vizinho a esquerda do sitio local
        {
            pingar(posicaoI, posicaoJ - 1);
        }
        se existe um sitio vizinho abaixo do sitio local
        {
            pingar(posicaoI + 1, posicaoJ);
        }
        se existe um sitio vizinho a direita do sitio local
        {
            pingar(posicaoI, posicaoJ + 1);
        }
    }
}
} metodoMain(){
    Para i = 0 ate o numero total de iteracoes
    {
        /*0s graos de areia somente ingressaram na pilha pelo sitio central*/
        pingar(tamanho da matriz/2, tamanho da matriz/2);
    }
}

```

Referências

- [1] P. Bak, *How Nature Works* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [2] I. Gleria, R. Matsushita e S. da Silva, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26**, 99 (2004).
- [3] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
- [4] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A.* **38**, 364 (1988).
- [5] P.S. Addison, *Fractal And Chaos - An illustrated Course* (Institute of Physics Publishing, London, 1997), cap 5.
- [6] D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1613 (1990).
- [7] H.M. Nussenzveig, in *Introdução à Complexidade*, J. Palis, in *Sistemas Caóticos e Sistemas Complexos*, P.M.C. Oliveira, in *Automatos Celulares*, M.A.F. Gomes, in *Criticalidade Auto-Organizada*, editado por H.M. Nussenzveig, *Complexidade e Caos* (Editora UFRJ/COPEA, Rio de Janeiro, 1999.)
- [8] D. Barone, *Sociedades Artificiais: A Nova Fronteira da Inteligência nas Máquinas* (Bookman, Porto Alegre, 2003), p. 44.
- [9] J.M. Carlson, J.T. Chayes, E.R. Grannan and G.H. Swindle, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2547 (1990).
- [10] A.A. Ali, *Phys. Rev. E* **52**, 4595 (1995).
- [11] B. Drossel, *Phys. Rev. E.* **61**, 2168 (2000).