

Uma discussão sobre oscilações quirais e inversão de spin

(A discussion about chiral oscillations and spin flipping)

Alex Eduardo de Bernardini¹ e Stefano De Leo²

¹Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

²Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

Recebido em 4/2/2005; Revisado em 28/9/2005; Aceito em 18/10/2005

Neste trabalho desenvolvemos uma breve discussão sobre o conceito de quiralidade que pode aparecer ao construirmos uma lagrangiana de interação da teoria eletrofraca. Para melhor contextualizarmos os conceitos que estamos estudando, introduzimos uma breve descrição do status atual do problema de oscilação quântica de neutrinos. De fato, temos na quiralidade, assim como na helicidade, um caráter quântico de importância fundamental no estudo de física de neutrinos e de física de partículas de maneira geral. Neste contexto, os efeitos da oscilação quiral podem ser explicados como uma implicação do fenômeno de *zitterbewegung* que emerge quando soluções da equação de Dirac são usadas para descrever a evolução espaço-temporal de um pacote de ondas. Procuramos demonstrar, no entanto, que não existe vínculo entre tal fenômeno e o processo de inversão de spin, o qual vem associado ao número quântico que determina a helicidade de uma partícula que se propaga no espaço-tempo.

Palavras-chave: quiralidade, helicidade, oscilações.

In this paper we present a brief discussion on the concept of chirality which can appear when we construct the interacting lagrangian of the electroweak theory. In order to put the concepts we are studying in a clearer context, we introduce a brief description of the status of neutrino quantum oscillation problem. In fact, the chirality as well as the helicity correspond to a quantum character of fundamental importance in the study of neutrino physics or, generically, of particle physics. In this context, the effects of chiral oscillation can be explained as a consequence of the *zitterbewegung* phenomenon which emerges when Dirac equation solutions are used for describing the space-time evolution of a wave packet. We demonstrate, however, that there is not a constraint between such a phenomenon and the spin flipping process which is related to the quantum number of helicity of the propagating particle.

Keywords: chirality, helicity, oscillations.

1. Introdução

Recentemente, um grande interesse no fenômeno quântico de oscilação [1, 2] tem estimulado de maneira crescente a produção de trabalhos, em particular, no contexto da física de neutrinos [3, 4], onde, sob o ponto de vista teórico, procura-se descrever a mistura quântica de sabores [5, 6] e os mecanismos teóricos de oscilações quânticas de sabor [2, 7]. Apesar de bastante explorado e muito discutido nos últimos anos, as dificuldades conceituais que aparecem na interpretação do fenômeno de oscilação quântica, assim como outras características e fenômenos físicos envolvendo as partículas oscilantes, representam, ainda, um intrigante, e as vezes embaraçante, desafio para os físicos.

De fato, nos últimos três anos, experimentos de estudo do fluxo natural de neutrinos têm providenciado as mais fortes evidências de neutrinos massivos e da

superposição de estados quânticos do mesmo. Destacamos os resultados do experimento Super-Kamiokande com neutrinos atmosféricos [8], no qual uma significativa assimetria *up-down* em eventos com múons de altas energias é observada. Temos também os resultados do experimento SNO com neutrinos solares [9] no qual foram obtidas evidências diretas da transição de neutrinos eletrônicos (solares) em neutrinos de outros sabores. Temos ainda os resultados do experimento KamLAND [10] que confirmam o desaparecimento de neutrinos eletrônicos principalmente devido ao mecanismo de oscilação de sabores. Além do grande interesse em descrever o mecanismo correto para a conversão de sabores, a dificuldade conceitual no entendimento de alguns aspectos físicos que se “escondem” nas fórmulas de oscilação ainda representam um extenso campo para o desenvolvimento de estudos teóricos.

Ainda com relação aos dados experimentais, todos

¹E-mail: alexeb@ifi.unicamp.br.

os fenômenos observados experimentalmente poderiam ser explicados caso assumíssemos a existência de apenas três números quânticos de sabor para os neutrinos: eletrônico, muônico e tauônico, não fosse a anomalia observada no experimento LSND [11, 12, 13] que permite a interpretação da existência de um quarto neutrino o qual deveria ser inerte (não interagente). Na verdade, conforme discutido em [6], ocorre que, no experimento LSND é feita a medida de um fluxo de neutrinos produzidos pelo decaimento de um pión em “voô” ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$) e pelo decaimento de um antimúon em repouso ($\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$) de modo que se observa, no ponto de detecção, um déficit de antineutrinos eletrônicos. Quando o mecanismo *standard* de oscilação quântica de sabores [14] é levado em consideração, os dados referentes ao déficit observado apontariam para uma diferença quadrática de massas $\Delta m_{LSND}^2 \approx 1 \text{ eV}^2$ muito maior do que o valor $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ obtido a partir de outros experimentos. O fato é que com os dados obtidos no LSND [12], o esquema de mistura quântica com três sabores de neutrinos acaba por não ser satisfatório. Seria necessária (no mínimo) uma outra “espécie” de neutrino para permitir o valor tão elevado de Δm_{LSND} . Com três sabores de neutrinos é possível definir apenas dois valores independentes para as diferenças quadráticas de massas, as quais já foram determinadas por meio dos dados sobre neutrinos solares, atmosféricos, de reatores e de aceleradores até o momento obtidos [6]. Uma sugestão para a explicação desta anomalia vinda dos dados experimentais do LSND seria a da suposição da existência de um quarto neutrino, caracterizado como um singlete do Modelo Padrão que, entretanto, por meio de algum mecanismo (de oscilação), interagisse com os demais neutrinos ativos. Contudo, alguns experimentos (*KARMEN 2* [15] e *MiniBoone* [16]) que podem ou poderiam confirmar os dados vindos do LSND, ainda não foram finalizados de modo fornecer dados conclusivos sobre Δm_{LSND} e sobre o número de sabores, ou mais diretamente, sobre o número de neutrinos. Apesar da ausência de confirmação experimental, que atuaria como um aspecto de motivação adicional no desenvolver de nossos cálculos teóricos, assumiremos que as transições de estados mistos, onde o estado final de um neutrino corresponde a uma mistura quântica de uma componente ativa e uma componente estéril, são ainda aceitáveis.

De fato, a hipótese de mistura entre as já conhecidas espécies de neutrinos (eletrônico, muônico e tauônico) e neutrinos com uma massa mais elevada não é recente na literatura científica [17, 18]. Ao mesmo tempo, a inversão de spin atribuída a alguns mecanismos dinâmicos de interação externa [19, 20] chegou a ser englobado no estudo do déficit observacional envolvendo neutrinos solares. Em particular, como consequência de um momento magnético não nulo que interage com um campo

eletromagnético externo, neutrinos com helicidade *left-handed* teriam o número quântico correspondente modificado (para *right-handed*). Os efeitos sobre oscilações de sabor devidos a interações com campos magnéticos externos, em um tipo de fenômeno onde a quiralidade tenha sido preservada, também já foram introduzidos na literatura [21], porém, carecem de um estudo teórico pormenorizado. Observamos, contudo, que somente para neutrinos em regimes ultra-relativísticos de propagação a mudança de helicidade seria equivalente à mudança de quiralidade. Os neutrinos com quiralidade positiva (*right*) não se acoplam às correntes de carga fraca que “absorvem”² neutrinos. Conseqüentemente, essas partículas se tornam estéreis com respeito às interações fracas. Independentemente da existência de campos externos, como os neutrinos são detectados essencialmente via correntes de carga fraca do tipo V-A (interação vetorial menos pseudo-vetorial (axial)), a oscilação quiral *podria*, conforme se observa pela construção do mecanismo teórico de oscilação de quiralidade, ocupar um espaço significativo no problema de oscilação quântica de sabores envolvendo neutrinos [22], contudo, como veremos, não é o que acontece sob as atuais circunstâncias experimentais.

Dado o interesse científico crescente, e na procura de permitir ao leitor uma maior familiaridade com os conceitos de quiralidade e helicidade, dentre as discussões propostas neste manuscrito, descreveremos o mecanismo de oscilação quiral para partículas fermiônicas soluções da equação de Dirac. Neste modelo, os neutrinos permanecem como autoestados de massa, porém, contêm uma componente de quiralidade (positiva) estéril. Os efeitos de oscilação podem ser explicados como uma implicação da interferência entre componentes de frequência positiva e negativa soluções da equação de Dirac em um fenômeno semelhante ao *zitterbewegung* [23, 24] da posição, que emerge quando soluções da equação de Dirac são usadas para descrever a evolução espaço-temporal de um pacote de ondas. Salientamos ainda que várias contribuições científicas [22, 25] têm surgido no âmbito de descrever o mecanismo de oscilação quiral [26] acoplado ao fenômeno de oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas de Dirac [22].

Como proposta introdutória, na seção 2, em busca de sanar uma pequena confusão na conceituação de quiralidade e de helicidade que freqüentemente se observa na literatura, apenas ampliamos um pouco a discussão do caráter quiral das interações eletrofracas, descrevemos as analogias no confronto entre os conceitos de quiralidade e helicidade e, por fim, recapitulamos de forma bastante simplificada o quadro geral de modelos de *gauge* com simetria *left-right* [27]. Na seção 3, após introduzirmos o processo de oscilação quiral, discutimos o caráter físico da escolha, e mesmo da construção, do estado inicial envolvido no fenômeno de oscilação. Para

²Como em um vértice de interação fraca.

concretizarmos nosso estudo, na seção 4, analisamos o fenômeno de inversão de spin (*spin-flipping*) em comparação com processo de oscilação quiral. A seção 5 se presta às considerações finais.

2. A equação de Dirac e o conceito de transformação quiral

A equação de Dirac para uma partícula livre em sua notação covariante é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

ou, na forma conjugada, por

$$i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0, \quad (2)$$

onde sempre utilizaremos a notação padronizada convenientemente adotada na literatura [23, 24, 28]. Podemos estabelecer as soluções de ondas planas para a equação de Dirac que descreve uma partícula livre como $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$ com

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \exp[-i p x] u(p) \text{ para frequências positivas e} \\ \psi_-(x) &= \exp[+i p x] v(p) \text{ para frequências negativas,} \end{aligned} \quad (3)$$

onde p é o quadrimomento da partícula spinorial, $p = (E, \mathbf{p})$ com $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$, tal qual possamos escrever:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0. \quad (4)$$

A álgebra das matrizes de Dirac (γ^μ) possibilita que reescrevamos a Eq. (4) no referencial de repouso de modo a obter [23]

$$(\gamma^0 - m)u(m, 0) = (\gamma^0 + m)v(m, 0) = 0, \quad (5)$$

que implica em:

$$u^{1,2}(m, 0) = \begin{matrix} \xi^{1,2} \\ 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad v^{1,2}(m, 0) = \begin{matrix} 0 \\ \eta^{1,2} \end{matrix}, \quad (6)$$

onde $\eta^{1,2} = \xi^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Com os resultados de (5) podemos efetuar um *boost* de Lorentz de modo a obter as seguintes expressões gerais [23]:

$$\begin{aligned} u^s(p) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{[2E(m+E)]^{\frac{1}{2}}} u^s(m, 0) = \begin{pmatrix} \frac{E+m}{2E} \frac{1}{2} \xi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{[2E(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \xi^s \end{pmatrix}, \\ v^s(p) &= \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{[2E(m+E)]^{\frac{1}{2}}} v^s(m, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{[2E(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \eta^s \\ \frac{E+m}{2E} \frac{1}{2} \eta^s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

e da mesma maneira, $\bar{u}(x)$ (ou $\bar{v}(x)$) definido conforme a aplicação de $\bar{u}(x) = u^\dagger(x)\gamma^0$ (ou $\bar{v}(x) = v^\dagger(x)\gamma^0$).

Para uniformizarmos a notação na discussão das propriedades quirais dos spinores de Dirac, utilizaremos a representação de Dirac das matrizes *gamma* (γ^μ) descritas por:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

de modo que as soluções da equação de Dirac sejam dadas pela expressão (7). A matriz γ^5 de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad \gamma^{5^2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma^5, \gamma^\mu = 0, \quad (9)$$

sendo que a última delas implica na relação de comutação $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$, onde $S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ são os geradores das transformações contínuas de Lorentz. Para estendermos o estudo das propriedades que envolvem a matriz γ^5 , consideraremos a solução geral da equação de Dirac obtida, por meros motivos de simplificação matemática, ao assumirmos uma análise em uma dimensão espacial z , descrita por:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \{b^s(p) u^s(p) \exp[-i p x] + \\ & d^{s*}(p) v^s(p) \exp[+i p x]\}, \end{aligned} \quad (10)$$

de modo que podemos definir as densidades de corrente (de simetria) *vetoriais* e *pseudo-vetoriais* dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} j^\mu(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \\ j^{\mu 5}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu\gamma^5\psi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Se assumimos que $\psi(\mathbf{x}, t)$ satisfaz a equação de Dirac, podemos calcular o divergente dessas densidades de corrente,

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}, t) &= (\partial_\mu \bar{\psi}(\mathbf{x}, t))\gamma^\mu(\partial_\mu \psi(\mathbf{x}, t)) \\ &= (i m \bar{\psi}(\mathbf{x}, t))\psi + \bar{\psi}(-i m \psi(\mathbf{x}, t)) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

que implica na imediata conservação de $j^\mu(\mathbf{x}, t)$. Ao acoplarmos um campo $\psi(\mathbf{x}, t)$ de Dirac a um campo eletromagnético, $j_\mu(\mathbf{x}, t)$ passa a descrever uma densidade de corrente elétrica.

De maneira similar, podemos calcular:

$$\partial_\mu j^{\mu 5}(\mathbf{x}, t) = 2 i m \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^5\psi(\mathbf{x}, t). \quad (13)$$

Se $m = 0$, esta uma, também chamada de densidade de corrente *axial*, também é conservada. Em geral, é comum definir os termos de densidades de corrente *left-L* e *right-R* por meio de combinações lineares com o operador γ^5 ,

$$\begin{aligned} j_L^\mu(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \\ j_R^\mu(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \psi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Somente se $m = 0$, estas seriam densidades de corrente de partículas com caráter de helicidade *left-handed* e *right-handed* e seriam separadamente conservadas. As duas correntes $j^\mu(\mathbf{x}, t)$ e $j^{\mu 5}(\mathbf{x}, t)$ são as correntes de

Noether que correspondem às duas transformações de *gauge* representadas respectivamente por

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \exp[i\alpha]\psi(\mathbf{x}, t), \quad (15)$$

e

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \exp[i\alpha\gamma^5]\psi(\mathbf{x}, t). \quad (16)$$

A primeira delas descreve uma simetria global da Lagrangiana de Dirac. A segunda, chamada de *transformação quirial*, representa uma simetria apenas da parte cinética da Lagrangiana de Dirac. O teorema de Noether ratifica que uma densidade de corrente *axial* relacionada a uma *transformação quirial* se conserva somente se $m = 0$ [29].

2.1. Helicidade e quiralidade

Vejam, agora, o que acontece quando escolhemos convenientemente os spinores de duas componentes η^s e ξ^s como autoestados da matriz de Pauli σ^z , ou seja, como na Eq. (6),

$$\eta^{1,2} = \xi^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Ao escolhermos o eixo- z como o eixo diretor do vetor momento \mathbf{p} , tal que $p_x = p_y = 0$, podemos definir um operador h que, para esta escolha específica, será dado por:

$$h = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Observamos, então, que $u^s(p_z, m)$ e $v^s(p_z, m)$ com $s = 1, 2$ são autovetores de h com autovalores $h = +\frac{1}{2}$ para $s = 1$ e $h = -\frac{1}{2}$ para $s = 2$. Em geral, apesar de soluções de ondas planas para partículas livres poderem sempre ser escolhidas como as autofunções de h , não é possível escolher uma solução tal que a mesma seja uma autofunção de $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com um vetor diretor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ arbitrário. Isto ocorre porque o operador $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ não comuta com o Hamiltoniano de uma partícula livre, a menos que $\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{p}}$ ou $\mathbf{p} = 0$.

O operador h que pode ser diagonalizado simultaneamente com o Hamiltoniano de uma partícula livre é chamado de operador de *helicidade* [24]. Este operador corresponde exatamente à projeção do *spin* da partícula em questão na direção do vetor momento \mathbf{p} . Uma partícula com $h = +\frac{1}{2}$ é chamada de *right-handed*, enquanto uma outra com $h = -\frac{1}{2}$ é chamada de *left-handed*. A helicidade de uma partícula com massa não-nula depende do sistema espaço-temporal de referência, ou seja, a qualquer momento, um *boost* pode ser feito para um outro sistema de referência onde o momento da partícula pode ser obtido com o sentido oposto àquele inicial. Com o *spin* inalterado, a helicidade da partícula muda. Para partículas sem massa, contudo, as quais viajam com velocidade da luz, tal *boost* não é possível.

De certa maneira, helicidade e quiralidade, como números quânticos, carregam informações complementares. A quiralidade é invariante diante de uma

transformação de Lorentz contínua, porém, não é constante no tempo se a partícula é maciça. A helicidade de uma partícula livre, por outro lado, é uma constante no tempo mas não corresponde a um invariante de Lorentz. De fato, um autoestado quirial pode sempre ser escrito como uma combinação linear de dois autoestados de helicidade.

2.2. O conceito de *calibre* acoplado à quiralidade

Um importante aspecto da física de partículas está na possibilidade de acomodarmos o espectro de partículas conhecidas em representações irredutíveis de um determinado grupo de simetria interna. Um tipo importante e particular de simetria interna é a chamada simetria de *gauge*, utilizada como um princípio dinâmico na construção de teorias de campos. Ao longo do tempo, a idéia de que as interações fundamentais da natureza são determinadas pela simetria de *gauge* adquiriu uma importância essencial. As teorias dotadas com simetrias de *gauge* têm como importante propriedade o fato das interações dos campos de *gauge* serem ditadas pela simetria em questão, reduzindo consideravelmente as possíveis formas de interação. Concomitantemente, as simetrias de *gauge* introduzem um certo grau de unificação entre as diferentes interações conhecidas, desde que elas passem a ter uma estrutura geométrica comum.

Para observarmos como o conceito de quiralidade se apresenta em uma teoria de *gauge*, propomos a construção de uma Lagrangiana invariante de *gauge* em uma teoria, inicialmente, com férmions sem massa. Podemos acoplar um campo de Dirac a um campo de *gauge* atribuindo uma representação de um grupo de G aos campos quirais- L , $\psi_{i_L}(\mathbf{x}, t)$, com quiralidade negativa, e uma outra representação aos campos quirais- R , $\psi_{i_R}(\mathbf{x}, t)$, com quiralidade positiva. Com isto, podemos escrever

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi(\mathbf{x}, t), \quad (19)$$

onde observamos que somente os campos quirais- L se acoplam com os campos A_μ^a de bósons de *gauge*.

Em um passo imediato, é possível verificar que a Lagrangiana (19) é um objeto invariante diante de uma transformação local de *gauge* [29],

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \left[1 + i\alpha_\mu^a T^a \frac{1 - \gamma^5}{2} \right] \psi(\mathbf{x}, t), \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + g^{-1} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b \alpha^c, \end{aligned} \quad (20)$$

onde as propriedades da álgebra em questão são descritas pelas relações de comutação entre os operadores T^a dadas por:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (21)$$

Dado que os campos quirais- R são campos livres, podemos eliminar estes campos de uma vez por todas e escrever a Lagrangiana invariante de *gauge* para

férmions puramente quirais- L . A idéia de campos de *gauge* que se acoplam com férmions quirais- L tem um papel central na construção de uma teoria para interações fracas.

Para exibirmos as propriedades dos férmions que se acoplam por meio de interações com quiralidade definida, é conveniente reescrevermos a Lagrangiana com simetria diante da operação de conjugação de carga $C = i\gamma^2\gamma^0$. Um campo de carga conjugada seria descrito por ψ^c como

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*, \quad (22)$$

de modo que o conjugado de uma componente quiral- R de um campo ψ , sob as transformações de Lorentz, se transforma como uma quantidade quiral- L que seria definida por ψ_L^c , isto é,

$$\begin{aligned} \psi_L^c &= (\psi^c)_L = i \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = \\ & i\gamma^2 \frac{1+\gamma^5}{2} \psi^* = i\gamma^2\gamma^0\psi_R^* \equiv (\psi_R)^c, \end{aligned} \quad (23)$$

e, da mesma maneira, o conjugado de componente quiral- L de um campo ψ se transforma como uma quantidade quiral- R que seria definida por ψ_R^c

$$\psi_R^c = i\gamma^2\gamma^0\psi_L^* \equiv (\psi_L)^c. \quad (24)$$

Tal propriedade é importante para observarmos o que ocorre em um modelo de calibre com simetria $L-R$. Primeiramente, é possível definir os multipletos que caracterizam as partículas envolvidas nas interações com os bósons de *gauge* e suas propriedades de transformação descritas pelos geradores do grupo que rege as interações características do modelo. Dentre tentativas consolidadas, ou ainda promissoras, temos o modelo $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$ de Mohapatra e Pati [27] e os modelos com simetria $SU(3) \otimes SU(4)_L (SU(3)_L) \otimes U(1)$ de Pleitez e outros [30, 31], além de uma série de extensões [32, 33] onde sucessivas quebras espontâneas de simetria (QES) resultam na “recuperação” do modelo GWS [34] para interações eletrofracas [35, 36]. Em todos esses modelos, os neutrinos de caráter quiral- R aparecem como partículas interagentes em multipletos que se acoplam com bósons de *gauge* descritos pelos geradores dos grupos em questão (antes da QES). Entretanto, pela própria característica vetorial das interações

mediadas pelos bósons de calibre, a possibilidade de conversão de quiralidade $L - R$ mediante um acoplamento de calibre é impossível uma vez que o acoplamento vetorial entre campos de caracteres quirais opostos tem amplitude de probabilidade nula³,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L A_\mu \gamma^\mu \psi_L &\equiv \bar{\psi}_R A_\mu \gamma^\mu \psi_L \\ &\propto (1+\gamma^5)\psi^\dagger \gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi \\ &= \psi^\dagger (1+\gamma^5)\gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1+\gamma^5)(1-\gamma^5)\psi = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Dada esta impossibilidade, na próxima seção descreveremos a maneira através da qual oscilações quirais podem ser efetivamente descritas.

3. Oscilações quirais

Se uma partícula sem massa representada por um *spinor* de Dirac é produzida em um autoestado quiral (do operador γ^5), então, a sua quiralidade será uma constante do movimento, além de representar uma quantidade invariante de Lorentz. Esta propriedade não se mantém, de modo algum, para partículas massiças. Para elucidarmos este ponto temos o Hamiltoniano para partícula livre dado por

$$H_0 = -i\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} + m\gamma^0, \quad (26)$$

o qual representa o operador de evolução temporal para tempos subseqüentes ao tempo ($t = 0$) de criação de um spinor, e não comuta com o operador quiral γ^5 devido ao termo de massa em H_0 . De modo a sermos mais precisos, observamos que

$$-i\partial_t\langle\gamma^5\rangle = \langle[H_0, \gamma^5]\rangle = 2m\langle\gamma^0\gamma^5\rangle, \quad (27)$$

onde m é a massa relativa a um *spinor* o qual assumimos que seja um autoestado de massa. Ao admitirmos que simplificações matemáticas substanciais aparecem quando adotamos uma análise em uma dimensão espacial z , o valor médio do lado direito da equação acima é dado explicitamente por:

$$\langle\gamma^0\gamma^5\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi^\dagger(z, t)\gamma^0\gamma^5\psi(z, t), \quad (28)$$

onde $\psi(z, t)$ pode ser descrita em termos de soluções de ondas planas pela expansão:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s=1,2} \{b^s(p_z, m_1)u^s(p_z, m_1) \exp[-i(E(p_z, m_1)t - p_z z)] \\ &+ d^{s*}(p_z, m_1)v^s(p_z, m_1) \exp[+i(E(p_z, m_1)t - p_z z)]\}, \end{aligned} \quad (29)$$

³Observe que segundo a notação adotada aqui, a qual é diferente de alguns livros textos, $\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}_L\psi_L = 0$ onde $\bar{\psi}_{R(L)}$ é um objeto de quiralidade- $R(L)$.

que satisfaz a equação de Dirac. Entretanto, da mesma maneira que para o efeito de *zitterbewegung* [23, 24], a fórmula (27) não implica em um efeito físico necessariamente observável. É fácil observar que, para um pacote de ondas construído somente com soluções de ondas planas com frequências positivas, a equação de Dirac para spinores $u(p_z, m)$ e $v(p_z, m)$ leva a um valor

médio nulo para a expressão (27),

$$\begin{aligned} (\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z - m)u(p_z, m) &= \\ \bar{u}(p_z, m)(\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z - m) &= 0, \\ (\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z + m)v(p_z, m) &= \\ \bar{v}(p_z, m)(\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z + m) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Para ilustrarmos este ponto, calculamos explicitamente:

$$\begin{aligned} \langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'} b^{s*}(p_z, m) b^{s'}(k_z, m) \bar{u}^s(p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(k_z, m) \\ &\quad \times \exp[i(E(p_z, m) - E(k_z, m))t] \exp[-i(p_z - k_z)z] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'} b^{s*}(p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{u}^s(p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (31)$$

assim, como consequência da identidade (unidimensional) de Gordon “quiral”, temos:

$$\begin{aligned} u^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) &= \\ \frac{1}{2m} u^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 E(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 - k_z \gamma^3 \gamma^5 & \\ + \gamma^5 \gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^5 \gamma^3 p_z u^{s'}(p_z, m). \end{aligned} \quad (32)$$

de onde observamos que:

$$u^{s\dagger}(p_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) = 0, \quad (33)$$

o qual leva a um valor nulo para a média calculada de $\gamma^0 \gamma^5$. Uma prova similar é obtida quando trabalhamos com soluções de frequência negativa.

Por outro lado, ao trabalharmos simultaneamente com frequências positivas e negativas, o termo de interferência entre soluções de frequências com sinais opostos leva a uma componente de oscilação quiral.

$$\begin{aligned} \langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'} \left\{ d^s(k_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{v}^s(k_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) \right. \\ &\quad \times \exp[-i(E(p_z, m) + E(k_z, m))t] \exp[i(p_z + k_z)z] - \text{h.c.} \left. \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'} \left\{ d^s(-p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{v}^s(-p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) \exp[-2iE(p_z, m)t] - \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

A identidade de Gordon “quiral”, para termos cruzados (interferência), levaria a:

$$\begin{aligned} v^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) &= \\ -\frac{1}{2m} v^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 E(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 - k_z \gamma^3 \gamma^5 & \\ - \gamma^5 \gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^5 \gamma^3 p_z u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} v^{s\dagger}(-p_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) &= \\ -\frac{E(p_z, m)}{m} v^{s\dagger}(-p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (36)$$

logo, ao substituirmos os spinores de Dirac por suas formas explícitas no último resultado, obtemos:

$$v^{s\dagger}(-p_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) = -\delta_{sr}. \quad (37)$$

que proporciona o resultado:

Desta forma, a expressão (27) passa a ser escrita como

$$\partial_t \langle \gamma^5 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_s \left\{ -(2im) d^s(-p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \exp[-2iE(p_z, m)t] + \text{h.c.} \right\}, \quad (38)$$

de onde, após perfazermos a integral temporal, obtemos:

$$\langle \gamma^5 \rangle(t) = \langle \gamma^5 \rangle(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{m}{E(p_z, m)} \times \sum_s \left\{ d^s(-p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \{ \exp[-2iE(p_z, m)t] - 1 \} + \text{h.c.} \right\}. \quad (39)$$

De uma maneira muito particular, De Leo e Rotelli [26] discutem o real significado físico da oscilação quiral calculada a partir dos resultados apresentados até aqui. Demonstra-se que, para uma função de onda representada inicialmente por uma *gaussiana*, a qual tem um valor médio de quiralidade nulo, as oscilações de quiralidade $L \leftrightarrow R$ (*left* \leftrightarrow *right*) se cancelam de modo que não se observa o caráter oscilante de maneira efetiva. Em princípio, isto poderia originar um aparente paradoxo. De fato, este é o ponto inicial de uma discussão da influência do caráter quiral do estado inicial no fenômeno de oscilação quântica.

3.1. O estado inicial em um processo de oscilação quiral

Para reproduzirmos as idéias contidas em [26], consideramos que para qualquer autoestado de massa representado por uma onda plana solução da equação de Dirac, a função de onda no sistema de repouso representa sempre uma mistura igual de componentes de quiralidade $L - R$. Isto é facilmente verificado quando:

$$\psi = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi + \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \psi_L + \psi_R, \quad (40)$$

onde $\psi_{L,R}$ correspondem respectivamente à quiralidade ∓ 1 . Pode ser demonstrado que, no sistema de repouso de uma partícula, teríamos:

$$|\psi_L|^2 = |\psi_R|^2. \quad (41)$$

Note que este resultado não é invariante diante de uma transformação de Lorentz pois esta não é unitária. Desta maneira, enquanto temos uma seção de choque invariante de Lorentz, temos, também, probabilidades quirais que não são invariantes. Isto vem a sugerir que as medidas de probabilidade não dependem da quiralidade do objeto oscilante, ou seja, temos aparentemente um argumento contrário à relevância física que as oscilações quirais poderiam apresentar.

A resposta a esta objeção construída com base na invariância de Lorentz da seção de choque é que, para qualquer sistema de referência, as oscilações quirais são efetivamente importantes devido a projeção na forma “vetorial menos axial” (V-A) das correntes de interação fraca. Mais especificamente, as variações de probabilidades quirais produzidas por estas transformações de Lorentz (mesmo se γ^5 comuta com os geradores de Lorentz) são automaticamente compensadas pelas condições de normalização da função de onda e da forma transformada (de Lorentz) dos bósons vetoriais intermediários e outras partículas que compõem a determinação da seção de choque em questão.

Esta situação é semelhante à aparente contradição entre os seguintes fatos. Em todos os processos (conhecidos) através dos quais neutrinos são produzidos como autoestados quase puros de helicidade *left-handed*, dado que são criados predominantemente com estados ultra-relativísticos (onde quiralidade é quase

equivalente à helicidade) por meio de uma interação V-A, o valor médio da quiralidade é muito próximo de -1 (ou L). Mas no sistema de repouso do neutrino (onda plana) este valor médio seria nulo. Visto do referencial (de repouso) do neutrino, não há preferência entre os valores de quiralidade -1 ou $+1$. Não há, então, uma contradição com o fato de haver uma dominância de neutrinos com quiralidade- L na natureza? Não. Enquanto existem sistemas de referência comuns a quase todos os neutrinos que se apresentam como autoestados quase puros de quiralidade- L , existem muitos outros sistemas de referência, não coincidentes aos anteriores, para os quais a quiralidade- R é dominante para cada neutrino.

Uma outra questão é pertinente: em qual sistema de referência a forma da localização do pacote de ondas deve ser levada em conta. Um pacote de ondas *gaussiano*, sugerido principalmente pela simplicidade de suas características de integração, certamente não independe do sistema de referência considerado. Desta maneira, se escolhermos, por exemplo, o Sol como um sistema de referência, poderemos estabelecer que os neutrinos são criados como autoestados quase puros de quiralidade- L . Isto abre espaço para oscilações quirais que, possivelmente, como veremos na próxima seção, poderiam implicar em uma diminuição do fluxo efetivo, isto é, detectados mediante interação fraca, dos neutrinos que chegam até a Terra.

4. Analogias com processos de inversão de spin

A interação de partículas fermiônicas representadas por $\psi(\mathbf{x}, t)$ em coordenadas espaciais tridimensionais com campos vetoriais externos pode ser representada por um termo de Lagrangiana de interação descrito por:

$$- G \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu V^\mu(\mathbf{x}) \psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (42)$$

onde G representa a constante de acoplamento da interação correspondente. No caso de interações fracas cujos férmions envolvidos são neutrinos que se acoplam a um campo bosônico vetorial $Z^\mu(\mathbf{x})$, a expressão (42), onde esquecemos por um momento as oscilações de sabores, seria corretamente descrita por:

$$- \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \bar{\nu}_\alpha(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) \nu_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (43)$$

onde g é a constante de acoplamento relativa a simetria $SU(2)_L$ e g' é a constante de acoplamento relativa a simetria $U(1)_Y$ da teoria GWS ($SU(2)_L \times U(1)_Y$) [34]. Com o termo de interação adicionado à Lagrangiana de uma partícula livre, o operador Hamiltoniano seria escrito como:

$$H = -i \gamma_0 \gamma_i \partial^i - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \gamma_0 \gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) + \gamma_0 m. \quad (44)$$

Neste caso, a operação de comutação com o operador de quiralidade γ_5 resulta novamente, como na expressão

(27), em um termo não nulo advindo somente do termo de massa $\gamma_0 m$,

$$[\gamma_5, H] = [\gamma_5, H_0] = 2m\langle\gamma_0\gamma_5\rangle, \quad (45)$$

onde, neste caso, porém, o valor médio $\langle\gamma_0\gamma_5\rangle$ deve se alterar devido à nova forma assumida pelas novas soluções da equação de Dirac com os termos de interação que aparecem. Contudo, o motivo pelo qual introduzimos esta seção, não é o de prosseguirmos com estes cálculos, mas sim, de observarmos que a presença de um novo termo de interação no Hamiltoniano (44) determina o caráter da evolução temporal do operador helicidade descrito na expressão (18) do início deste capítulo como a projeção do operador de *spin* na direção e sentido de propagação da partícula fermiônica,

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Em outras palavras, ao interagir com um campo vetorial externo, uma partícula fermiônica deve estar sujeita ao fenômeno de rotação de *spin* (*spin flipping*) onde seu estado de polarização se altera. De modo a esclarecermos esta suposição, consideramos o Hamiltoniano no espaço de momentos para uma partícula que se propaga na direção z ,

$$H(\mathbf{x}, p_z) = -i\gamma_0\gamma_3\partial_z - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}\gamma_0\gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) + \gamma_0 m \quad (47)$$

e indicamos a dependência temporal de h como

$$\begin{aligned} -i\partial_t\langle h \rangle &= \langle [H, h] \rangle = \\ &= -\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}\langle\gamma_5\gamma_3(\gamma_1 Z_1(\mathbf{x}) + \gamma_2 Z_2(\mathbf{x}))\rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Também é importante notar que $[\gamma_5, h] = 0$, isto é, a medida do comportamento temporal de uma dessas variáveis não influencia no valor da outra. De maneira mais objetiva, para uma Hamiltoniana descrita como (47), a oscilação de quiralidade jamais podem alterar o estado de polarização de uma partícula fermiônica.

Apesar de, envolvendo algumas manipulações matemáticas um pouco mais extensas, ser possível determinar a evolução temporal do operador h da mesma maneira como fizemos para γ_5 , a helicidade não é um invariante de Lorentz⁴. Além disso, interações fracas têm como característica a quiralidade -1 definida, sendo que o mesmo não é válido para a helicidade. A importância do estudo envolvendo estas variáveis, sob o ponto de vista fenomenológico, está relacionada ao fato de que efeitos dinâmicos como oscilação de quiralidade e de helicidade (rotação de *spin*) alteram, respectivamente, cada qual a sua maneira, a probabilidade de conversão de sabores e os estados de polarização de um neutrino.

5. Conclusões

Neste texto confrontamos os conceitos de helicidade e quiralidade e, ao concentrarmos a discussão neste

último, observamos que o uso da equação de Dirac como a equação de movimento para partículas fermiônicas descritas por pacotes de ondas que representam os autoestados de massa que produzem o fenômeno de interferência durante a propagação espaço-temporal levam a uma fórmula de oscilação do caráter quiral, isto é, a aparição de férmions com caráter quiral- R que resultam da conversão $L \rightarrow R$ de um estado inicial L . É de se salientar que o processo de oscilação quiral pode introduzir pequenas interferências em outros processos físicos, notoriamente, o processo de oscilação quântica de sabores para partículas fermiônicas que se propagam no vácuo em um processo totalmente desacoplado do processo de inversão de *spin*. Entretanto, com as massas que os neutrinos parecem ter, que para os três diferentes sabores são compatíveis com aproximadamente 0 eV, 0.002 eV e 0.1 eV fica muito difícil observarmos as implicações efetivas deste mecanismo em regimes (ultra)relativísticos de propagação [37]. Observamos que o processo de oscilação quiral tem características dinâmicas semelhantes ao de um processo de rotação de *spin* em um caso restrito de interação com o meio externo, porém, resultam em efeitos físicos completamente diversos: a rotação de *spin* não influencia, por exemplo, no resultado dos processos de conversão de sabores, enquanto que oscilações quirais jamais alteram o estado de polarização de um neutrino devido a comutabilidade dos operadores de quiralidade e de helicidade. Deste modo, para encerrarmos de maneira conclusiva, esperamos ter contribuído no entendimento de um aspecto pelo qual muitas vezes, na literatura, não é dada a devida atenção: a identificação clara dos conceitos de quiralidade e helicidade no contexto da física de partículas, e a descrição dos fenômenos físicos que daí se derivam.

Agradecimentos

Este trabalho foi possível graças ao Suporte Financeiro da Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Fundo de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Referências

- [1] M. Zralek, Acta Phys. Polon. **B29**, 3925 (1998).
- [2] M. Beuthe, Phys. Rep. **375**, 105 (2003).
- [3] K. Zuber, Phys. Rep. **305**, 295 (1998).
- [4] K. Scholberg, hep-ex/0308011.
- [5] M.C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, Rev. Mod. Phys. **75**, 245 (2003).
- [6] A. de Gouvêa, hep-ph/0503086.

⁴Um *boost* de Lorentz pode levar um estado de helicidade definida a um estado representado pela combinação linear entre dois estados de helicidades diversas.

- [7] R.D. McKeown and P. Vogel, *Phys. Rep.* **395**, 315 (2004).
- [8] A series of papers on Super-Kamiokande data about atmospheric neutrino fluxes, *Superkamiokande Collaboration*,
S. Fukuda *et al.*, *Phys. Lett.* **B537**, 179 (2002),
S. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5651 (2001),
S. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3999 (2000).
- [9] A series of papers on SNO data about solar neutrino oscillation, *SNO Collaboration*,
Q.R. Ahmad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011302 (2002),
Q.R. Ahmad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002),
Q.R. Ahmad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001).
- [10] K. Egushi *et al.*, *KamLAND Collaboration*, *First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802 (2003).
- [11] C. Athanassopoulos *et al.*, *LSND Collaboration*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1774 (1998).
- [12] A. Aguilar *et al.*, *LSND Collaboration*, *Phys. Rev.* **D64**, 112007 (2001).
- [13] A. Bandyopadhyay, S. Choubey, S. Goswami, S.T. Petcov and D.P. Roy, *Phys. Lett.* **B583**, 134 (2004).
- [14] L. Alvarez-Gaumé *et al.*, *PDG Collaboration*, *Review of Particle Physics in Neutrino Mass, Mixing and Flavor Change*, edited by B. Kayser, *Phys. Lett.* **B592**, 145 (2004).
- [15] B. Armbruster *et al.*, *KARMEN Collaboration*, *Phys. Rev.* **D65**, 112001 (2002).
- [16] A. Aguilar *et al.*, *MiniBoonE Collaboration*, *hep-ex/0408074*.
- [17] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *Complex Spinors And Unified Theories in Supergravity* (North Holland, Amsterdam, 1979).
- [18] T. Yanagida, in *Proc. of the Workshop on Unified Theory and the Baryon Number of the Universe* (KEK, Japan, 1979).
- [19] J.C. D'Olivo, J.F. Nieves and P.B. Pal, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1088 (1990).
- [20] G. Barenboim, J. Bernabéu and O. Vives, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3299 (1996).
- [21] J.C. D'Olivo and J.F. Nieves, *Phys. Lett.* **B383**, 87 (1996).
- [22] A.E. Bernardini and S. De Leo, a ser publicado em *Mod. Phys. Lett.* **A20**, 681 (2005)
- [23] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw-Hill Inc., New York, 1980).
- [24] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1987).
- [25] A.E. Bernardini and S. De Leo, *Eur. Phys. J.* **C37**, 471 (2004).
- [26] S. De Leo and P. Rotelli, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 2193 (1998).
- [27] R.N. Mohapatra and J.C. Pati, *Phys. Rev.* **D11**, 566 (1975).
- [28] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [29] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995).
- [30] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev.* **D46**, 410 (1992).
- [31] V. Pleitez and M.D. Tonasse, *Phys. Rev.* **D48**, 2353 (1993).
- [32] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev.* **D51**, 3855 (1995).
- [33] H.N. Long and P.B. Pal, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 2355 (1998).
- [34] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **20**, 579 (1961),
A. Salam, *Elementary Particle Theory* (N. Svartholm, Stocholm, 1968), p. 367.
- [35] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [36] H. Georgi and S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
- [37] A.E. Bernardini and S. De Leo, a ser publicado em *Phys. Rev.* **D**, 076008-1 (2005).