Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 429 - 433, (2005)
www.sbfisica.org.br

Patrones de flujo según diferentes marcos de referencia

(Flow patterns after different reference frames)

Cesar Medina[1]

Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán, Argentina
Recebido em 7/4/2005; Aceito em 21/6/2005

En una evaluación de diagnóstico sobre mecánica de fluidos, en la que se pide a los estudiantes graficar diagramas de flujo de un caso de geometría simple, se observa una notable confusión asociada a cambios de marcos de referencia.

Como herramienta didáctica, se propone un análisis comparativo de diagramas de flujo en diferentes condiciones de movimiento relativo de un mismo sistema, consistente en un tubo cilíndrico que contiene líquido y un objeto esférico pequeño. Tales diagramas son mapas de velocidad y líneas de corriente obtenidos por resolución numérica de la ecuación de Navier-Stokes.
Palabras-clave: patrones de flujo, líneas de corriente, mapas de velocidad, marcos de referencia, soluciones numéricas.

In a diagnostic exam on fluid mechanics, in which students are asked to draw flow diagrams of a simple geometry case, there is an apparent confusion associated to reference frame changes.

As a didactic tool, we propose a comparative analysis of flow diagrams on different relative movement conditions of the same system, consisting in a cylindric pipe containing liquid and a small spherical object. Such diagrams are velocity maps and streamlines obtained through numerical solutions of Navier-Stokes equation.
Keywords: flow patterns, streamlines, velocity maps, reference frames, numerical solutions.

1. Introducción

En el método de Stokes para medir viscosidades, se deja caer una bolilla en un fluido contenido en tubo vertical. Si la longitud del tubo y la viscosidad del fluido son suficientemente grandes, a partir de una dada profundidad, la bolilla cae con velocidad prácticamente constante. Luego de realizar este experimento, se solicitó a un grupo de estudiantes que grafiquen las líneas de corriente en el régimen de velocidad constante. Los 36 alumnos evaluados respondieron incorrectamente y 35 de ellos tenían la misma confusión: creer que las líneas de corriente son idénticas en un sistema en que un objeto se mueve, en un dado sentido, en un fluido en reposo, y otro sistema en que el fluido se mueve en sentido contrario alrededor de un obstáculo quieto.

Es probable que la falta de claridad de la bibliografía usada en los cursos introductorios de mecánica de fluidos contribuya a esta confusión. En diversos textos, a los fines de facilitar ciertos cálculos, como los de presión y fricción sobre móviles, se aplican cambios de marcos de referencia, a menudo ilustrados con ejemplos de túneles de viento, u otros similares, que inducen al lector a creer que los flujos son iguales en diferentes sistemas inerciales[2].

En este trabajo, a los fines de proveer una herramienta didáctica que ilustre los cambios de flujo asociados a tales transformaciones, permitiendo aclarar y evitar las confusiones observadas, se propone la obtención, por resolución numérica, de diagramas de flujo bidimensionales de un sistema físico compuesto por un tubo cilíndrico con líquido y un objeto esférico pequeño, en diferentes condiciones de movimiento relativo.

2. Metodología

Estudiaremos el problema considerando tres casos:

I) Un fluido que circula hacia arriba[3] en un tubo y enfrenta un pequeño obstáculo esférico fijo en el sistema de laboratorio.

II) Una bolilla que cae con velocidad constante en un tubo lleno de líquido que está en reposo en el sistema de laboratorio. El problema se estudia en el sistema de

[1]E-mail: cfmedina@herrera.unt.edu.ar.

[2]Sistemas en movimiento relativo, con velocidad constante.

[3]Nótese que el fluido avanza en contra de la gravedad, cual sería el caso de una fuente con una dada presión, cerca de la base del tubo. Se ha tomado arbitrariamente esta dirección para facilitar la comparación con los casos II y III.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

la bolilla.

III) Una transformación del caso anterior al sistema de laboratorio.

En todos los casos, las dimensiones del tubo y de la pequeña esfera, y la viscosidad del líquido (no nula), serán las mismas. El tubo es cilíndrico y se encuentra en posición vertical.

El problema se analiza en dos dimensiones, lo cual no quita generalidad a la solución puesto que, por la simetría cilíndrica del sistema, todos los planos que pasan por un diámetro del tubo son equivalentes.

Empleando el software PDE2D[4] [1], se resuelve numéricamente un sistema de cuatro ecuaciones:

$$R\left(u \cdot u_x + v \cdot u_y\right) = -RP_x + u_{xx} + u_{yy} + \left(u_x + v_y\right)_x \tag{1}$$

$$R\left(u \cdot v_x + v \cdot v_y\right) = -RP_y + v_{xx} + v_{yy} + \left(u_x + v_y\right)_y \tag{2}$$

$$u_x + v_y = 0 \tag{3}$$

$$\Psi_y = -u \tag{4}$$

donde los subíndices x y y representan las derivadas respecto de estas coordenadas; u y v, las componentes de la velocidad del líquido en las direcciones x y y, respectivamente; P, la presión; Ψ, el potencial de corriente; y R, el número de Reynolds, dado por

$$R = \frac{\rho V d}{\eta} \tag{5}$$

siendo ρ la densidad del líquido; η, su coeficiente de viscosidad; V, su velocidad; y d, una longitud característica del sistema, que se analizará en la próxima sección.

Las Ec. (1) y (2) corresponden al desdoblamiento, en ambas componentes de la velocidad, de la ecuación de Navier-Stokes, suponiendo que la velocidad es constante en el tiempo y no hay fuerzas externas. La (3) indica que la divergencia de la velocidad es nula, y es un corolario de la ec. de continuidad para fluidos incompresibles (densidad constante). Estas tres primeras ecuaciones forman un sistema acoplado en las variables u, v y P. A los fines de simplificarlo y mejorar la tasa de convergencia de su solución, se ha empleado la formulación de penalización, válida para fluidos incompresibles [2], para reemplazar la variable P:

$$P = -\alpha\left(u_x + v_y\right) \tag{6}$$

donde α es un número arbitrariamente grande (se ha tomado $\alpha = 10^4$) que indica que grandes presiones provocan pequeños decrementos de volumen.

La Ec. (4) se ha incluido para obtener las líneas de corriente, las cuales cumplen con la condición de ser paralelas a la velocidad en cada punto, y en flujos estacionarios representan trayectorias posibles de una partícula. Dado que a lo largo de una línea de corriente Ψ no varía, basta asignar a esta variable un valor constante para obtener una línea de corriente. En nuestro estudio, se han asignado valores constantes igualmente espaciados y en un mismo intervalo para las Fig. 1 y 2. Para la Fig. 3 se usaron valores igualmente espaciados en otro intervalo. Así, la diferencia de valor de Ψ entre dos líneas de corriente contiguas cualesquiera es siempre la misma, lo cual permite comparar los patrones de flujo sobre las mismas bases.

Los valores de R considerados en la resolución numérica son 0.01, 0.1 y 1.0. No se han tomado valores de R mayores por dos razones. Por una parte, la Ec. (5) da valores bastante menores que la unidad para las condiciones usuales del caso III: bolillas de acero de unos poco milímetros de diámetro cayendo en fluidos viscosos como glicerina o aceite a temperaturas moderadas. Por otra parte, en las Ec. (1) y (2) la velocidad se ha considerado constante, es decir que la fuerza resultante es nula en la bolilla que cae, y dado que R representa un cociente entre fuerzas inerciales y viscosas [3], no puede ser mayor que la unidad.

2.1. Condiciones de frontera para la velocidad

Las condiciones de frontera planteadas para la velocidad del fluido, en cada uno de los casos considerados, son las siguientes:

Caso I) En la base y el tope del tubo: un perfil parabólico de velocidades hacia arriba. En la pared del tubo y en la superficie del obstáculo: velocidad nula.

Caso II) En la base, el tope y la pared del tubo: velocidad constante hacia arriba. En la superficie de la bolilla: velocidad nula.

Caso III) Este caso se calcula a partir del anterior restando la componente de flujo uniforme, con lo cual queda: en la base, el tope y la pared del tubo: velocidad nula, y en la superficie de la bolilla: velocidad constante hacia abajo.

A partir de estas condiciones de frontera, se observa que la velocidad del fluido, en todos los casos, depende de las coordenadas espaciales. En el caso I, por tratarse de un perfil parabólico, el valor máximo de velocidad se tiene en el punto central de la base y el tope del tubo. En el caso II, se toma este mismo valor en toda la base y en todo el tope del tubo. En el caso III, este mismo valor es la velocidad constante de la bolilla.

Nótese que la mera definición de los casos, y de sus condiciones de frontera para la velocidad, nos indica que los casos II y III representan el mismo fenómeno físico analizado en dos sistemas inerciales distintos. Por el contrario, el caso I corresponde a otro fenómeno físico

[4] PDE2D (Partial Differential Equations in 2 Dimensions) es un software multipropósito desarrollado por G. Sewell (v. Ref. [1]), que resuelve sistemas de ecuaciones no lineales en 1, 2 ó 3 dimensiones. Sus principales características y ejemplos de uso pueden consultarse en http://members.aol.com/pde2d y http://www.fz-juelich.de/zam/docs/tki/tki_html/t0220/node5.html y otros sitios vinculados a éstos.

y sus condiciones de frontera son distintas de las del caso II. La diferencia se debe a que, en el caso I, la velocidad del fluido es nula en la pared del tubo, pues el tubo está en reposo y así deben estar las moléculas de líquido en contacto con él. No hay movimiento relativo entre el obstáculo esférico y el tubo, ambos están en reposo. En tanto que en el caso II, sí hay movimiento relativo entre la esfera y el tubo; desde el marco de referencia de la bolilla que está cayendo, el tubo se mueve con velocidad constante hacia arriba.

2.2. Condiciones de frontera para el potencial de corriente

Las condiciones de frontera planteadas para el potencial de corriente, en cada uno de los casos considerados, son las siguientes:

Casos I y II) En la superficie del obstáculo esférico se considera potencial de corriente nulo, lo cual se justifica porque no hay flujo a través de la superficie, y por tanto ésta debe ser una línea de corriente donde Ψ asume un valor constante. El hecho de que esta constante sea cero no quita generalidad a la solución porque el potencial de corriente está definido salvo una constante. En la base, el tope y la pared del tubo no se definen condiciones de frontera. Esto es factible debido a que las ecuaciones de frontera, al ser escritas en la forma usada por el software PDE2D, se transforman en identidades, es decir, igualdades que se verifican para cualquier valor de las incógnitas y, por tanto, no aportarían ninguna condición nueva al cálculo numérico. Incidentalmente, esto asegura la mayor generalidad posible en las soluciones.

Caso III) Este caso se obtiene a partir del anterior sustrayendo el potencial de flujo uniforme.

3. Resultados y Discusión

Las Figs. 1, 2 y 3 muestran los resultados para cada caso. En los diagramas, para una mejor visualización, se ha ampliado la escala del eje horizontal y por ello la pequeña esfera aparece achatada. Cada fila de una cuadrícula corresponde a un valor distinto del número de Reynolds. En la primera columna de cada figura se representan mapas vectoriales de velocidad, y en la segunda, las líneas de corriente. Recordemos que éstas se han graficado a incrementos constantes, dentro de un dado intervalo, para cada figura. Luego, no debe interpretarse que en las zonas laterales en blanco no hay líneas, sino que allí termina el intervalo considerado; si se hubiese considerado un intervalo mayor, podría haber más líneas.

Como se aclaró al tratar las condiciones de frontera para la velocidad, el caso I corresponde a un sistema físico distinto del II, y a ello se deben las diferencias entre sus respectivos patrones de flujo.

Por otra parte, a igualdad de velocidades, viscosidad y densidad, el número de Reynolds es distinto en los casos I y III, por el hecho de que el parámetro d de la Ec. (5) representa distintas longitudes características: en el caso I, representa el radio del tubo; y en el III, el diámetro de la bolilla [4]. Tratando de representar condiciones típicas, en nuestro estudio numérico se ha asignado al radio del tubo un valor 10 veces mayor que el diámetro de la bolilla. Luego, al comparar los resultados de los casos I y III, a los efectos de ver cómo cambia el flujo cuando pasamos de un sistema en que el fluido se mueve alrededor de un objeto en reposo, a otro sistema en que el objeto se mueve en el seno del fluido en reposo, debemos tener en cuenta que en el caso III, el número de Reynolds es 10 veces menor. Así, por ejemplo, la Fig. 1f corresponde a la Fig. 3d. cuando se pasa de un caso a otro.

En todos los casos se observa que el patrón de líneas de corriente se estrecha a medida que crece el número de Reynolds.

3.1. Casos I y II

Las Fig. 1 y 2 son bastante intuitivas y descriptivas por sí mismas. Las líneas de corriente son similares a las que aparecen en diversos textos. Para los valores altos de R se observa un ensanchamiento de la línea de corriente más próxima a la esfera, y también una asimetría vertical. En los diagramas vectoriales, esto corresponde a una zona por detrás del obstáculo, visto en el sentido de la corriente, donde la velocidad se hace menor. Este efecto también se ilustra en algunos textos y debería resultar familiar al estudiante, pues todos deben de haber visto un obstáculo en un curso de agua (una roca en medio de un río, por ejemplo), cuando la velocidad es baja, el líquido contornea el obstáculo, pero cuando es alta, las líneas de corriente se ensanchan y delimitan por detrás del obstáculo una zona de velocidad menor, que se torna turbulenta si la velocidad aumenta más.

Para los R mayores, las Fig. 1 y 2 son bastante similares, en tanto que para $R = 0.01$, son notablemente distintas. Esto se entiende si se advierte que el caso II puede interpretarse de dos maneras. Corresponde, como dijimos, a una bolilla que cae, considerada en el sistema de la bolilla, pero también puede interpretarse como un obstáculo esférico quieto en medio de un flujo uniforme, que sería el flujo de un tubo de radio infinito. Teniendo en cuenta que R - Ec. (5) -, es proporcional al radio del tubo, es razonable que para valores grandes de R, el patrón de un obstáculo en un tubo finito (caso I) se aproxime al de un obstáculo en un tubo infinito (caso II).

Por otra parte, también a partir de la Ec. (5), puede interpretarse que a velocidades muy bajas o viscosidades muy altas, el gradiente de velocidad es tan bajo entre la superficie del obstáculo y la pared del tubo, que se produce el virtual estancamiento que se observa en la Fig. 1a).

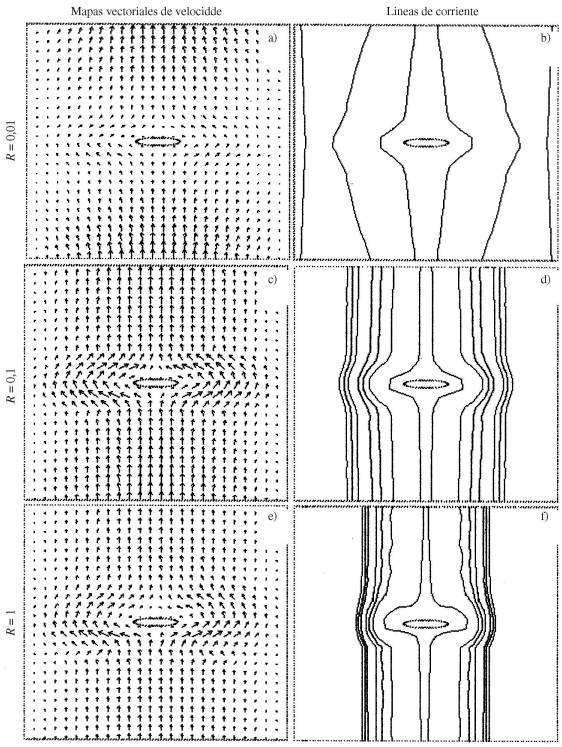

Figura 1 - Mapas de velocidad y líneas de corriente para el caso I.

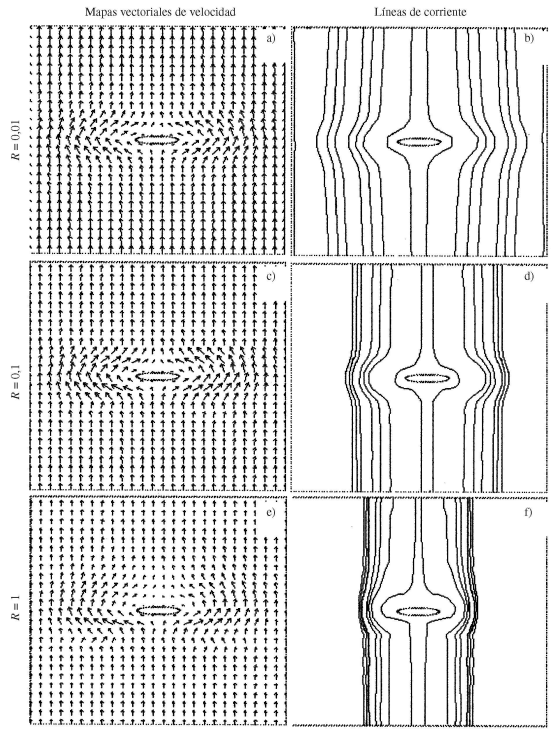

Figura 2 - Mapas de velocidad y líneas de corriente para el caso II.

3.2. Caso III

Probablemente este caso no resulte a los estudiantes tan familiar ni intuitivo como los anteriores. Se debe tener presente que se trata un sistema no estacionario, por lo cual las gráficas de la Fig. 3 representan sólo configuraciones instantáneas. Las líneas de corriente, son tangentes a la velocidad instantánea en cada punto, pero no representan, como en los casos anteriores, trayectorias posibles de los elementos de fluido, ya que las trayectorias deben cumplirse en intervalos finitos de tiempo, pero las líneas de corriente no se mantienen en el transcurso del fenómeno: el patrón de flujo acompaña a la bolilla en su desplazamiento.

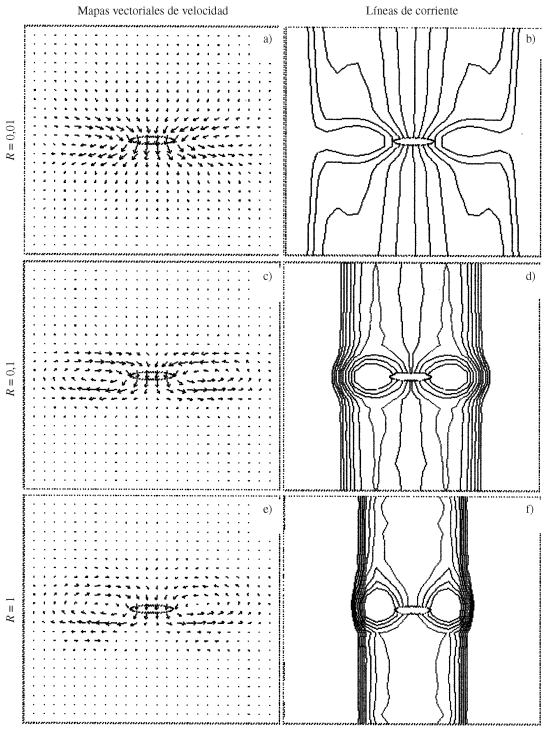

Figura 3 - Mapas de velocidad y líneas de corriente para el caso III.

Dado que las partículas de fluido adheridas a la bolilla se desplazan con la velocidad de ésta, es previsible que en su entorno inmediato los campos de velocidad sean aproximadamente radiales en la parte superior e inferior, y aproximadamente tangenciales hacia los lados. Por debajo de la bolilla el fluido se mueve hacia abajo por el empuje de ésta; por encima de ella, hay dos efectos que contribuyen al movimiento hacia abajo del fluido: la continuidad del flujo y la viscosidad del líquido. El primero se debe a que, a medida que se desplaza, la bolilla desaloja un volumen que debe ser ocupado por fluido. El segundo se debe al "arrastre" de la fuerzas de rozamiento interno del fluido.

Para los R mayores, se observan claramente vórtices laterales que apenas se insinúan para $R = 0.01$. En $R = 0.1$ hay un ligero estrechamiento vertical, v. Fig. 3. c), y en $R = 1$ otro estrechamiento lateral. Las líneas de corriente centrales inciden en la bolilla, y en las zonas laterales de ésta son aproximadamente perpendiculares a las de los casos anteriores. Las líneas de

corriente más apartadas de la bolilla son, por lo contrario, bastante similares a las de los casos anteriores.

4. Consideraciones teóricas

Diagramas similares a los de la Fig. 2 se habrían obtenido si en vez de resolver el problema de una bolilla que cae, en el sistema de la bolilla, se hubiese resuelto el problema de un dipolo fuente-sumidero inmerso en un flujo uniforme (Currie, 1974). Tal configuración produce una zona circular concéntrica con el dipolo, en el interior de la cual el flujo es dipolar, y en cuyo exterior, los patrones de flujo son como los de la Fig. 2. El momento dipolar y la velocidad del flujo uniforme determinan el área de la zona circular. En su frontera, la velocidad radial es nula, sólo hay velocidad tangencial. Es por ello que esta circunferencia es una línea de corriente y, al no pasar fluido a través de ella, es equivalente a un objeto rígido.

Los potenciales de corriente para configuraciones compuestas tienen carácter aditivo [3,5]. Así, el potencial de un dipolo inmerso en un flujo uniforme es igual a la suma de los potenciales de cada uno de estos dos términos. Luego, también puede sustraerse un término de este potencial compuesto para obtener el otro término. Fue éste el procedimiento para pasar del caso II al III y, por tanto, el haber obtenido diagramas de tipo dipolar, esto es, vórtices laterales en el entorno de la bolilla, es indicio de que nuestros resultados concuerdan con las previsiones teóricas.

Desde luego, ni las fuentes ni los sumideros puntuales existen en un sentido estricto pero, por la continuidad del flujo, podríamos imaginar, por ejemplo, que si tuviéramos una pequeña bomba aspirante-impelente fija en el centro de un enorme tanque cilíndrico, la cual succionara líquido por arriba y lo expulsara por abajo, los patrones de flujo en el tanque serían como los de la Fig. 3.

Aunque, en los planes de estudio, los contenidos de electrostática y los de mecánica de fluidos pueden corresponder a distintos cursos, creemos muy importante señalar al estudiante la singular analogía que existe entre estos dos temas. Las líneas de campo eléctrostático de un dipolo eléctrico inmerso en un campo uniforme son análogas a las líneas de corriente de un dipolo fuente-sumidero inmerso en un flujo uniforme. Y, desde luego, también está definido en mecánica de fluidos el potencial de velocidad, que es totalmente equivalente al potencial electrostático.

5. Conclusiones

Existe una importante diferencia entre cambiar de coordenadas entre sistemas inerciales (lo cual sería pasar del caso II al III) y cambiar de un sistema en que un fluido se mueve alrededor de un objeto en reposo a otro sistema en que un objeto se mueve en un fluido en reposo (lo cual sería pasar del caso I al III). Los casos I y II son comparables sólo cuando es muy grande el radio del tubo o el número de Reynolds, pero en general, en sistemas físicos reales, constituidos por objetos de dimensiones finitas, las condiciones de frontera que éstos imponen no pueden ignorarse. Además, debe tenerse en cuenta que el número de Reynolds cambia cuando se pasa de un sistema físico a otro.

Las transformaciones entre sistemas inerciales cambian, de un modo radical, los campos de velocidades, las líneas de corriente y el comportamiento temporal del flujo (estacionario o no estacionario).

Tales transformaciones constituyen un método valioso para obtener patrones "instantáneos" de líneas de corriente en sistemas no estacionarios.

La resolución numérica de la ecuación de Navier-Stokes confirma los resultados analíticos y experimentales de los sistemas estudiados.

Referencias

[1] G. Sewell, Adv. in Eng. Software **17**, 105 (1993).

[2] [2] E. Burman, M. Fernández and P. Hansbo, Research Report **5349**, INRIA (2004).

[3] I. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids* (Ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1974).

[4] S. Frish y A. Timoreva, *Curso de Física General* (Ed. Mir, Moscú, 1973), v. I.

[5] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos* (Ed. Reverté, Barcelona, 1991).